

Uguaglianza e sue proprietà logiche

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Uguaglianza
- 2 Uso
- 3 L'uguaglianza come relazione
- 4 Uguaglianza fra simboli

Cos'è l'uguaglianza?

Chi non conosce il simbolo di uguaglianza?

Cos'è l'uguaglianza?

Chi non conosce il simbolo di uguaglianza?

=

Cos'è l'uguaglianza?

Chi non conosce il simbolo di uguaglianza?

=

È un simbolo così fondamentale che addirittura molti lo pensano non ristretto alla Matematica.

Cos'è l'uguaglianza?

Chi non conosce il simbolo di uguaglianza?

=

È un simbolo così fondamentale che addirittura molti lo pensano non ristretto alla Matematica. (Ovviamente non parliamo qui dell'uguaglianza fra uomini, donne, ecc.).

Eppure, se scriviamo

Eppure, se scriviamo

$$3 + 5 = 8$$

Eppure, se scriviamo

$$3 + 5 = 8$$

oppure

Eppure, se scriviamo

$$3 + 5 = 8$$

oppure

$$x = 2y$$

Eppure, se scriviamo

$$3 + 5 = 8$$

oppure

$$x = 2y$$

tutti capiscono che stiamo facendo Matematica.

Eppure, se scriviamo

$$3 + 5 = 8$$

oppure

$$x = 2y$$

tutti capiscono che stiamo facendo Matematica.

Anche se scriviamo

Eppure, se scriviamo

$$3 + 5 = 8$$

oppure

$$x = 2y$$

tutti capiscono che stiamo facendo Matematica.

Anche se scriviamo

$$\text{Calore} = \text{Lavoro}$$

Eppure, se scriviamo

$$3 + 5 = 8$$

oppure

$$x = 2y$$

tutti capiscono che stiamo facendo Matematica.

Anche se scriviamo

$$\text{Calore} = \text{Lavoro}$$

ci pare, anche se in qualche modo strano, di enunciare
“matematicamente” una affermazione.

Cosa accade invece se scriviamo

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

A questa domanda, di solito, seguono due risposte:

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

A questa domanda, di solito, seguono due risposte:

- 1 (primitiva)

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

A questa domanda, di solito, seguono due risposte:

- 1 (primitiva) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 = 8$

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

A questa domanda, di solito, seguono due risposte:

- ① (primitiva) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 = 8$
- ② (più elaborata)

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

A questa domanda, di solito, seguono due risposte:

- ① (primitiva) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 = 8$
- ② (più elaborata) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 \neq 9$

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

A questa domanda, di solito, seguono due risposte:

- ① (primitiva) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 = 8$
- ② (più elaborata) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 \neq 9$

Io preferisco questa:

Cosa accade invece se scriviamo

$$3 + 5 = 9?$$

A questa domanda, di solito, seguono due risposte:

- ① (primitiva) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 = 8$
- ② (più elaborata) Non è giusto, bisogna scrivere $3 + 5 \neq 9$

Io preferisco questa:

- ① Abbiamo scritto una affermazione falsa.

Come tutti i “verbi”, anche l’affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Come tutti i “verbi”, anche l'affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Queste possono essere vere o false;

Come tutti i “verbi”, anche l’affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Queste possono essere vere o false; se poi si vogliono avere a tutti i costi delle affermazioni vere, questo è un altro problema (non poco importante).

Come tutti i “verbi”, anche l’affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Queste possono essere vere o false; se poi si vogliono avere a tutti i costi delle affermazioni vere, questo è un altro problema (non poco importante).

Ma vediamo un altro esempio.

Come tutti i “verbi”, anche l’affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Queste possono essere vere o false; se poi si vogliono avere a tutti i costi delle affermazioni vere, questo è un altro problema (non poco importante).

Ma vediamo un altro esempio.

$$x = 2y.$$

Come tutti i “verbi”, anche l’affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Queste possono essere vere o false; se poi si vogliono avere a tutti i costi delle affermazioni vere, questo è un altro problema (non poco importante).

Ma vediamo un altro esempio.

$$x = 2y.$$

Che possiamo dire qui?

Come tutti i “verbi”, anche l’affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Queste possono essere vere o false; se poi si vogliono avere a tutti i costi delle affermazioni vere, questo è un altro problema (non poco importante).

Ma vediamo un altro esempio.

$$x = 2y.$$

Che possiamo dire qui? Vera o falsa?

Come tutti i “verbi”, anche l’affermazione di uguaglianza (“... è uguale a...”) permette di costruire delle frasi o *proposizioni*.

Queste possono essere vere o false; se poi si vogliono avere a tutti i costi delle affermazioni vere, questo è un altro problema (non poco importante).

Ma vediamo un altro esempio.

$$x = 2y.$$

Che possiamo dire qui? Vera o falsa? Boh...

L'affermazione " $x = 2y$ " è *molto* più complicata di $3 + 5 = 8$

L'affermazione " $x = 2y$ " è *molto* più complicata di $3 + 5 = 8$ (e anche di $3 + 5 = 9$).

