Trigonometria e triangoli

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Obiettivi

La trigonometria, così ricca di formule e di teoremi, è uno strumento potentissimo per l'antico problema di dover **risolvere un triangolo**, ovvero di trovare gli elementi di un triangolo a partire da alcuni elementi noti. Per elementi di un triangolo intendiamo le misure dei suoi lati e dei suoi angoli, quindi un triangolo ha sei elementi.

Obiettivi

La trigonometria, così ricca di formule e di teoremi, è uno strumento potentissimo per l'antico problema di dover **risolvere un triangolo**, ovvero di trovare gli elementi di un triangolo a partire da alcuni elementi noti. Per elementi di un triangolo intendiamo le misure dei suoi lati e dei suoi angoli, quindi un triangolo ha sei elementi.
Ad esempio:

dato un triangolo di lati 3 e 5 e angolo compreso di $60°$, quanto misura il terzo lato?

Obiettivi

La trigonometria, così ricca di formule e di teoremi, è uno strumento potentissimo per l'antico problema di dover **risolvere un triangolo**, ovvero di trovare gli elementi di un triangolo a partire da alcuni elementi noti. Per elementi di un triangolo intendiamo le misure dei suoi lati e dei suoi angoli, quindi un triangolo ha sei elementi.
Ad esempio:

dato un triangolo di lati 3 e 5 e angolo compreso di $60°$, quanto misura il terzo lato?

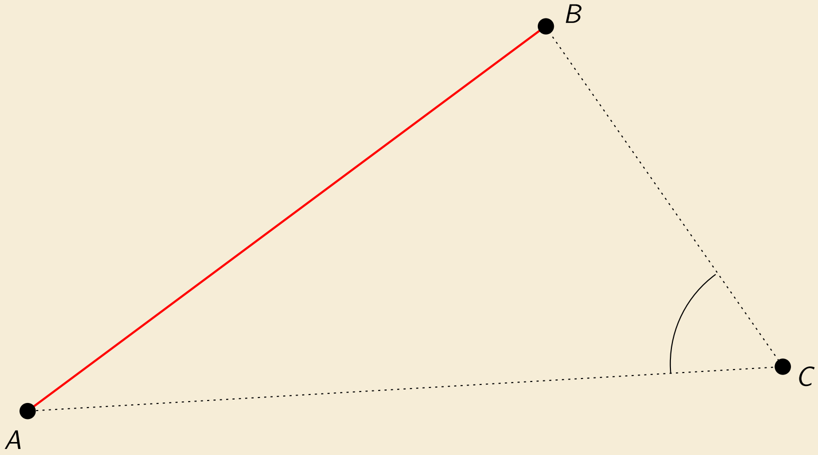
Problemi di questo tipo sono di solito molto legati alle applicazioni, soprattutto nel campo della topografia (ovvero delle misurazioni legate a rilievi di terreni).

Obiettivi

La trigonometria, così ricca di formule e di teoremi, è uno strumento potentissimo per l'antico problema di dover **risolvere un triangolo**, ovvero di trovare gli elementi di un triangolo a partire da alcuni elementi noti. Per elementi di un triangolo intendiamo le misure dei suoi lati e dei suoi angoli, quindi un triangolo ha sei elementi.
Ad esempio:

dato un triangolo di lati 3 e 5 e angolo compreso di 60°, quanto misura il terzo lato?

Problemi di questo tipo sono di solito molto legati alle applicazioni, soprattutto nel campo della topografia (ovvero delle misurazioni legate a rilievi di terreni).
Infatti la distanza tra due punti A e B, magari tra loro inaccessibili, può essere calcolata conoscendo le distanze di A e B da un terzo punto C e l'angolo formato dalle rette AC e BC.



$\overline{AC} = 5, \quad \overline{BC} = 3, \quad A\widehat{C}B = 60^\circ, \qquad \overline{AB} = ??$

Che cosa serve

In generale, per risolvere questo tipo di problemi, avremo bisogno soprattutto di due teoremi: il **teorema dei seni** e il **teorema del coseno (o di Carnot)**.

Che cosa serve

In generale, per risolvere questo tipo di problemi, avremo bisogno soprattutto di due teoremi: il **teorema dei seni** e il **teorema del coseno (o di Carnot)**.
Vedremo che, grazie a questi due teoremi, saremo in grado di risolvere il seguente:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Che cosa serve

In generale, per risolvere questo tipo di problemi, avremo bisogno soprattutto di due teoremi: il **teorema dei seni** e il **teorema del coseno (o di Carnot)**.
Vedremo che, grazie a questi due teoremi, saremo in grado di risolvere il seguente:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Avremo quindi quattro gruppi di problemi:

Che cosa serve

In generale, per risolvere questo tipo di problemi, avremo bisogno soprattutto di due teoremi: il **teorema dei seni** e il **teorema del coseno (o di Carnot)**.
Vedremo che, grazie a questi due teoremi, saremo in grado di risolvere il seguente:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Avremo quindi quattro gruppi di problemi:

1. sono noti i tre lati;

