# Teoremi sulla circonferenza

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica “Niccolò Tartaglia”
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

# Parte I

## percorso semplificato

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;
- Il raggio e la tangente nel punto di tangenza sono perpendicolari;

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

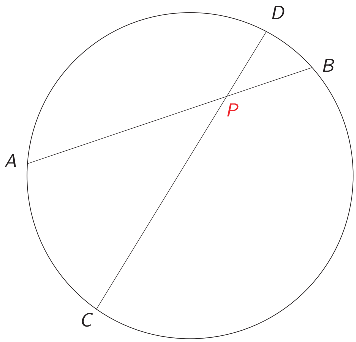
- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;
- Il raggio e la tangente nel punto di tangenza sono perpendicolari;
- Da un punto esterno a una circonferenza si possono condurre due tangenti; da un punto sulla circonferenza una e da un punto interno nessuna.

## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.

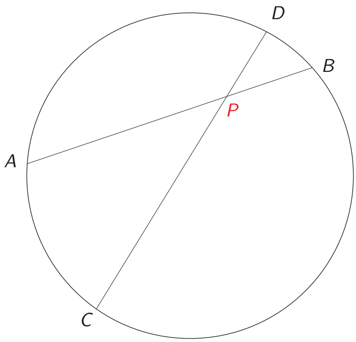
## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.



## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.

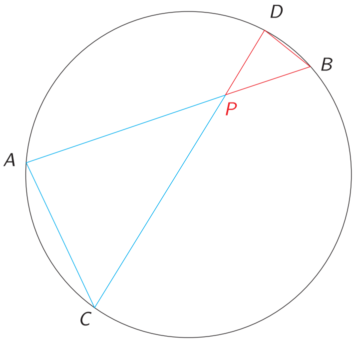



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

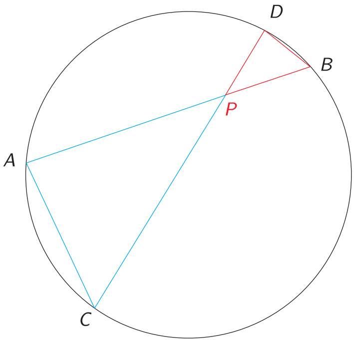
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:

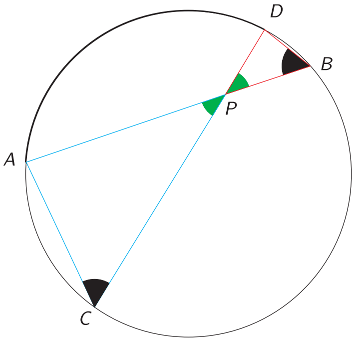
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:

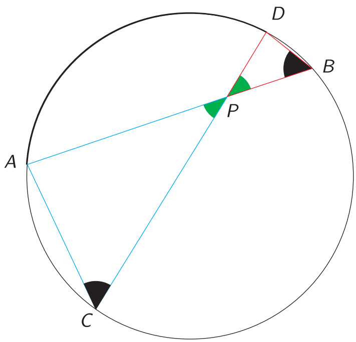


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:

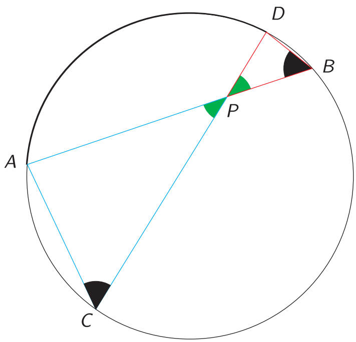



Essi sono simili. Infatti

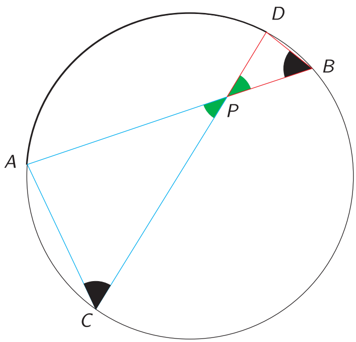

D
B
P
A
C




- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;

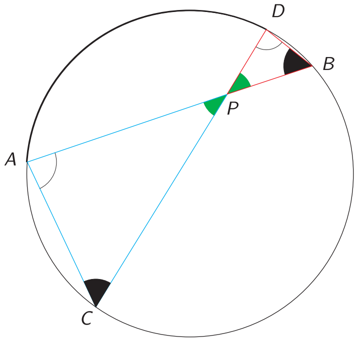


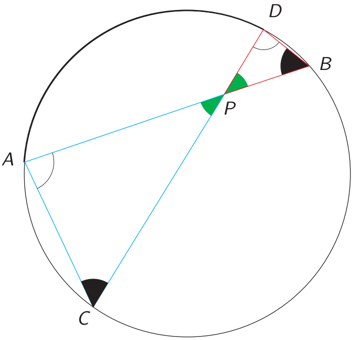

- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;
- i due angoli verdi sono uguali perché opposti al vertice.



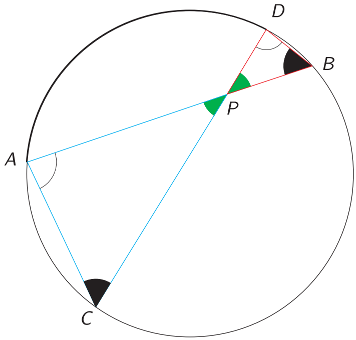

- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;
- i due angoli verdi sono uguali perché opposti al vertice.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