L'affermazione " $x = 2y$ " è *molto* più complicata di $3 + 5 = 8$ (e anche di $3 + 5 = 9$).

Non sembra infatti che possiamo dire che è "vera" o "falsa".

L'affermazione " $x = 2y$ " è *molto* più complicata di $3 + 5 = 8$ (e anche di $3 + 5 = 9$).

Non sembra infatti che possiamo dire che è "vera" o "falsa".

(In realtà abbiamo in mente che x e y siano *numeri*, e anche questo va detto).

L'affermazione " $x = 2y$ " è *molto* più complicata di $3 + 5 = 8$ (e anche di $3 + 5 = 9$).

Non sembra infatti che possiamo dire che è "vera" o "falsa".

(In realtà abbiamo in mente che x e y siano *numeri*, e anche questo va detto).

La possibilità di manipolare affermazioni con delle lettere (le cosiddette *variabili*) è fondamentale in Matematica, e questo impone delle precisazioni molto importanti.

L'affermazione " $x = 2y$ " è *molto* più complicata di $3 + 5 = 8$ (e anche di $3 + 5 = 9$).

Non sembra infatti che possiamo dire che è "vera" o "falsa".

(In realtà abbiamo in mente che x e y siano *numeri*, e anche questo va detto).

La possibilità di manipolare affermazioni con delle lettere (le cosiddette *variabili*) è fondamentale in Matematica, e questo impone delle precisazioni molto importanti.

Torneremo fra un attimo su questo.

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza ($=$) porta spesso a degli abusi.

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$$

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6}$$

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6}$$

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Questo continua a valere quando si fanno dei calcoli algebrici:

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Questo continua a valere quando si fanno dei calcoli algebrici:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$$

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Questo continua a valere quando si fanno dei calcoli algebrici:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{x-y+x+y}{(x+y)(x-y)}$$

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Questo continua a valere quando si fanno dei calcoli algebrici:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{x-y+x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{2x}{x^2-y^2}.$$

Come si usa l'uguaglianza?

Anche se sembra facile, l'uso del simbolo di uguaglianza (=) porta spesso a degli abusi.

Un uso corretto comune consiste nel creare delle *catene* di uguaglianze, quando si fanno dei conti:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Questo continua a valere quando si fanno dei calcoli algebrici:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{x-y+x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{2x}{x^2-y^2}.$$

Questo perché stiamo man mano elaborando espressioni che sono tutte uguali.

Però poi sorge un guaio:

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento.

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$\Rightarrow$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$\Rightarrow$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x =$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow$$

Però poi sorge un guaio: quando si lavora con le *equazioni* non si può più usare l'uguaglianza a piacimento. Guardate:

Versione corretta

$$x + 3 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x + x = 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

E adesso vediamo la versione sbagliata:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

I segni di uguale rosso sono quelli sbagliati.

Versione sbagliata

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x =$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x = x + x = 2 - 3 =$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Sono sbagliati perché se si togliessero i colori non si capirebbe più nulla:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Sono sbagliati perché se si togliessero i colori non si capirebbe più nulla:

Versione sbagliata

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Sono sbagliati perché se si togliessero i colori non si capirebbe più nulla:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x = x + x = 2 - 3 = 2x = -1 = x = -\frac{1}{2}.$$

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Sono sbagliati perché se si togliessero i colori non si capirebbe più nulla:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x = x + x = 2 - 3 = 2x = -1 = x = -\frac{1}{2}.$$

(da qui seguirebbe, per esempio, $-1 = x$ e $x = -1/2$, cioè $-1 = -1/2$, che è falso.)

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Sono sbagliati perché se si togliessero i colori non si capirebbe più nulla:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x = x + x = 2 - 3 = 2x = -1 = x = -\frac{1}{2}.$$

(da qui seguirebbe, per esempio, $-1 = x$ e $x = -1/2$, cioè $-1 = -1/2$, che è falso.)

Questo accade perché l'equazione ha *già* dentro di sé un segno di uguaglianza, e se ne aggiungiamo un altro (oltretutto improprio perché semmai le equazioni sono equivalenti) incorriamo in un errore.

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x \Rightarrow x + x = 2 - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Sono sbagliati perché se si togliessero i colori non si capirebbe più nulla:

Versione sbagliata

$$x + 3 = 2 - x = x + x = 2 - 3 = 2x = -1 = x = -\frac{1}{2}.$$

(da qui seguirebbe, per esempio, $-1 = x$ e $x = -1/2$, cioè $-1 = -1/2$, che è falso.)

Questo accade perché l'equazione ha *già* dentro di sé un segno di uguaglianza, e se ne aggiungiamo un altro (oltretutto improprio perché semmai le equazioni sono equivalenti) incorriamo in un errore. In generale è sempre bene chiarire quali oggetti si dichiarano uguali (numeri, insiemi, figure geometriche, ecc.) e non “mescolare” uguaglianze fra oggetti diversi.

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*,

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- 1 L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso.

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- 1 L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso. Questo fatto è veramente banale.