Che cosa serve

In generale, per risolvere questo tipo di problemi, avremo bisogno soprattutto di due teoremi: il **teorema dei seni** e il **teorema del coseno (o di Carnot)**.
Vedremo che, grazie a questi due teoremi, saremo in grado di risolvere il seguente:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Avremo quindi quattro gruppi di problemi:

1. sono noti i tre lati;
2. sono noti due lati e l'angolo compreso;

Che cosa serve

In generale, per risolvere questo tipo di problemi, avremo bisogno soprattutto di due teoremi: il **teorema dei seni** e il **teorema del coseno (o di Carnot)**.
Vedremo che, grazie a questi due teoremi, saremo in grado di risolvere il seguente:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Avremo quindi quattro gruppi di problemi:

1. sono noti i tre lati;
2. sono noti due lati e l'angolo compreso;
3. sono noti due lati e un angolo opposto;

Che cosa serve

In generale, per risolvere questo tipo di problemi, avremo bisogno soprattutto di due teoremi: il **teorema dei seni** e il **teorema del coseno (o di Carnot)**.
Vedremo che, grazie a questi due teoremi, saremo in grado di risolvere il seguente:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Avremo quindi quattro gruppi di problemi:

1. sono noti i tre lati;
2. sono noti due lati e l'angolo compreso;
3. sono noti due lati e un angolo opposto;
4. sono noti un lato e due angoli.

Notazione

Fissiamo una volta per tutte un triangolo, chiamando a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli.

Notazione

Fissiamo una volta per tutte un triangolo, chiamando a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli.
Stabiliamo che:

- a è il lato opposto ad α

Notazione

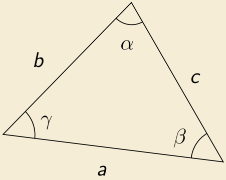
Fissiamo una volta per tutte un triangolo, chiamando a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli.
Stabiliamo che:

- a è il lato opposto ad α
- b è il lato opposto a β

Notazione

Fissiamo una volta per tutte un triangolo, chiamando a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli.
Stabiliamo che:

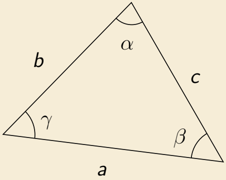
- a è il lato opposto ad α
- b è il lato opposto a β
- c è il lato opposto a γ



Notazione

Fissiamo una volta per tutte un triangolo, chiamando a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli.
Stabiliamo che:

- a è il lato opposto ad α
- b è il lato opposto a β
- c è il lato opposto a γ



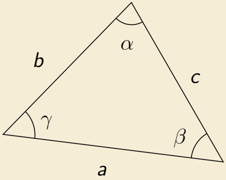
Naturalmente, essendo tutti elementi di un triangolo, questi valori avranno dei vincoli; in particolare, è chiaro che

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Notazione

Fissiamo una volta per tutte un triangolo, chiamando a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli.
Stabiliamo che:

- a è il lato opposto ad α
- b è il lato opposto a β
- c è il lato opposto a γ



Naturalmente, essendo tutti elementi di un triangolo, questi valori avranno dei vincoli; in particolare, è chiaro che

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

e che

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$$

I triangoli rettangoli

Nel caso di triangoli rettangoli, poiché si sa già che c'è un angolo retto, è sufficiente conoscere altri due elementi, tra cui almeno un lato.

I triangoli rettangoli

Nel caso di triangoli rettangoli, poiché si sa già che c'è un angolo retto, è sufficiente conoscere altri due elementi, tra cui almeno un lato.
Supponiamo che c sia l'ipotenusa, e quindi $\gamma = 90°$. Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2, \quad \alpha + \beta = 90°$
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{cotg} \alpha.$

I triangoli rettangoli

Nel caso di triangoli rettangoli, poiché si sa già che c'è un angolo retto, è sufficiente conoscere altri due elementi, tra cui almeno un lato.
Supponiamo che c sia l'ipotenusa, e quindi $\gamma = 90°$. Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2, \quad \alpha + \beta = 90°$
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{cotg} \alpha.$

La prima formula è il Teorema di Pitagora e la somma degli angoli interni, le altre si ricavano direttamente dalla definizione delle funzioni trigonometriche.

I triangoli rettangoli

Nel caso di triangoli rettangoli, poiché si sa già che c'è un angolo retto, è sufficiente conoscere altri due elementi, tra cui almeno un lato.
Supponiamo che c sia l'ipotenusa, e quindi $\gamma = 90°$. Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2, \quad \alpha + \beta = 90°$
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{cotg} \alpha.$

La prima formula è il Teorema di Pitagora e la somma degli angoli interni, le altre si ricavano direttamente dalla definizione delle funzioni trigonometriche.
Con queste formule, possiamo **risolvere** un triangolo rettangolo.

I triangoli rettangoli

Nel caso di triangoli rettangoli, poiché si sa già che c'è un angolo retto, è sufficiente conoscere altri due elementi, tra cui almeno un lato.
Supponiamo che c sia l'ipotenusa, e quindi $\gamma = 90°$. Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2, \quad \alpha + \beta = 90°$
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{cotg} \alpha.$

La prima formula è il Teorema di Pitagora e la somma degli angoli interni, le altre si ricavano direttamente dalla definizione delle funzioni trigonometriche.
Con queste formule, possiamo **risolvere** un triangolo rettangolo.
Ad esempio, se conosciamo a e α, ricaviamo subito

$$\beta = 90° - \alpha,$$

I triangoli rettangoli

Nel caso di triangoli rettangoli, poiché si sa già che c'è un angolo retto, è sufficiente conoscere altri due elementi, tra cui almeno un lato.
Supponiamo che c sia l'ipotenusa, e quindi $\gamma = 90°$. Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2, \quad \alpha + \beta = 90°$
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{cotg} \alpha$.