D
B
P
A
C

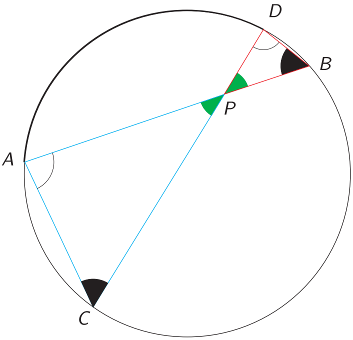



Pertanto



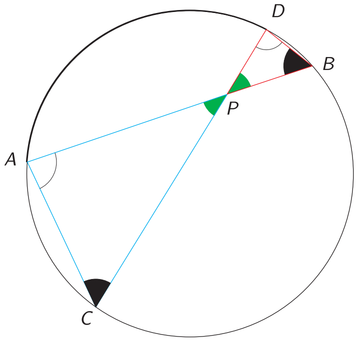

Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} =$$




Pertanto

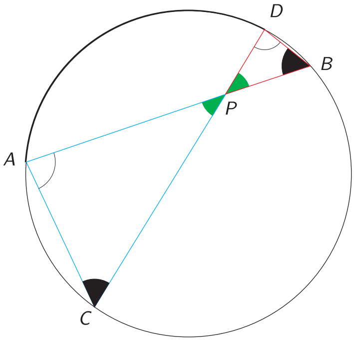
$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}} .$$




Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}} .$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora




Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}}.$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora

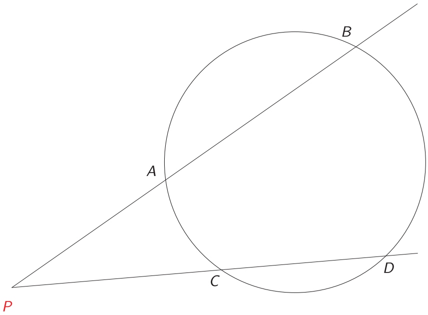
$$PA \cdot PB = PC \cdot PB. \blacksquare$$

## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.

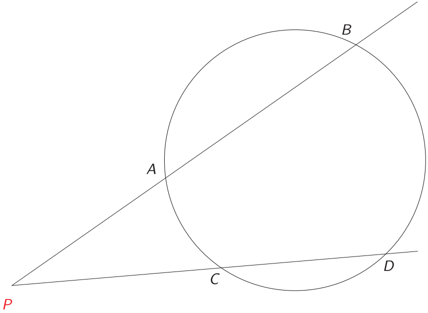
## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.



## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.

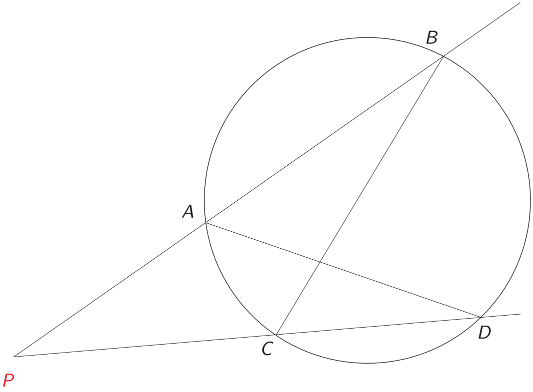



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

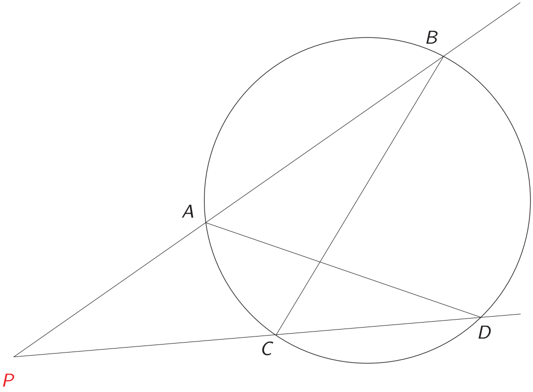
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

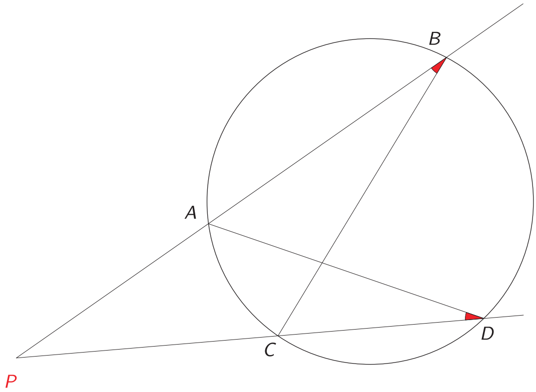
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

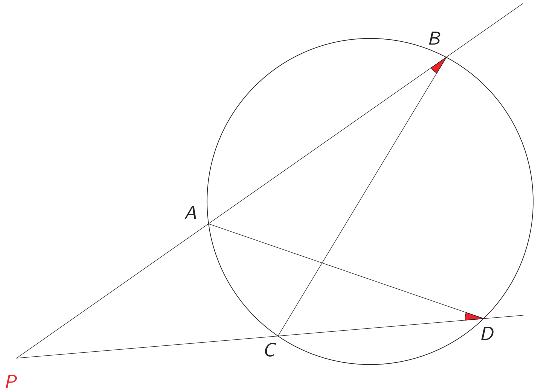


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

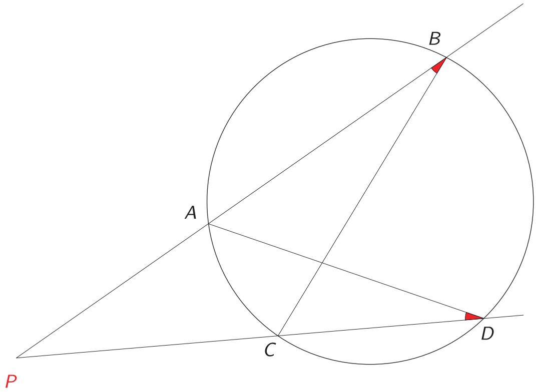



Essi sono simili. Infatti

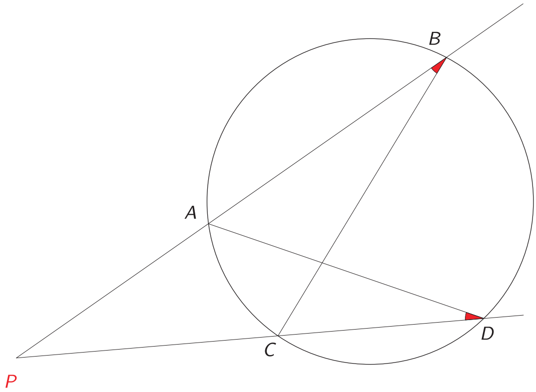

B
A
C
D
P




- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;