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- 1 L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso. Questo fatto è veramente banale.
- 2 L'uguaglianza è *simmetrica*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B ,

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- 1 L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso. Questo fatto è veramente banale.
- 2 L'uguaglianza è *simmetrica*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B , allora l'oggetto B è uguale all'oggetto A .

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- 1 L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso. Questo fatto è veramente banale.
- 2 L'uguaglianza è *simmetrica*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B , allora l'oggetto B è uguale all'oggetto A . Questo si enuncia perché una relazione di solito tien conto dell'ordine degli oggetti.

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- 1 L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso. Questo fatto è veramente banale.
- 2 L'uguaglianza è *simmetrica*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B , allora l'oggetto B è uguale all'oggetto A . Questo si enuncia perché una relazione di solito tien conto dell'ordine degli oggetti.
- 3 L'uguaglianza è *transitiva*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B ,

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- ① L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso. Questo fatto è veramente banale.
- ② L'uguaglianza è *simmetrica*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B , allora l'oggetto B è uguale all'oggetto A . Questo si enuncia perché una relazione di solito tien conto dell'ordine degli oggetti.
- ③ L'uguaglianza è *transitiva*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B , e l'oggetto B è uguale all'oggetto C ,

L'uguaglianza come relazione

Se consideriamo l'uguaglianza come viene considerata solitamente, essa è una *relazione*, cioè qualcosa che enuncia qualcosa che “collega” due oggetti.

In questo senso essa possiede delle proprietà tipiche.

- 1 L'uguaglianza è *riflessiva*, cioè ogni oggetto è uguale a se stesso. Questo fatto è veramente banale.
- 2 L'uguaglianza è *simmetrica*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B , allora l'oggetto B è uguale all'oggetto A . Questo si enuncia perché una relazione di solito tien conto dell'ordine degli oggetti.
- 3 L'uguaglianza è *transitiva*, ossia se un oggetto A è uguale a un oggetto B , e l'oggetto B è uguale all'oggetto C , allora il primo oggetto A è uguale all'oggetto C .

Da queste proprietà si può dedurre, per esempio, la proprietà *del confronto*:

Da queste proprietà si può dedurre, per esempio, la proprietà *del confronto*:

“Due oggetti uguali ad un terzo sono uguali tra loro.”

Da queste proprietà si può dedurre, per esempio, la proprietà *del confronto*:

“Due oggetti uguali ad un terzo sono uguali tra loro.”

La dimostrazione è molto facile e potete farla per esercizio.

Da queste proprietà si può dedurre, per esempio, la proprietà *del confronto*:

“Due oggetti uguali ad un terzo sono uguali tra loro.”

La dimostrazione è molto facile e potete farla per esercizio.
Chi conosce un po' di teoria degli insiemi, sa che queste proprietà definiscono una *relazione di equivalenza*, e che essa definisce delle *classi*,

Da queste proprietà si può dedurre, per esempio, la proprietà *del confronto*:

“Due oggetti uguali ad un terzo sono uguali tra loro.”

La dimostrazione è molto facile e potete farla per esercizio.
Chi conosce un po' di teoria degli insiemi, sa che queste proprietà definiscono una *relazione di equivalenza*, e che essa definisce delle *classi*, cioè degli insiemi nei quali tutti gli oggetti sono equivalenti fra loro.

Possiamo chiederci come sono fatte le classi di equivalenza dell'uguaglianza, e questo ci riporta al significato primitivo dell'uguaglianza.

Possiamo chiederci come sono fatte le classi di equivalenza dell'uguaglianza, e questo ci riporta al significato primitivo dell'uguaglianza.

Già, ma cosa significa dire che due oggetti sono *uguali*?

Possiamo chiederci come sono fatte le classi di equivalenza dell'uguaglianza, e questo ci riporta al significato primitivo dell'uguaglianza.

Già, ma cosa significa dire che due oggetti sono *uguali*?
A ben pensarci, dire “*due oggetti uguali*” è un controsenso...

Possiamo chiederci come sono fatte le classi di equivalenza dell'uguaglianza, e questo ci riporta al significato primitivo dell'uguaglianza.

Già, ma cosa significa dire che due oggetti sono *uguali*?

A ben pensarci, dire “*due oggetti uguali*” è un controsenso...

Perché se sono *due* (nel senso che li vediamo distinti), allora non possono essere uguali.

I Latini affermavano ciò parlando di *identitas indiscernibilium* (l'identità degli indistinguibili).

I Latini affermavano ciò parlando di *identitas indiscernibilium* (l'identità degli indistinguibili).

In pratica, affermare l'identità di due oggetti consiste nel dire che non si è in grado di distinguere tra essi.

I Latini affermavano ciò parlando di *identitas indiscernibilium* (l'identità degli indistinguibili).

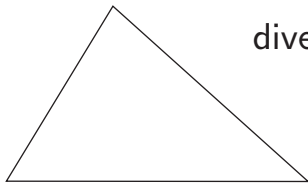
In pratica, affermare l'identità di due oggetti consiste nel dire che non si è in grado di distinguere tra essi.