La prima formula è il Teorema di Pitagora e la somma degli angoli interni, le altre si ricavano direttamente dalla definizione delle funzioni trigonometriche.
Con queste formule, possiamo **risolvere** un triangolo rettangolo.
Ad esempio, se conosciamo a e α, ricaviamo subito

$$\beta = 90° - \alpha, \qquad b = a \operatorname{cotg} \alpha,$$

I triangoli rettangoli

Nel caso di triangoli rettangoli, poiché si sa già che c'è un angolo retto, è sufficiente conoscere altri due elementi, tra cui almeno un lato.
Supponiamo che c sia l'ipotenusa, e quindi $\gamma = 90°$. Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2, \quad \alpha + \beta = 90°$
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{cotg} \alpha.$

La prima formula è il Teorema di Pitagora e la somma degli angoli interni, le altre si ricavano direttamente dalla definizione delle funzioni trigonometriche.
Con queste formule, possiamo **risolvere** un triangolo rettangolo.
Ad esempio, se conosciamo a e α, ricaviamo subito

$$\beta = 90° - \alpha, \qquad b = a \operatorname{cotg} \alpha, \qquad c = a / \operatorname{sen} \alpha.$$

Esercizio sui triangoli rettangoli

Esercizio

Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 4 e l'angolo adiacente a questo cateto di 35°. Si risolva il triangolo.

Esercizio sui triangoli rettangoli

Esercizio

Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 4 e l'angolo adiacente a questo cateto di 35°. Si risolva il triangolo.

Denotando con a il cateto lungo 4 e con b l'altro cateto, si ha $\beta = 35^\circ$, e dunque

Esercizio

Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 4 e l'angolo adiacente a questo cateto di 35°. Si risolva il triangolo.

Denotando con a il cateto lungo 4 e con b l'altro cateto, si ha $\beta = 35^\circ$, e dunque

$$b = 4 \operatorname{tg} 35^\circ \simeq 1,261 \qquad c = \frac{4}{\cos 35^\circ} \simeq 4,194.$$

Esercizio sui triangoli rettangoli

Esercizio

Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 4 e l'angolo adiacente a questo cateto di $35°$. Si risolva il triangolo.

Denotando con a il cateto lungo 4 e con b l'altro cateto, si ha $\beta = 35°$, e dunque

$$b = 4 \,\mathrm{tg}\, 35° \simeq 1,261 \qquad c = \frac{4}{\cos 35°} \simeq 4,194.$$

Inoltre $\alpha = 90° - 35° = 55°$.

Esercizio sui triangoli rettangoli

Esercizio

Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 4 e l'angolo adiacente a questo cateto di 35°. Si risolva il triangolo.

Denotando con a il cateto lungo 4 e con b l'altro cateto, si ha $\beta = 35^\circ$, e dunque

$$b = 4 \operatorname{tg} 35^\circ \simeq 1,261 \qquad c = \frac{4}{\cos 35^\circ} \simeq 4,194.$$

Inoltre $\alpha = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.
Quindi il triangolo ha elementi:

$$a = 4, \quad b = 1,261, \quad c = 4,194, \quad \alpha = 55^\circ, \quad \beta = 35^\circ, \quad \gamma = 90^\circ.$$

Il teorema dei seni

Vediamo ora un'importante proprietà di triangoli *qualsiasi*.

Teorema dei seni

In un triangolo, i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, ovvero

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Il teorema dei seni

Vediamo ora un'importante proprietà di triangoli *qualsiasi*.

Teorema dei seni

In un triangolo, i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, ovvero

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

La dimostrazione si appoggia sul **teorema della corda**, ovvero sul fatto che in una circonferenza di raggio R la corda che forma un angolo alla circonferenza ampio α ha lunghezza $2R\operatorname{sen}\alpha$:

Il teorema dei seni

Vediamo ora un'importante proprietà di triangoli *qualsiasi*.

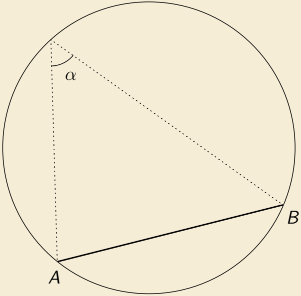
Teorema dei seni

In un triangolo, i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, ovvero

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

La dimostrazione si appoggia sul **teorema della corda**, ovvero sul fatto che in una circonferenza di raggio R la corda che forma un angolo alla circonferenza ampio α ha lunghezza $2R\operatorname{sen}\alpha$:

$$\overline{AB} = 2R\operatorname{sen}\alpha.$$



Il teorema del coseno

Il **teorema del coseno**, detto anche **teorema di Carnot**, è una sorta di generalizzazione del teorema di Pitagora, applicabile a un triangolo qualsiasi.