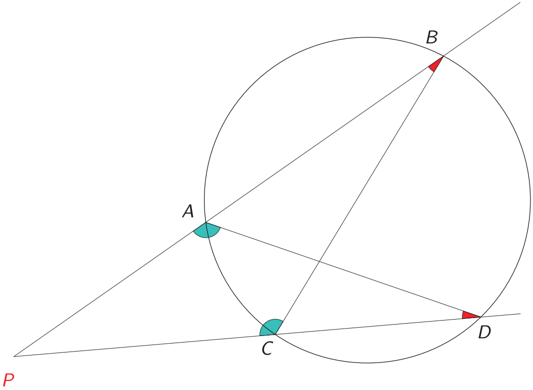


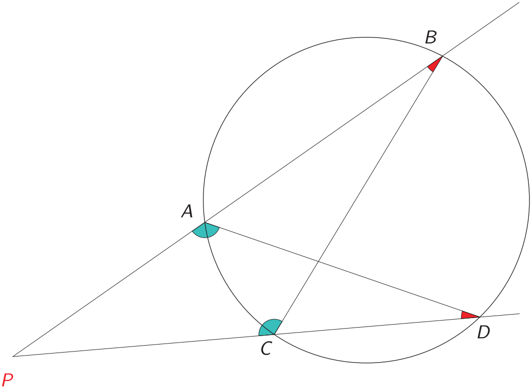

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.



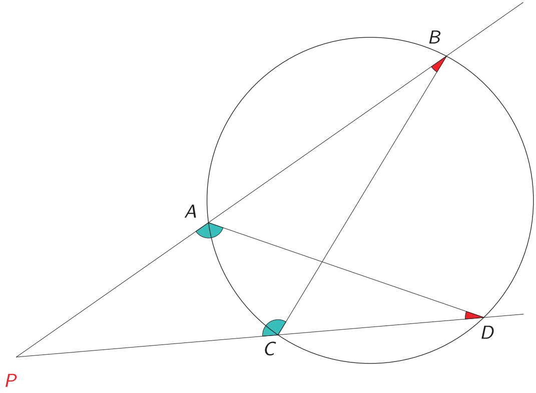

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


B
A
C
D
P

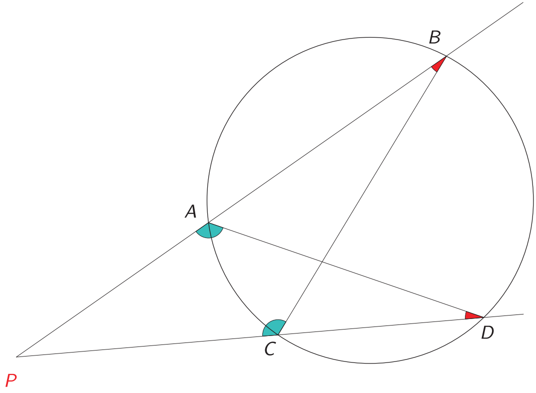



Pertanto



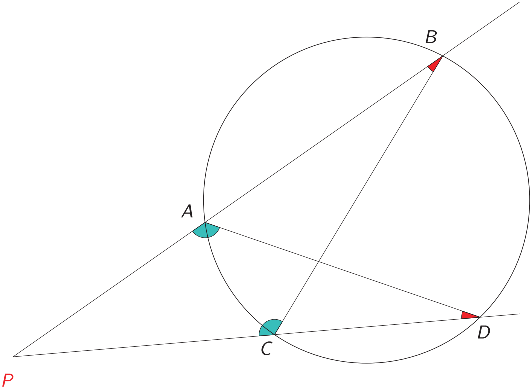

Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} =$$




Pertanto

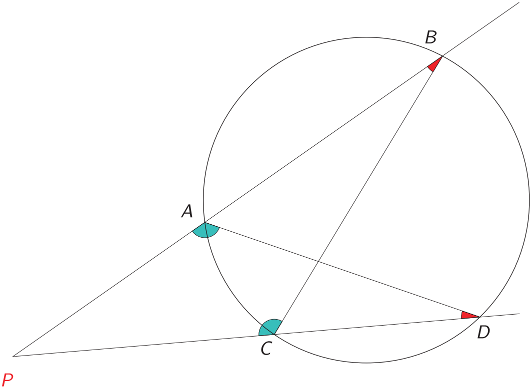
$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} .$$




Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} .$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora




Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}}.$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora

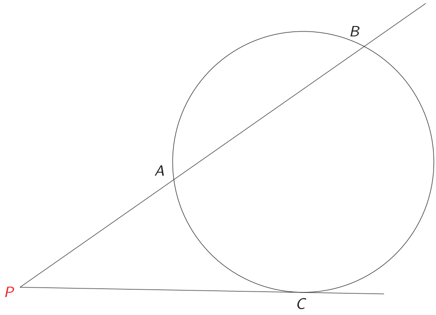
$$PA \cdot PB = PC \cdot PB. \blacksquare$$

## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.

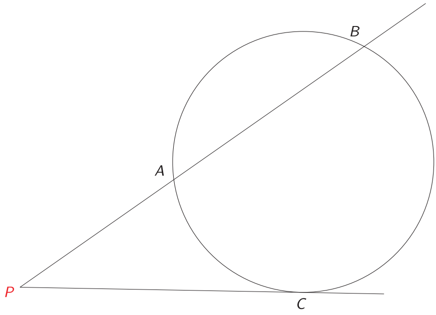
## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.



## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.

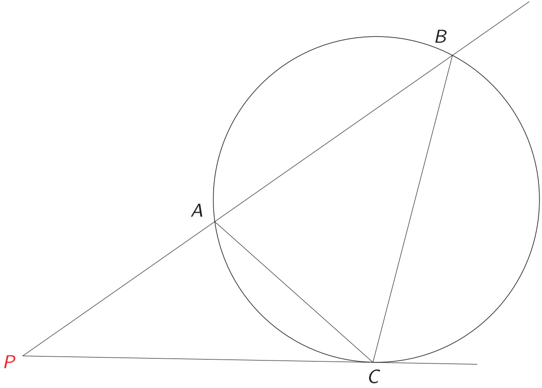



$$PA : PC = PC : PB, \qquad \text{oppure} \qquad PA \cdot PB = PC^2.$$

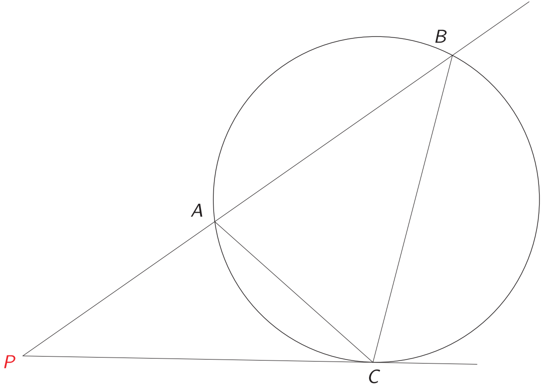
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

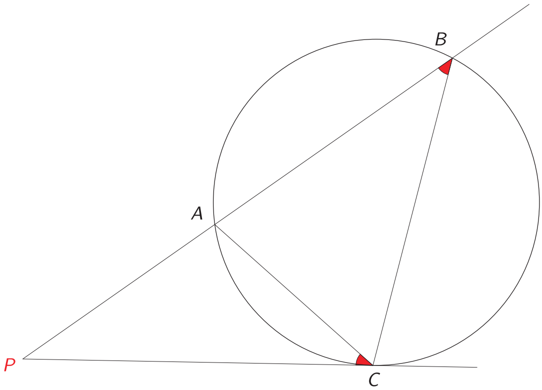
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

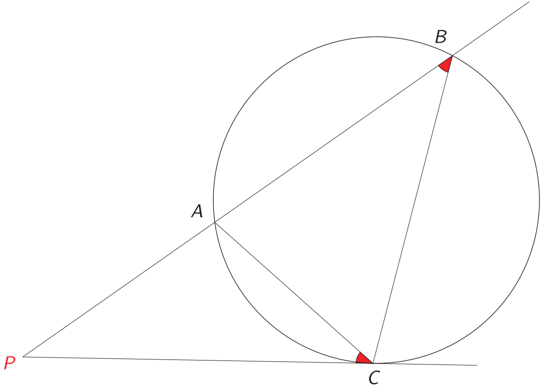


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

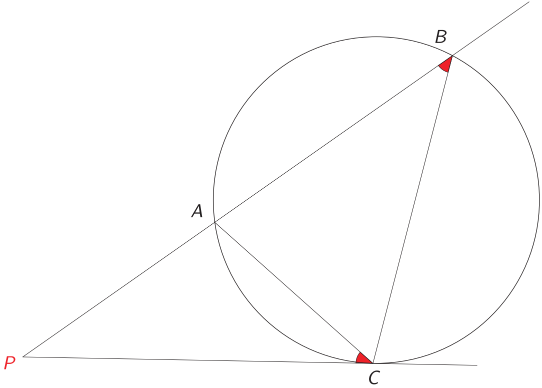



Essi sono simili. Infatti

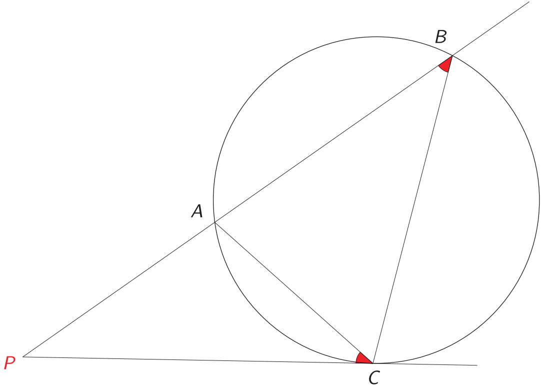

B
A
P
C




- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;

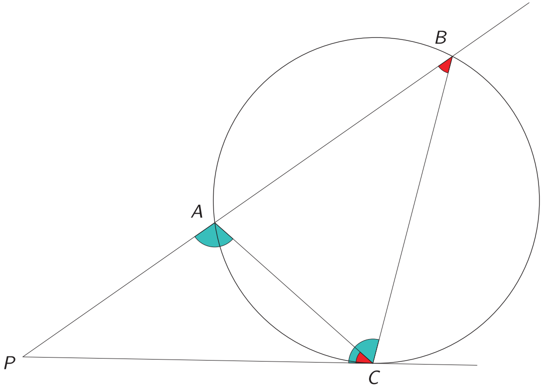


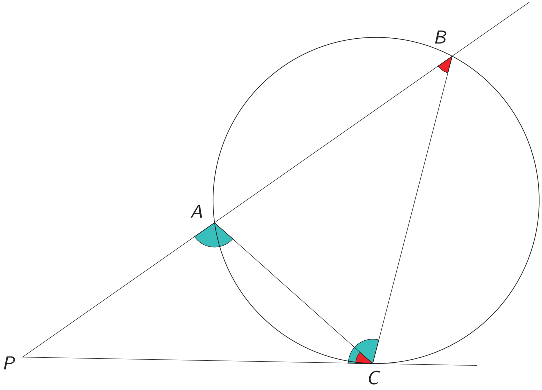

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.