Per esempio, quindi, non è corretto dire che un triangolo e “lo stesso” triangolo traslato, come in figura, sono uguali.

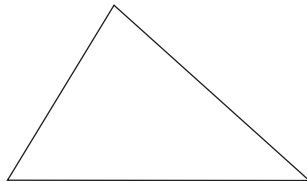
I Latini affermavano ciò parlando di *identitas indiscernibilium* (l'identità degli indistinguibili).

In pratica, affermare l'identità di due oggetti consiste nel dire che non si è in grado di distinguere tra essi.

Per esempio, quindi, non è corretto dire che un triangolo e “lo stesso” triangolo traslato, come in figura, sono uguali.



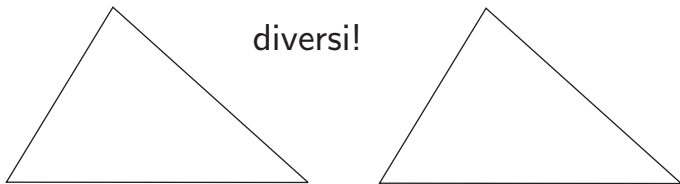
diversi!



I Latini affermavano ciò parlando di *identitas indiscernibilium* (l'identità degli indistinguibili).

In pratica, affermare l'identità di due oggetti consiste nel dire che non si è in grado di distinguere tra essi.

Per esempio, quindi, non è corretto dire che un triangolo e “lo stesso” triangolo traslato, come in figura, sono uguali.

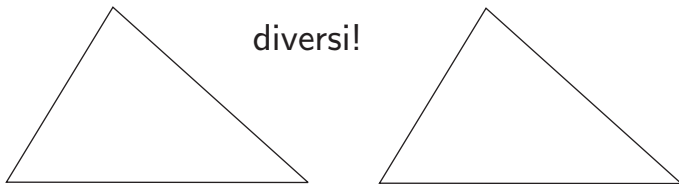


È molto più corretto chiamare “congruenti” due triangoli così fatti, perché appunto li “vediamo”

I Latini affermavano ciò parlando di *identitas indiscernibilium* (l'identità degli indistinguibili).

In pratica, affermare l'identità di due oggetti consiste nel dire che non si è in grado di distinguere tra essi.

Per esempio, quindi, non è corretto dire che un triangolo e “lo stesso” triangolo traslato, come in figura, sono uguali.



È molto più corretto chiamare “congruenti” due triangoli così fatti, perché appunto li “vediamo” (mentre due triangoli uguali sono sovrapposti).

In questo senso, dunque, solo ogni oggetto è uguale a se stesso, ed ogni classe di equivalenza contiene un solo elemento.

In questo senso, dunque, solo ogni oggetto è uguale a se stesso, ed ogni classe di equivalenza contiene un solo elemento.

Come si può vedere, si tratta di un caso estremo:

In questo senso, dunque, solo ogni oggetto è uguale a se stesso, ed ogni classe di equivalenza contiene un solo elemento.

Come si può vedere, si tratta di un caso estremo: meno di un elemento in ogni classe non si può avere, perché, come si insegna in teoria degli insiemi, le classi di equivalenza sono sempre non vuote.

In questo senso, dunque, solo ogni oggetto è uguale a se stesso, ed ogni classe di equivalenza contiene un solo elemento.

Come si può vedere, si tratta di un caso estremo: meno di un elemento in ogni classe non si può avere, perché, come si insegna in teoria degli insiemi, le classi di equivalenza sono sempre non vuote.

Ci si può allora chiedere a cosa serva l'uguaglianza, se non ha senso dire “*Due oggetti sono uguali*”.

In questo senso, dunque, solo ogni oggetto è uguale a se stesso, ed ogni classe di equivalenza contiene un solo elemento.

Come si può vedere, si tratta di un caso estremo: meno di un elemento in ogni classe non si può avere, perché, come si insegna in teoria degli insiemi, le classi di equivalenza sono sempre non vuote.

Ci si può allora chiedere a cosa serva l'uguaglianza, se non ha senso dire "*Due* oggetti sono uguali".

E questo ci porta al cuore del problema.

In questo senso, dunque, solo ogni oggetto è uguale a se stesso, ed ogni classe di equivalenza contiene un solo elemento.

Come si può vedere, si tratta di un caso estremo: meno di un elemento in ogni classe non si può avere, perché, come si insegna in teoria degli insiemi, le classi di equivalenza sono sempre non vuote.

Ci si può allora chiedere a cosa serva l'uguaglianza, se non ha senso dire "*Due* oggetti sono uguali".

E questo ci porta al cuore del problema. Ma prima una breve considerazione, in approfondimento.

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Infatti, per gli insiemi vale la proprietà (che è un assioma della teoria degli insiemi) di *equiestensione*:

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Infatti, per gli insiemi vale la proprietà (che è un assioma della teoria degli insiemi) di *equiestensione*:

Assioma di equiestensione

Se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali.