Il teorema del coseno

Il **teorema del coseno**, detto anche **teorema di Carnot**, è una sorta di generalizzazione del teorema di Pitagora, applicabile a un triangolo qualsiasi.
Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso tra i due lati, il teorema del coseno fornisce la misura del terzo lato.

Il teorema del coseno

Il **teorema del coseno**, detto anche **teorema di Carnot**, è una sorta di generalizzazione del teorema di Pitagora, applicabile a un triangolo qualsiasi.
Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso tra i due lati, il teorema del coseno fornisce la misura del terzo lato.
Lazare Carnot è stato un matematico, fisico e generale francese della fine del 1700. Il teorema del coseno è tradizionalmente attribuito a lui, anche se pare che sia stato formalizzato per la prima volta da François Viète alla fine del 1500.

Il teorema del coseno

Il **teorema del coseno**, detto anche **teorema di Carnot**, è una sorta di generalizzazione del teorema di Pitagora, applicabile a un triangolo qualsiasi.
Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso tra i due lati, il teorema del coseno fornisce la misura del terzo lato.
Lazare Carnot è stato un matematico, fisico e generale francese della fine del 1700. Il teorema del coseno è tradizionalmente attribuito a lui, anche se pare che sia stato formalizzato per la prima volta da François Viète alla fine del 1500.
Si noti che già **Euclide**, nel III secolo a.C., dava una formulazione di questo teorema, anche se la sua versione non usava il linguaggio della trigonometria.

Il teorema del coseno

Il **teorema del coseno**, detto anche **teorema di Carnot**, è una sorta di generalizzazione del teorema di Pitagora, applicabile a un triangolo qualsiasi.
Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso tra i due lati, il teorema del coseno fornisce la misura del terzo lato.
Lazare Carnot è stato un matematico, fisico e generale francese della fine del 1700. Il teorema del coseno è tradizionalmente attribuito a lui, anche se pare che sia stato formalizzato per la prima volta da François Viète alla fine del 1500.
Si noti che già **Euclide**, nel III secolo a.C., dava una formulazione di questo teorema, anche se la sua versione non usava il linguaggio della trigonometria.
Ma veniamo finalmente all'enunciato del teorema.

Il teorema del coseno

Teorema del coseno

Denotando con a, b, c le misure dei lati di un triangolo, e con α, β, γ le misure dei rispettivi angoli opposti, si ha

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Il teorema del coseno

Teorema del coseno

Denotando con a, b, c le misure dei lati di un triangolo, e con α, β, γ le misure dei rispettivi angoli opposti, si ha

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Come si vede, il teorema del coseno "contiene" al suo interno il teorema di Pitagora: se $\gamma = 90^\circ$, cioè il triangolo è rettangolo, si ha $\cos\gamma = 0$ e dunque $c^2 = a^2 + b^2$.

Il teorema del coseno

Teorema del coseno

Denotando con a, b, c le misure dei lati di un triangolo, e con α, β, γ le misure dei rispettivi angoli opposti, si ha

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Come si vede, il teorema del coseno "contiene" al suo interno il teorema di Pitagora: se $\gamma = 90^\circ$, cioè il triangolo è rettangolo, si ha $\cos\gamma = 0$ e dunque $c^2 = a^2 + b^2$.
Non dimenticate che il "doppio prodotto" nel teorema del coseno ha davanti il segno negativo. In particolare:

Il teorema del coseno

Teorema del coseno

Denotando con a, b, c le misure dei lati di un triangolo, e con α, β, γ le misure dei rispettivi angoli opposti, si ha

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Come si vede, il teorema del coseno "contiene" al suo interno il teorema di Pitagora: se $\gamma = 90°$, cioè il triangolo è rettangolo, si ha $\cos\gamma = 0$ e dunque $c^2 = a^2 + b^2$.

Non dimenticate che il "doppio prodotto" nel teorema del coseno ha davanti il segno negativo. In particolare:

- se $\gamma < 90°$, ovvero se l'angolo compreso è **acuto**, il lato c sarà più corto dell'ipotenusa, e quindi bisogna togliere qualcosa alla somma dei quadrati;

Il teorema del coseno

Teorema del coseno

Denotando con a, b, c le misure dei lati di un triangolo, e con α, β, γ le misure dei rispettivi angoli opposti, si ha

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Come si vede, il teorema del coseno "contiene" al suo interno il teorema di Pitagora: se $\gamma = 90°$, cioè il triangolo è rettangolo, si ha $\cos\gamma = 0$ e dunque $c^2 = a^2 + b^2$.
Non dimenticate che il "doppio prodotto" nel teorema del coseno ha davanti il segno negativo. In particolare:

- se $\gamma < 90°$, ovvero se l'angolo compreso è **acuto**, il lato c sarà più corto dell'ipotenusa, e quindi bisogna togliere qualcosa alla somma dei quadrati;
- se $\gamma > 90°$, ovvero se l'angolo compreso è **ottuso**, allora $\cos\gamma < 0$, e quindi il lato c sarà più lungo dell'ipotenusa.