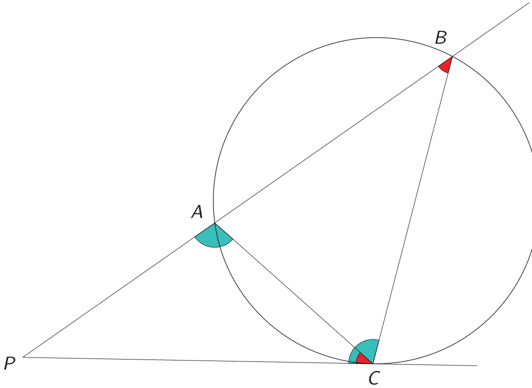

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


B
A
P
C

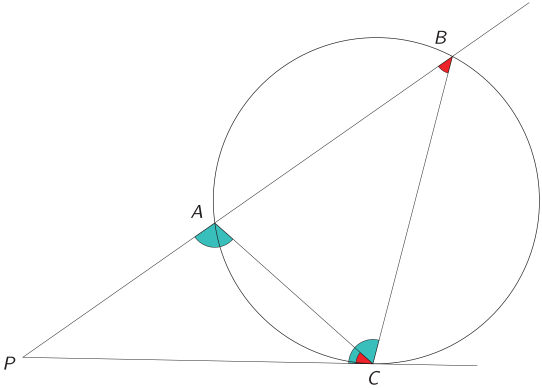



Pertanto



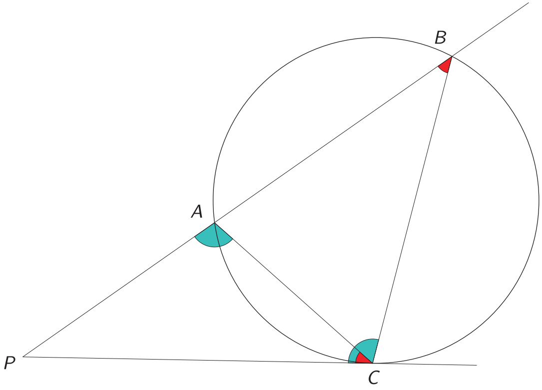

Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} =$$




Pertanto

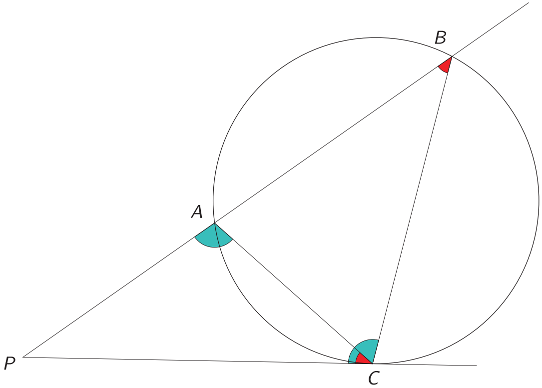
$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$




Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue poi




Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue poi

$$PA \cdot PB = PC^2.$$

# Parte II

## percorso normale

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;
- Il raggio e la tangente nel punto di tangenza sono perpendicolari;

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

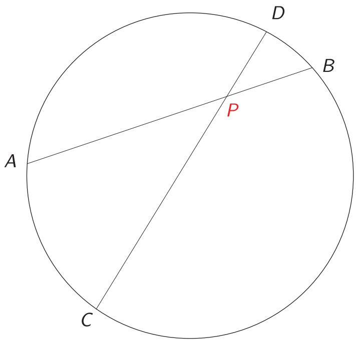
- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;
- Il raggio e la tangente nel punto di tangenza sono perpendicolari;
- Da un punto esterno a una circonferenza si possono condurre due tangenti; da un punto sulla circonferenza una e da un punto interno nessuna.

## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.

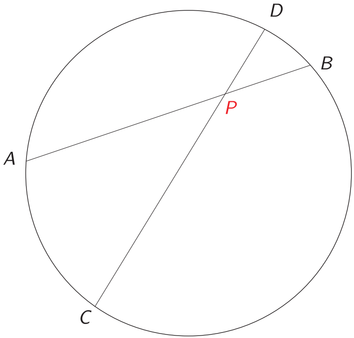
## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.



## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.

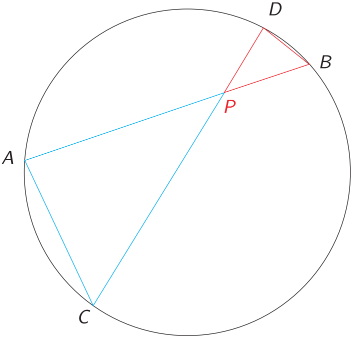



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

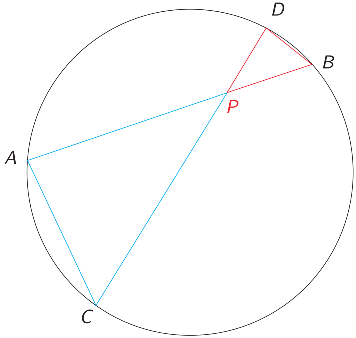
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:

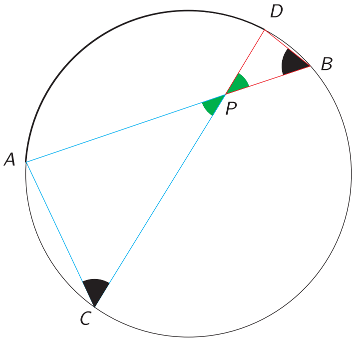
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:

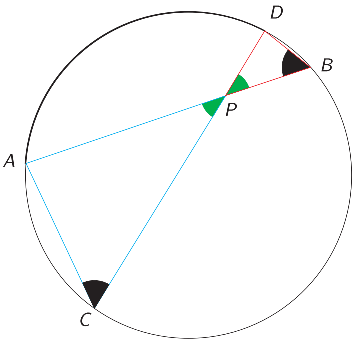


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:

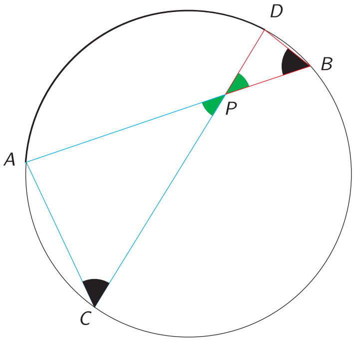



Essi sono simili. Infatti

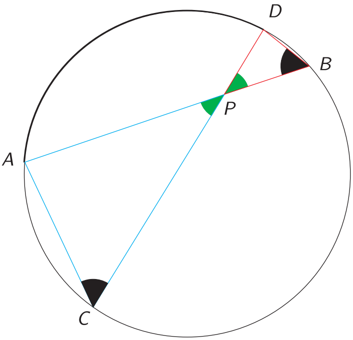

D
B
P
A
C




- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;

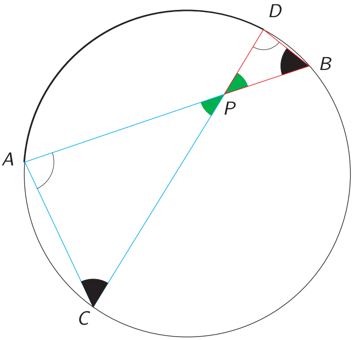


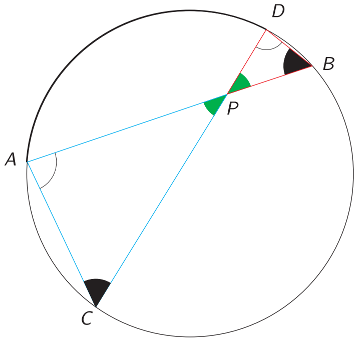

- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;
- i due angoli verdi sono uguali perché opposti al vertice.



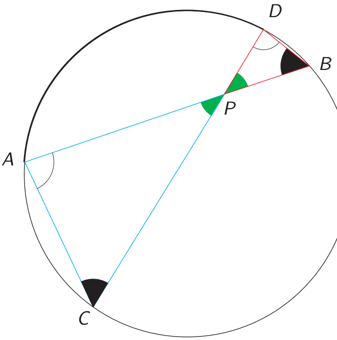

- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;
- i due angoli verdi sono uguali perché opposti al vertice.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


D
B
P
A
C

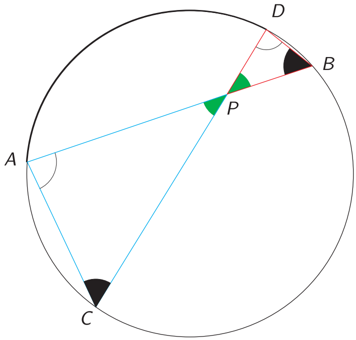



Pertanto



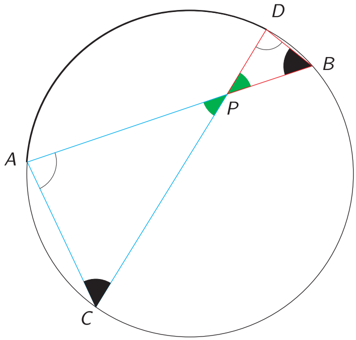

Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} \qquad =$$




Pertanto

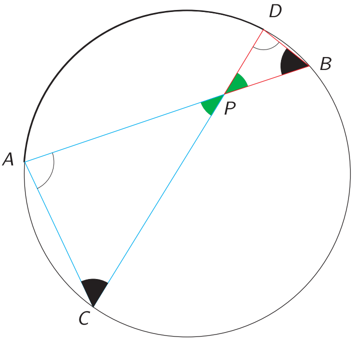
$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}} .$$




Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}} .$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora




Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}}.$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora

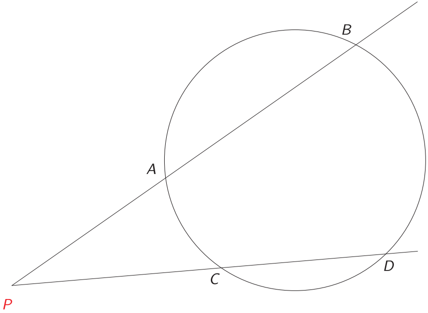
$$PA \cdot PB = PC \cdot PB. \blacksquare$$

## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.

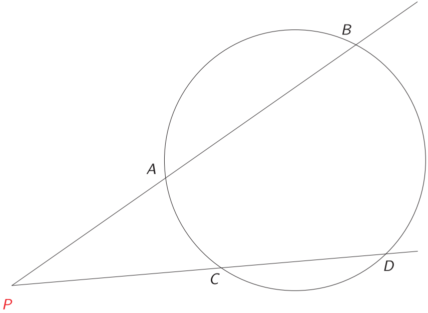
## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.



## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.