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Infatti, per gli insiemi vale la proprietà (che è un assioma della teoria degli insiemi) di *equiestensione*:

Assioma di equiestensione

Se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali.

Quindi, come ci hanno insegnato, l'insieme $\{1, 2, 3\}$ è uguale all'insieme $\{2, 1, 3\}$, perché gli elementi sono uguali.

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Infatti, per gli insiemi vale la proprietà (che è un assioma della teoria degli insiemi) di *equiestensione*:

Assioma di equiestensione

Se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali.

Quindi, come ci hanno insegnato, l'insieme $\{1, 2, 3\}$ è uguale all'insieme $\{2, 1, 3\}$, perché gli elementi sono uguali.

Il fatto che “vediamo” $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 1, 3\}$ separati non ci deve preoccupare:

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Infatti, per gli insiemi vale la proprietà (che è un assioma della teoria degli insiemi) di *equiestensione*:

Assioma di equiestensione

Se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali.

Quindi, come ci hanno insegnato, l'insieme $\{1, 2, 3\}$ è uguale all'insieme $\{2, 1, 3\}$, perché gli elementi sono uguali.

Il fatto che “vediamo” $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 1, 3\}$ separati non ci deve preoccupare: non è come per i triangoli di prima.

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Infatti, per gli insiemi vale la proprietà (che è un assioma della teoria degli insiemi) di *equiestensione*:

Assioma di equiestensione

Se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali.

Quindi, come ci hanno insegnato, l'insieme $\{1, 2, 3\}$ è uguale all'insieme $\{2, 1, 3\}$, perché gli elementi sono uguali.

Il fatto che “vediamo” $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 1, 3\}$ separati non ci deve preoccupare: non è come per i triangoli di prima. Qui $\{2, 1, 3\}$ è un *simbolo* che denota l'insieme che contiene esattamente 1, 2, 3, e niente più.

Approfondimento

Se gli oggetti uguali sono *insiemi*, allora non è semplicissimo dire che sono uguali, specie se sono infiniti.

Infatti, per gli insiemi vale la proprietà (che è un assioma della teoria degli insiemi) di *equiestensione*:

Assioma di equiestensione

Se due insiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali.

Quindi, come ci hanno insegnato, l'insieme $\{1, 2, 3\}$ è uguale all'insieme $\{2, 1, 3\}$, perché gli elementi sono uguali.

Il fatto che “vediamo” $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 1, 3\}$ separati non ci deve preoccupare: non è come per i triangoli di prima. Qui $\{2, 1, 3\}$ è un *simbolo* che denota l'insieme che contiene esattamente 1, 2, 3, e niente più.

Se ci mostrassero delle “fotografie” dei due insiemi, senza far caso all'ordine, dovremmo per forza concludere che non sappiamo distinguere i due insiemi, ossia che essi sono indistinguibili, cioè uguali.

Uguaglianza fra simboli

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante.

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

$$x = y?$$

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

$$x = y?$$

L'uguaglianza fra simboli è una cosa sottile. Essa implica che i due simboli uguali *possono essere usati indifferentemente* in uno stesso contesto (con qualche cautela).

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

$$x = y?$$

L'uguaglianza fra simboli è una cosa sottile. Essa implica che i due simboli uguali *possono essere usati indifferentemente* in uno stesso contesto (con qualche cautela). Vediamo qualche esempio.

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

$$x = y?$$

L'uguaglianza fra simboli è una cosa sottile. Essa implica che i due simboli uguali *possono essere usati indifferentemente* in uno stesso contesto (con qualche cautela). Vediamo qualche esempio.

Ipotesi: $x = 2$.

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

$$x = y?$$

L'uguaglianza fra simboli è una cosa sottile. Essa implica che i due simboli uguali *possono essere usati indifferentemente* in uno stesso contesto (con qualche cautela). Vediamo qualche esempio.

Ipotesi: $x = 2$.

Affermazione: $x = y$.

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

$$x = y?$$

L'uguaglianza fra simboli è una cosa sottile. Essa implica che i due simboli uguali *possono essere usati indifferentemente* in uno stesso contesto (con qualche cautela). Vediamo qualche esempio.

Ipotesi: $x = 2$.

Affermazione: $x = y$.

Conclusione: $y = 2$.

Uguaglianza fra simboli

E veniamo alla questione più interessante. Ma allora, tenuto conto di quanto detto finora, cosa significa

$$x = y?$$

L'uguaglianza fra simboli è una cosa sottile. Essa implica che i due simboli uguali *possono essere usati indifferentemente* in uno stesso contesto (con qualche cautela). Vediamo qualche esempio.

Ipotesi: $x = 2$.

Affermazione: $x = y$.

Conclusione: $y = 2$.

Come vedete, si tratta di una conclusione corretta.

Ipotesi: $x = 2$.

Affermazione: $x = y$.

Conclusione: $y = 2$.

Ipotesi: $x = 2$.

Affermazione: $x = y$.

Conclusione: $y = 2$.