Risolvere un triangolo

Finalmente abbiamo gli strumenti giusti per affrontare il problema che abbiamo enunciato all'inizio di questa lezione:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Risolvere un triangolo

Finalmente abbiamo gli strumenti giusti per affrontare il problema che abbiamo enunciato all'inizio di questa lezione:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Ricordiamo che abbiamo quattro casi possibili:

Risolvere un triangolo

Finalmente abbiamo gli strumenti giusti per affrontare il problema che abbiamo enunciato all'inizio di questa lezione:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Ricordiamo che abbiamo quattro casi possibili:

1. sono noti i tre lati;

Risolvere un triangolo

Finalmente abbiamo gli strumenti giusti per affrontare il problema che abbiamo enunciato all'inizio di questa lezione:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Ricordiamo che abbiamo quattro casi possibili:

1. sono noti i tre lati;
2. sono noti due lati e l'angolo compreso;

Risolvere un triangolo

Finalmente abbiamo gli strumenti giusti per affrontare il problema che abbiamo enunciato all'inizio di questa lezione:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Ricordiamo che abbiamo quattro casi possibili:

1. sono noti i tre lati;
2. sono noti due lati e l'angolo compreso;
3. sono noti due lati e un angolo opposto;

Risolvere un triangolo

Finalmente abbiamo gli strumenti giusti per affrontare il problema che abbiamo enunciato all'inizio di questa lezione:

Problema

Dati tre elementi di un triangolo, tra cui almeno un lato, determinarne gli altri tre.

Ricordiamo che abbiamo quattro casi possibili:

1. sono noti i tre lati;
2. sono noti due lati e l'angolo compreso;
3. sono noti due lati e un angolo opposto;
4. sono noti un lato e due angoli.

Il caso dei tre lati

Cominciamo dal caso 1, in cui sono noti i tre lati.
Quindi conosciamo a, b, c e vogliamo trovare α, β, γ.

Il caso dei tre lati

Cominciamo dal caso 1, in cui sono noti i tre lati.
Quindi conosciamo a, b, c e vogliamo trovare α, β, γ.
Questo caso è presto risolto col teorema del coseno: dalla formula

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

si può ricavare il coseno dell'angolo γ:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

e quindi si trova l'angolo γ.

Il caso dei tre lati

Cominciamo dal caso 1, in cui sono noti i tre lati.
Quindi conosciamo a, b, c e vogliamo trovare α, β, γ.
Questo caso è presto risolto col teorema del coseno: dalla formula

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

si può ricavare il coseno dell'angolo γ:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

e quindi si trova l'angolo γ. Allo stesso modo

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Il caso dei tre lati

Cominciamo dal caso 1, in cui sono noti i tre lati.
Quindi conosciamo a, b, c e vogliamo trovare α, β, γ.
Questo caso è presto risolto col teorema del coseno: dalla formula

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

si può ricavare il coseno dell'angolo γ:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

e quindi si trova l'angolo γ. Allo stesso modo

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Infine si trova $\beta = 180° - \alpha - \gamma$.

Il caso dei tre lati

Cominciamo dal caso 1, in cui sono noti i tre lati.
Quindi conosciamo a, b, c e vogliamo trovare α, β, γ.
Questo caso è presto risolto col teorema del coseno: dalla formula

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

si può ricavare il coseno dell'angolo γ:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

e quindi si trova l'angolo γ. Allo stesso modo

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Infine si trova $\beta = 180° - \alpha - \gamma$.

Si noti che le equazioni goniometriche sono risolubili solo se i lati *possono* formare un triangolo (cioè se ognuno è minore della somma degli altri due). Altrimenti almeno un'equazione risulta impossibile.

Esempio nel caso dei tre lati

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

Esempio nel caso dei tre lati

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Si ha

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$$

Esempio nel caso dei tre lati

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Si ha

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ.$$

Esempio nel caso dei tre lati

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Si ha

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ.$$

Allo stesso modo

$$\cos\alpha = \frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Esempio nel caso dei tre lati

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Si ha

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ.$$

Allo stesso modo

$$\cos\alpha = \frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq 36,87^\circ$$

(usando una calcolatrice scientifica).

Esempio nel caso dei tre lati

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Si ha

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ.$$

Allo stesso modo

$$\cos\alpha = \frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq 36,87^\circ$$

(usando una calcolatrice scientifica).
Infine

$$\beta \simeq 180^\circ - 90^\circ - 36,87^\circ = 53,13^\circ.$$

Esempio nel caso dei tre lati

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Si ha

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ.$$

Allo stesso modo

$$\cos\alpha = \frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq 36,87^\circ$$

(usando una calcolatrice scientifica).
Infine

$$\beta \simeq 180^\circ - 90^\circ - 36,87^\circ = 53,13^\circ.$$

In particolare, questo è un triangolo rettangolo.

Il caso dei due lati e l'angolo compreso

Passiamo al caso 2, in cui sono noti due lati a, b e l'angolo compreso γ.

Il caso dei due lati e l'angolo compreso

Passiamo al caso 2, in cui sono noti due lati a, b e l'angolo compreso γ.
Vogliamo trovare c, α, β.