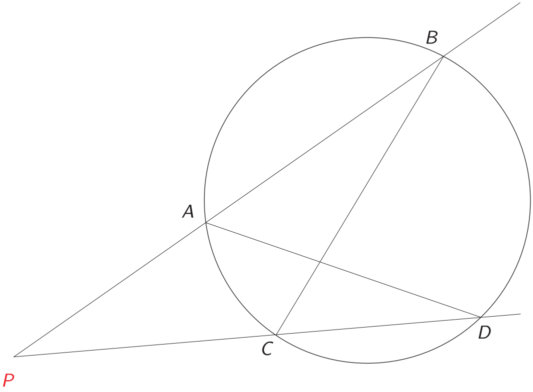



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

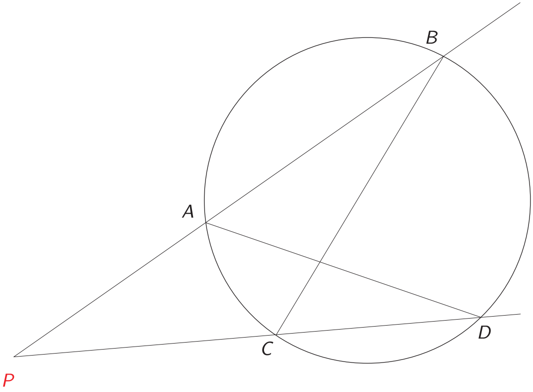
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

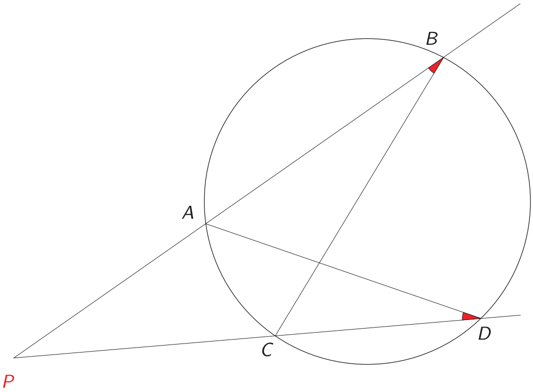
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

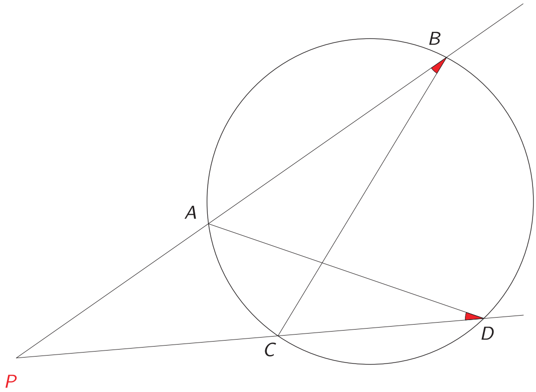


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

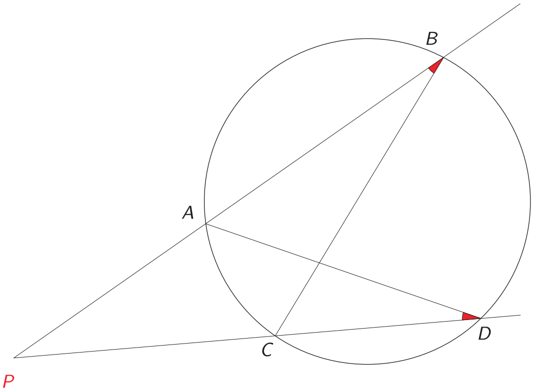



Essi sono simili. Infatti

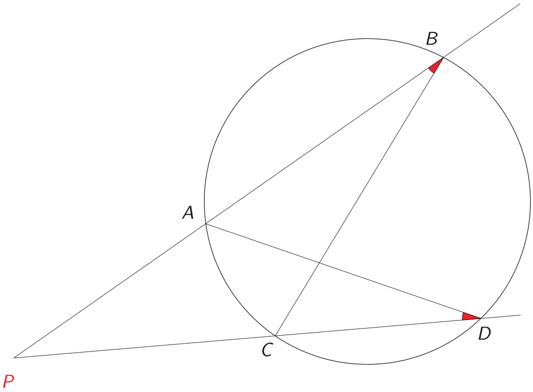

B
A
D
C
P




- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;

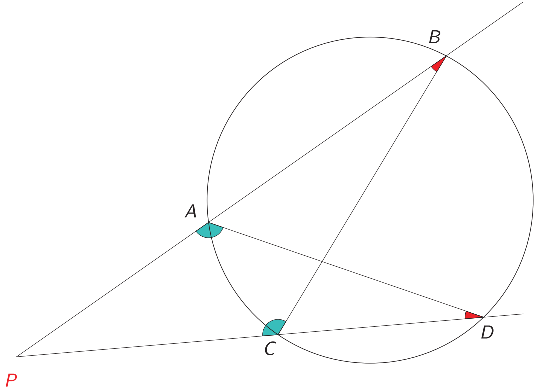


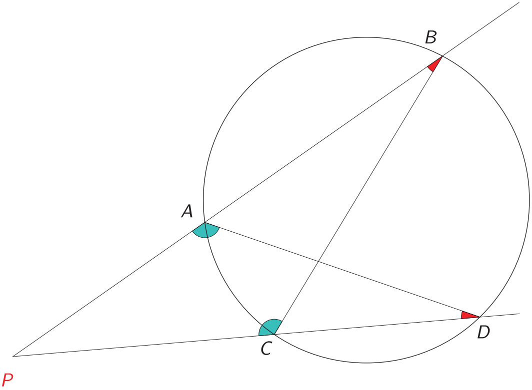

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.