Dato che $x = y$, abbiamo usato il simbolo y al posto del simbolo x nell'ipotesi. Questa procedura ci pare giusta, indipendentemente dalla bontà dell'ipotesi.

Ipotesi: $x = 2$.

Affermazione: $x = y$.

Conclusione: $y = 2$.

Dato che $x = y$, abbiamo usato il simbolo y al posto del simbolo x nell'ipotesi. Questa procedura ci pare giusta, indipendentemente dalla bontà dell'ipotesi. Vediamo un altro esempio.

Ipotesi: x è il più grande numero naturale.

Ipotesi: x è il più grande numero naturale.

Affermazione: $x = y$.

Ipotesi: x è il più grande numero naturale.

Affermazione: $x = y$.

Conclusione: y è il più grande numero naturale.

Ipotesi: x è il più grande numero naturale.

Affermazione: $x = y$.

Conclusione: y è il più grande numero naturale.

Che dire ora? L'Ipotesi “ x è il più grande numero naturale” sembra falsa, se x è un numero, (perché “+ infinito” non è un numero) però la deduzione sembra corretta, anche se conduce ad un'affermazione anch'essa falsa. Questo è in accordo con le leggi della Logica.

La regola or ora descritta si potrebbe chiamare *Principio di sostituzione*.

La regola or ora descritta si potrebbe chiamare *Principio di sostituzione*.

Principio di sostituzione

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi affermazione, purché non si incontri un abuso di linguaggio.

La regola or ora descritta si potrebbe chiamare *Principio di sostituzione*.

Principio di sostituzione

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi affermazione, purché non si incontri un abuso di linguaggio.

Cos'è un *abuso di linguaggio*?

La regola or ora descritta si potrebbe chiamare *Principio di sostituzione*.

Principio di sostituzione

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi affermazione, purché non si incontri un abuso di linguaggio.

Cos'è un *abuso di linguaggio*? È un caso in cui uno stesso simbolo viene usato con significati diversi.

La regola or ora descritta si potrebbe chiamare *Principio di sostituzione*.

Principio di sostituzione

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi affermazione, purché non si incontri un abuso di linguaggio.

Cos'è un *abuso di linguaggio*? È un caso in cui uno stesso simbolo viene usato con significati diversi. Vediamo un terzo esempio.

Ipotesi: $x = y$.

Ipotesi: $x = y$.

Affermazione: Esiste un x strettamente minore di y .

Ipotesi: $x = y$.

Affermazione: Esiste un x strettamente minore di y .

Conclusione: Esiste un x strettamente minore di x .

Ipotesi: $x = y$.

Affermazione: Esiste un x strettamente minore di y .

Conclusione: Esiste un x strettamente minore di x .

Come vedete, anche se l'ipotesi e l'affermazione non sembrano essere false, il risultato della sostituzione di x a y nella seconda affermazione ha condotto a qualcosa di falso.

Ipotesi: $x = y$.

Affermazione: Esiste un x strettamente minore di y .

Conclusione: Esiste un x strettamente minore di x .

Come vedete, anche se l'ipotesi e l'affermazione non sembrano essere false, il risultato della sostituzione di x a y nella seconda affermazione ha condotto a qualcosa di falso.

Questo perché quando si dice “esiste $x...$ ” in realtà si “prenota” il simbolo x per quell'affermazione, e poi non si può più usarlo per dargli un altro significato.

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso “scolastico” più frequente si ha nelle espressioni algebriche.

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso “scolastico” più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso “scolastico” più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

$$\textit{Ipotesi: } x = 2y.$$

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Conclusione: $x = 22$.

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Conclusione: $x = 22$.

Fa ridere, ma dove abbiamo sbagliato?

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Conclusione: $x = 22$.

Fa ridere, ma dove abbiamo sbagliato? Abbiamo "sostituito" il simbolo '2' uguale a y con la y dell'ipotesi, però non abbiamo tenuto conto del fatto che " $2y$ " significa $2 \cdot y$, e quindi se teniamo conto di questo, giungiamo alla conclusione corretta:

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Conclusione: $x = 22$.

Fa ridere, ma dove abbiamo sbagliato? Abbiamo "sostituito" il simbolo '2' uguale a y con la y dell'ipotesi, però non abbiamo tenuto conto del fatto che " $2y$ " significa $2 \cdot y$, e quindi se teniamo conto di questo, giungiamo alla conclusione corretta:

Ipotesi: $x = 2y$.

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Conclusione: $x = 22$.

Fa ridere, ma dove abbiamo sbagliato? Abbiamo "sostituito" il simbolo '2' uguale a y con la y dell'ipotesi, però non abbiamo tenuto conto del fatto che " $2y$ " significa $2 \cdot y$, e quindi se teniamo conto di questo, giungiamo alla conclusione corretta:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Conclusione: $x = 22$.

Fa ridere, ma dove abbiamo sbagliato? Abbiamo "sostituito" il simbolo '2' uguale a y con la y dell'ipotesi, però non abbiamo tenuto conto del fatto che " $2y$ " significa $2 \cdot y$, e quindi se teniamo conto di questo, giungiamo alla conclusione corretta:

Ipotesi: $x = 2y$.