Il caso dei due lati e l'angolo compreso

Passiamo al caso 2, in cui sono noti due lati a, b e l'angolo compreso γ.
Vogliamo trovare c, α, β.
Dal teorema del coseno possiamo immediatamente trovare c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Il caso dei due lati e l'angolo compreso

Passiamo al caso 2, in cui sono noti due lati a, b e l'angolo compreso γ.
Vogliamo trovare c, α, β.
Dal teorema del coseno possiamo immediatamente trovare c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

A questo punto conosciamo tutti e tre i lati, e possiamo agire come nel punto precedente per trovare gli angoli.

Il caso dei due lati e l'angolo compreso

Passiamo al caso 2, in cui sono noti due lati a, b e l'angolo compreso γ.
Vogliamo trovare c, α, β.
Dal teorema del coseno possiamo immediatamente trovare c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

A questo punto conosciamo tutti e tre i lati, e possiamo agire come nel punto precedente per trovare gli angoli.
In realtà, poiché l'angolo γ è già noto, basta trovare α mediante

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Il caso dei due lati e l'angolo compreso

Passiamo al caso 2, in cui sono noti due lati a, b e l'angolo compreso γ.
Vogliamo trovare c, α, β.
Dal teorema del coseno possiamo immediatamente trovare c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

A questo punto conosciamo tutti e tre i lati, e possiamo agire come nel punto precedente per trovare gli angoli.
In realtà, poiché l'angolo γ è già noto, basta trovare α mediante

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

e poi si trova $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$.

Esempio nel caso dei due lati e l'angolo compreso

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$.

Esempio nel caso dei due lati e l'angolo compreso

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$.
Troviamo c:

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos 60^\circ} = \sqrt{45 - 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \simeq 5,2$$

Esempio nel caso dei due lati e l'angolo compreso

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60°$.
Troviamo c:

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos 60°} = \sqrt{45 - 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \simeq 5,2$$

Quindi troviamo α:

$$\cos \alpha = \frac{36 + 27 - 9}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esempio nel caso dei due lati e l'angolo compreso

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60°$.
Troviamo c:

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos 60°} = \sqrt{45 - 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \simeq 5,2$$

Quindi troviamo α:

$$\cos\alpha = \frac{36 + 27 - 9}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°.$$

Esempio nel caso dei due lati e l'angolo compreso

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$.
Troviamo c:

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos 60^\circ} = \sqrt{45 - 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \simeq 5,2$$

Quindi troviamo α:

$$\cos\alpha = \frac{36 + 27 - 9}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ.$$

Infine $\beta = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

Esempio nel caso dei due lati e l'angolo compreso

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$.
Troviamo c:

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos 60^\circ} = \sqrt{45 - 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \simeq 5,2$$

Quindi troviamo α:

$$\cos\alpha = \frac{36 + 27 - 9}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ.$$

Infine $\beta = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.
Anche in questo caso troviamo un triangolo rettangolo.

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Passiamo al caso 3, in cui sono noti due lati a, b e un angolo opposto, diciamo α.

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Passiamo al caso 3, in cui sono noti due lati a, b e un angolo opposto, diciamo α.
Stavolta usiamo il teorema dei seni tra a, b, α, β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Passiamo al caso 3, in cui sono noti due lati a, b e un angolo opposto, diciamo α.
Stavolta usiamo il teorema dei seni tra a, b, α, β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha$$

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Passiamo al caso 3, in cui sono noti due lati a, b e un angolo opposto, diciamo α.
Stavolta usiamo il teorema dei seni tra a, b, α, β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha$$

da cui possiamo trovare β.

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Passiamo al caso 3, in cui sono noti due lati a, b e un angolo opposto, diciamo α.
Stavolta usiamo il teorema dei seni tra a, b, α, β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha$$

da cui possiamo trovare β.
Qui dobbiamo fare attenzione: intanto i dati non possono essere assegnati a caso, perché deve essere $\boxed{b \operatorname{sen}\alpha \leq a}$, altrimenti l'equazione per β non ha soluzione.

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Passiamo al caso 3, in cui sono noti due lati a, b e un angolo opposto, diciamo α.
Stavolta usiamo il teorema dei seni tra a, b, α, β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha$$

da cui possiamo trovare β.
Qui dobbiamo fare attenzione: intanto i dati non possono essere assegnati a caso, perché deve essere $\boxed{b \operatorname{sen}\alpha \leq a}$, altrimenti l'equazione per β non ha soluzione.
Quando l'equazione è risolubile, in generale avremo due soluzioni possibili per β, una come angolo acuto e una come angolo ottuso.

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Guardiamo come è fatto α: se α è ottuso, allora β dovrà per forza essere acuto (perché un triangolo non può avere due angoli ottusi!) e questo seleziona una sola possibilità per β, e solo nel caso $b \operatorname{sen} \alpha < a$.

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Guardiamo come è fatto α: se α è ottuso, allora β dovrà per forza essere acuto (perché un triangolo non può avere due angoli ottusi!) e questo seleziona una sola possibilità per β, e solo nel caso $b \operatorname{sen} \alpha < a$.
Se invece α è acuto, allora si aprono più possibilità:

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Guardiamo come è fatto α: se α è ottuso, allora β dovrà per forza essere acuto (perché un triangolo non può avere due angoli ottusi!) e questo seleziona una sola possibilità per β, e solo nel caso $b \operatorname{sen} \alpha < a$.

Se invece α è acuto, allora si aprono più possibilità:

- se $b < a$ possiamo accettare solo la soluzione $\beta < 90^\circ$ (altrimenti ci verrebbe una somma degli angoli più grande di 180°);

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Guardiamo come è fatto α: se α è ottuso, allora β dovrà per forza essere acuto (perché un triangolo non può avere due angoli ottusi!) e questo seleziona una sola possibilità per β, e solo nel caso $b \operatorname{sen} \alpha < a$.
Se invece α è acuto, allora si aprono più possibilità:

- se $b < a$ possiamo accettare solo la soluzione $\beta < 90°$ (altrimenti ci verrebbe una somma degli angoli più grande di $180°$);
- se invece $b > a$ (ma comunque $b \operatorname{sen} \alpha \leq a$), allora il problema ha due soluzioni: una con β acuto e l'altra con β ottuso.

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Guardiamo come è fatto α: se α è ottuso, allora β dovrà per forza essere acuto (perché un triangolo non può avere due angoli ottusi!) e questo seleziona una sola possibilità per β, e solo nel caso $b \operatorname{sen} \alpha < a$.
Se invece α è acuto, allora si aprono più possibilità:

- se $b < a$ possiamo accettare solo la soluzione $\beta < 90°$ (altrimenti ci verrebbe una somma degli angoli più grande di $180°$);
- se invece $b > a$ (ma comunque $b \operatorname{sen} \alpha \leq a$), allora il problema ha due soluzioni: una con β acuto e l'altra con β ottuso.

Fissato comunque uno dei possibili valori di β, gli altri elementi si trovano facilmente:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Guardiamo come è fatto α: se α è ottuso, allora β dovrà per forza essere acuto (perché un triangolo non può avere due angoli ottusi!) e questo seleziona una sola possibilità per β, e solo nel caso $b \operatorname{sen} \alpha < a$.
Se invece α è acuto, allora si aprono più possibilità:

- se $b < a$ possiamo accettare solo la soluzione $\beta < 90^\circ$ (altrimenti ci verrebbe una somma degli angoli più grande di 180°);
- se invece $b > a$ (ma comunque $b \operatorname{sen} \alpha \leq a$), allora il problema ha due soluzioni: una con β acuto e l'altra con β ottuso.

Fissato comunque uno dei possibili valori di β, gli altri elementi si trovano facilmente:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

e dal teorema dei seni

$$c = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} a = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \alpha} a$$

Il caso dei due lati e un angolo opposto

Guardiamo come è fatto α: se α è ottuso, allora β dovrà per forza essere acuto (perché un triangolo non può avere due angoli ottusi!) e questo seleziona una sola possibilità per β, e solo nel caso $b \operatorname{sen} \alpha < a$.
Se invece α è acuto, allora si aprono più possibilità:

- se $b < a$ possiamo accettare solo la soluzione $\beta < 90^\circ$ (altrimenti ci verrebbe una somma degli angoli più grande di 180°);
- se invece $b > a$ (ma comunque $b \operatorname{sen} \alpha \leq a$), allora il problema ha due soluzioni: una con β acuto e l'altra con β ottuso.

Fissato comunque uno dei possibili valori di β, gli altri elementi si trovano facilmente:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

e dal teorema dei seni

$$c = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} a = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \alpha} a$$

(o anche $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ dal teorema del coseno).

Esempio nel caso dei due lati e un angolo opposto

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.

Esempio nel caso dei due lati e un angolo opposto

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30^\circ$.
Dal teorema dei seni abbiamo

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{3}\operatorname{sen}30^\circ = \frac{5}{6}$$

Esempio nel caso dei due lati e un angolo opposto

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.
Dal teorema dei seni abbiamo

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{5}{3} \operatorname{sen} 30° = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \beta \simeq 56,44° \text{ oppure } \beta \simeq 123,56°.$$

Poiché α è acuto, entrambe le soluzioni sono accettabili.

Esempio nel caso dei due lati e un angolo opposto

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.
Dal teorema dei seni abbiamo

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{3}\operatorname{sen}30° = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \beta \simeq 56,44° \text{ oppure } \beta \simeq 123,56°.$$

Poiché α è acuto, entrambe le soluzioni sono accettabili.

Se $\beta \simeq 56,44°$, si ha $\gamma \simeq 180° - 30° - 56,44° = 93,56°$

Esempio nel caso dei due lati e un angolo opposto

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30^\circ$.
Dal teorema dei seni abbiamo

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{3}\operatorname{sen}30^\circ = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \beta \simeq 56,44^\circ \text{ oppure } \beta \simeq 123,56^\circ.$$

Poiché α è acuto, entrambe le soluzioni sono accettabili.

Se $\beta \simeq 56,44^\circ$, si ha $\gamma \simeq 180^\circ - 30^\circ - 56,44^\circ = 93,56^\circ$ e

$$c = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(30^\circ + 56,44^\circ)}{\operatorname{sen}30^\circ} \simeq 5,99.$$

Esempio nel caso dei due lati e un angolo opposto

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.
Dal teorema dei seni abbiamo

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{3}\operatorname{sen}30° = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \beta \simeq 56,44° \text{ oppure } \beta \simeq 123,56°.$$

Poiché α è acuto, entrambe le soluzioni sono accettabili.