Affermazione: $y = 2$

Conclusione: $x = 2 \cdot 2$.

Nella pratica questi problemi si incontrano nelle dimostrazioni, ma l'uso "scolastico" più frequente si ha nelle espressioni algebriche. Guardate:

$$\textit{Ipotesi: } x = 2y.$$

$$\textit{Affermazione: } y = 2$$

$$\textit{Conclusione: } x = 22.$$

Fa ridere, ma dove abbiamo sbagliato? Abbiamo "sostituito" il simbolo '2' uguale a y con la y dell'ipotesi, però non abbiamo tenuto conto del fatto che " $2y$ " significa $2 \cdot y$, e quindi se teniamo conto di questo, giungiamo alla conclusione corretta:

$$\textit{Ipotesi: } x = 2y.$$

$$\textit{Affermazione: } y = 2$$

$$\textit{Conclusione: } x = 2 \cdot 2.$$

e quindi $x = 4$.

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Principio di sostituzione delle espressioni algebriche

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi contesto, purché non si incontri un abuso di linguaggio e si rispetti la sintassi dell'espressione.

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Principio di sostituzione delle espressioni algebriche

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi contesto, purché non si incontri un abuso di linguaggio e si rispetti la sintassi dell'espressione.

La sintassi spesso richiede delle parentesi, ed ecco che non usarle può condurre ad errori:

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Principio di sostituzione delle espressioni algebriche

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi contesto, purché non si incontri un abuso di linguaggio e si rispetti la sintassi dell'espressione.

La sintassi spesso richiede delle parentesi, ed ecco che non usarle può condurre ad errori:

$$\textit{Ipotesi: } x = y + 2.$$

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Principio di sostituzione delle espressioni algebriche

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi contesto, purché non si incontri un abuso di linguaggio e si rispetti la sintassi dell'espressione.

La sintassi spesso richiede delle parentesi, ed ecco che non usarle può condurre ad errori:

Ipotesi: $x = y + 2$.

Affermazione: $xy = 6$

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Principio di sostituzione delle espressioni algebriche

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi contesto, purché non si incontri un abuso di linguaggio e si rispetti la sintassi dell'espressione.

La sintassi spesso richiede delle parentesi, ed ecco che non usarle può condurre ad errori:

Ipotesi: $x = y + 2$.

Affermazione: $xy = 6$

Conclusione: $y + 2 \cdot y = 6$.

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Principio di sostituzione delle espressioni algebriche

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi contesto, purché non si incontri un abuso di linguaggio e si rispetti la sintassi dell'espressione.

La sintassi spesso richiede delle parentesi, ed ecco che non usarle può condurre ad errori:

Ipotesi: $x = y + 2$.

Affermazione: $xy = 6$

Conclusione: $y + 2 \cdot y = 6$.

Come vedete, abbiamo rispettato il fatto che xy significasse $x \cdot y$, ma la sostituzione è sbagliata perché $2 \cdot y = 2y$ e quindi

Pertanto, scopriamo che esiste un “principio di sostituzione” anche per le espressioni algebriche:

Principio di sostituzione delle espressioni algebriche

Se due simboli letterali sono uguali, essi possono essere usati indifferentemente in qualsiasi contesto, purché non si incontri un abuso di linguaggio e si rispetti la sintassi dell'espressione.

La sintassi spesso richiede delle parentesi, ed ecco che non usarle può condurre ad errori:

Ipotesi: $x = y + 2$.

Affermazione: $xy = 6$

Conclusione: $y + 2 \cdot y = 6$.

Come vedete, abbiamo rispettato il fatto che xy significasse $x \cdot y$, ma la sostituzione è sbagliata perché $2 \cdot y = 2y$ e quindi

$$3y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

mentre deve essere 6.

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

mentre deve essere 6.

Ovviamente conosciamo la risposta:

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

mentre deve essere 6.

Ovviamente conosciamo la risposta: la sostituzione di $y + 2$ nell'espressione xy al posto di x deve essere effettuata con la parentesi:

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

mentre deve essere 6.

Ovviamente conosciamo la risposta: la sostituzione di $y + 2$ nell'espressione xy al posto di x deve essere effettuata con la parentesi:

$$\underline{(y + 2)}_x \cdot y = 8$$

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

mentre deve essere 6.

Ovviamente conosciamo la risposta: la sostituzione di $y + 2$ nell'espressione xy al posto di x deve essere effettuata con la parentesi:

$$\underline{(y + 2)}_x \cdot y = 8$$

e a questo punto tutto s'aggiusta.

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

mentre deve essere 6.

Ovviamente conosciamo la risposta: la sostituzione di $y + 2$ nell'espressione xy al posto di x deve essere effettuata con la parentesi:

$$\underline{(y + 2)}_x \cdot y = 8$$

e a questo punto tutto s'aggiusta. Usando le regole algebriche si scrive

Poi $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$, e giungiamo alla sgradevole conclusione che

$$xy = 4 \cdot 2 = 8$$

mentre deve essere 6.