Se $\beta \simeq 56,44°$, si ha $\gamma \simeq 180° - 30° - 56,44° = 93,56°$ e

$$c = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(30° + 56,44°)}{\operatorname{sen}30°} \simeq 5,99.$$

Se $\beta \simeq 123,56°$, si ha $\gamma \simeq 180° - 30° - 123,56° = 26,44°$

Esempio nel caso dei due lati e un angolo opposto

Ad esempio: sia $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.
Dal teorema dei seni abbiamo

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{3}\operatorname{sen}30° = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \beta \simeq 56,44° \text{ oppure } \beta \simeq 123,56°.$$

Poiché α è acuto, entrambe le soluzioni sono accettabili.

Se $\beta \simeq 56,44°$, si ha $\gamma \simeq 180° - 30° - 56,44° = 93,56°$ e

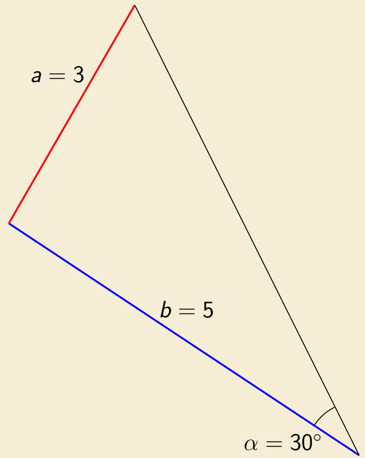
$$c = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(30° + 56,44°)}{\operatorname{sen}30°} \simeq 5,99.$$

Se $\beta \simeq 123,56°$, si ha $\gamma \simeq 180° - 30° - 123,56° = 26,44°$ e

$$c = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(30° + 123,56°)}{\operatorname{sen}30°} \simeq 2,67.$$

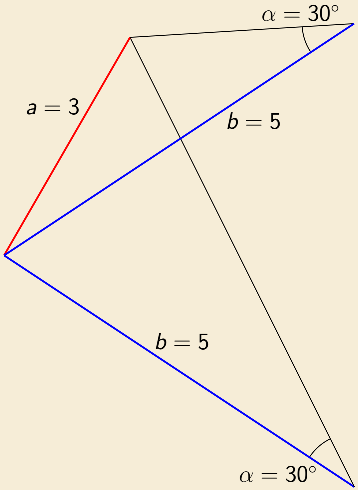
Soluzione doppia

In figura vengono mostrate le due soluzioni dell'esempio precedente, con $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.



Soluzione doppia

In figura vengono mostrate le due soluzioni dell'esempio precedente, con $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.



Il caso di un lato e due angoli

Per concludere, vediamo il caso 4, in cui sono noti un lato e due angoli.

Il caso di un lato e due angoli

Per concludere, vediamo il caso 4, in cui sono noti un lato e due angoli. Dai due angoli noti si ricava immediatamente il terzo, quindi possiamo già pensare che siano noti tutti e tre gli angoli.

Il caso di un lato e due angoli

Per concludere, vediamo il caso 4, in cui sono noti un lato e due angoli.
Dai due angoli noti si ricava immediatamente il terzo, quindi possiamo già pensare che siano noti tutti e tre gli angoli.
Quindi supponiamo di conoscere un lato *a* e i tre angoli α, β, γ.

Il caso di un lato e due angoli

Per concludere, vediamo il caso 4, in cui sono noti un lato e due angoli. Dai due angoli noti si ricava immediatamente il terzo, quindi possiamo già pensare che siano noti tutti e tre gli angoli.
Quindi supponiamo di conoscere un lato a e i tre angoli α, β, γ.

In questo caso, applicando il teorema dei seni si ha subito

$$b = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} a \,,$$

Il caso di un lato e due angoli

Per concludere, vediamo il caso 4, in cui sono noti un lato e due angoli.
Dai due angoli noti si ricava immediatamente il terzo, quindi possiamo già pensare che siano noti tutti e tre gli angoli.
Quindi supponiamo di conoscere un lato *a* e i tre angoli α, β, γ.

In questo caso, applicando il teorema dei seni si ha subito

$$b = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\, a\,, \quad c = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\, a\,.$$

Esempio nel caso di un lato e due angoli

Ad esempio: sia $a = 5$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Esempio nel caso di un lato e due angoli

Ad esempio: sia $a = 5$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

Abbiamo subito $\gamma = 180° - 60° - 45° = 75°$,

Esempio nel caso di un lato e due angoli

Ad esempio: sia $a = 5$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

Abbiamo subito $\gamma = 180° - 60° - 45° = 75°$, e quindi

$$b = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\, a = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Esempio nel caso di un lato e due angoli

Ad esempio: sia $a = 5$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

Abbiamo subito $\gamma = 180° - 60° - 45° = 75°$, e quindi

$$b = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\, a = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

e, ricordando che $\operatorname{sen} 75° = \cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$,

$$c = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\, a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 5 = \frac{5}{6}(3\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$