Ovviamente conosciamo la risposta: la sostituzione di $y + 2$ nell'espressione xy al posto di x deve essere effettuata con la parentesi:

$$\underline{(y + 2)}_x \cdot y = 8$$

e a questo punto tutto s'aggiusta. Usando le regole algebriche si scrive

$$y^2 + 2y = 8.$$

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9,

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$,

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$,

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$, e quindi x è 4.

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$, e quindi x è 4. Se invece $y + 1$ è -3 , allora x , che è il successivo, è -2 .

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$, e quindi x è 4. Se invece $y + 1$ è -3 , allora x , che è il successivo, è -2 . In ogni caso $xy = 8$, e non abbiamo commesso errori.

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$, e quindi x è 4. Se invece $y + 1$ è -3 , allora x , che è il successivo, è -2 . In ogni caso $xy = 8$, e non abbiamo commesso errori.

Questo principio aiuta anche al contrario, a semplificare alcune espressioni.

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$, e quindi x è 4. Se invece $y + 1$ è -3 , allora x , che è il successivo, è -2 . In ogni caso $xy = 8$, e non abbiamo commesso errori.

Questo principio aiuta anche al contrario, a semplificare alcune espressioni. Per esempio

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$, e quindi x è 4. Se invece $y + 1$ è -3 , allora x , che è il successivo, è -2 . In ogni caso $xy = 8$, e non abbiamo commesso errori.

Questo principio aiuta anche al contrario, a semplificare alcune espressioni. Per esempio

$$(x + y)^2 - (x - z)^2.$$

Sommiamo 1 ad ambo i membri e troviamo

$$y^2 + 2y + 1 = 9$$

e ricordiamoci che $y^2 + 2y + 1$ è (uguale!) a $(y + 1)^2$. Allora

$$(y + 1)^2 = 9$$

e quindi il numero $y + 1$, che elevato al quadrato dà 9, può essere uguale a 3 oppure a -3 .

Se $y + 1$ è 3, allora x è uguale a $y + 2$, che è il successivo di $y + 1$, e quindi x è 4. Se invece $y + 1$ è -3 , allora x , che è il successivo, è -2 . In ogni caso $xy = 8$, e non abbiamo commesso errori.

Questo principio aiuta anche al contrario, a semplificare alcune espressioni. Per esempio

$$(x + y)^2 - (x - z)^2.$$

Se usiamo delle lettere per scrivere $x + y$ e $x - z$, così:

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2$$

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.)

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.) A questo punto risostituiamo ad A e B le loro espressioni uguali e troviamo

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.) A questo punto risostituiamo ad A e B le loro espressioni uguali e troviamo

$$\underbrace{[(x + y) + (x - z)]}_A \underbrace{[(x + y) - (x - z)]}_B.$$

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.) A questo punto risostituiamo ad A e B le loro espressioni uguali e troviamo

$$\underbrace{[(x + y) + (x - z)]}_A \underbrace{[(x + y) - (x - z)]}_B.$$

Infine svolgiamo i calcoli aprendo le parentesi (e ricambiando le quadre in tonde) e giungiamo a

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.) A questo punto risostituiamo ad A e B le loro espressioni uguali e troviamo

$$\underbrace{[(x + y) + (x - z)]}_A \underbrace{[(x + y) - (x - z)]}_B.$$

Infine svolgiamo i calcoli aprendo le parentesi (e ricambiando le quadre in tonde) e giungiamo a

$$(x + y + x - z)(x + y - x + z)$$

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.) A questo punto risostituiamo ad A e B le loro espressioni uguali e troviamo

$$\underbrace{[(x + y) + (x - z)]}_A \underbrace{[(x + y) - (x - z)]}_B.$$

Infine svolgiamo i calcoli aprendo le parentesi (e ricambiando le quadre in tonde) e giungiamo a

$$(x + y + x - z)(x + y - x + z) =$$

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.) A questo punto risostituiamo ad A e B le loro espressioni uguali e troviamo

$$\underbrace{[(x + y) + (x - z)]}_A \underbrace{[(x + y) - (x - z)]}_B.$$

Infine svolgiamo i calcoli aprendo le parentesi (e ricambiando le quadre in tonde) e giungiamo a

$$(x + y + x - z)(x + y - x + z) = (2x + y - z)(y + z)$$

$$A = x + y, \quad B = x - z$$

possiamo sostituire e trovare il prodotto notevole

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(notate che non ho trascritto le parentesi, ma anche $(A^2) - (B^2)$ sarebbe andato bene.) A questo punto risostituiamo ad A e B le loro espressioni uguali e troviamo

$$\underbrace{[(x + y) + (x - z)]}_A \underbrace{[(x + y) - (x - z)]}_B.$$

Infine svolgiamo i calcoli aprendo le parentesi (e ricambiando le quadre in tonde) e giungiamo a

$$(x + y + x - z)(x + y - x + z) = (2x + y - z)(y + z)$$

che conclude il calcolo.