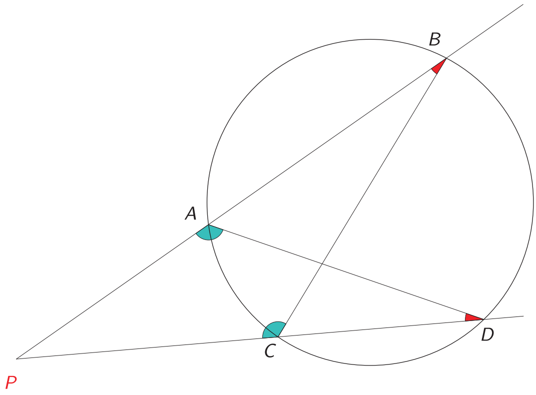

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


B
A
C
D
P

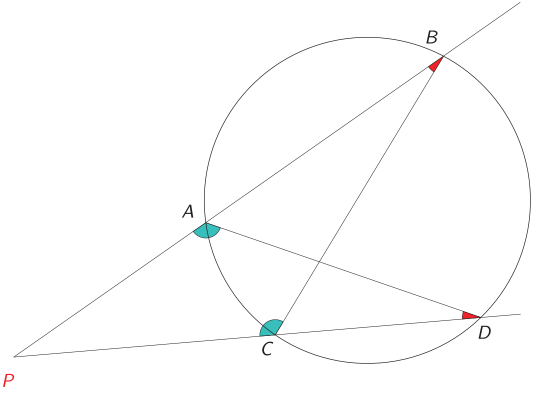



Pertanto



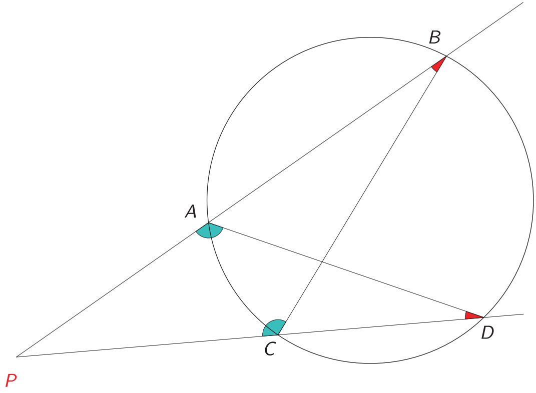

Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} =$$




Pertanto

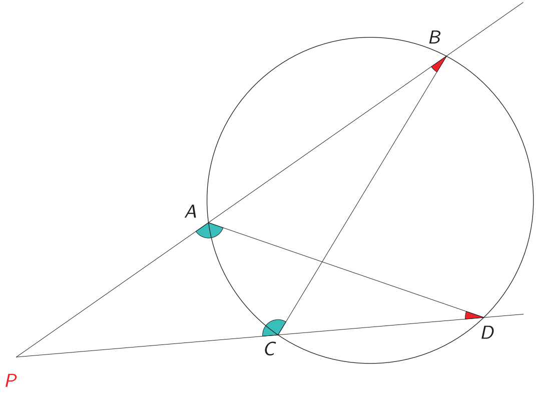
$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} .$$




Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} .$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora




Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}}.$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora

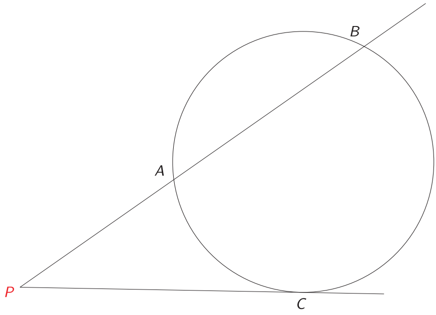
$$PA \cdot PB = PC \cdot PB. \blacksquare$$

## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.

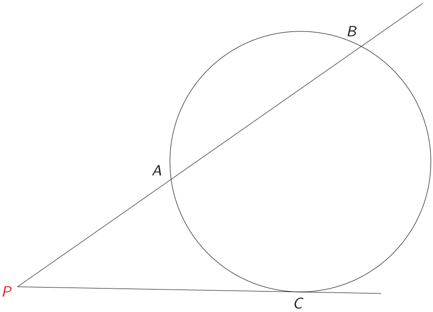
## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.



## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.

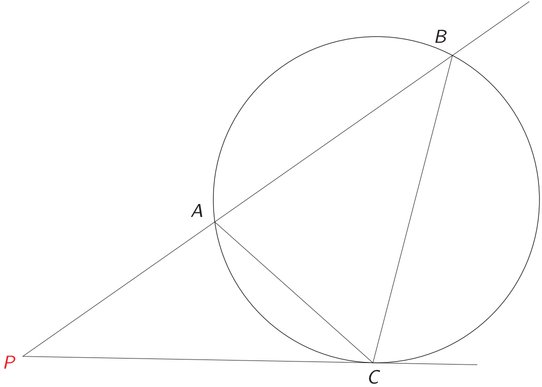



$$PA : PC = PC : PB, \qquad \text{oppure} \qquad PA \cdot PB = PC^2.$$

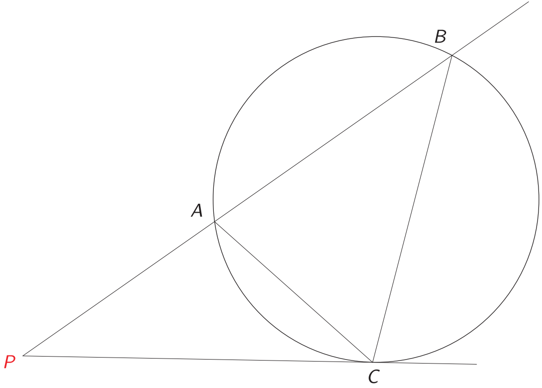
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

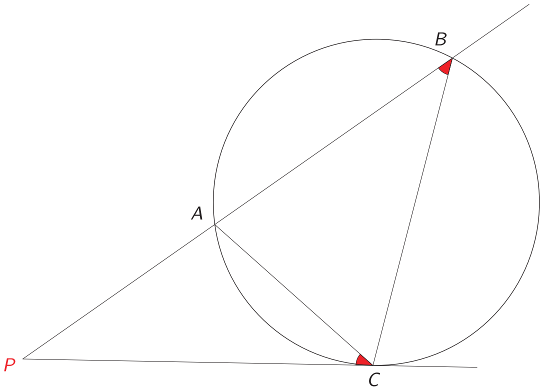
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

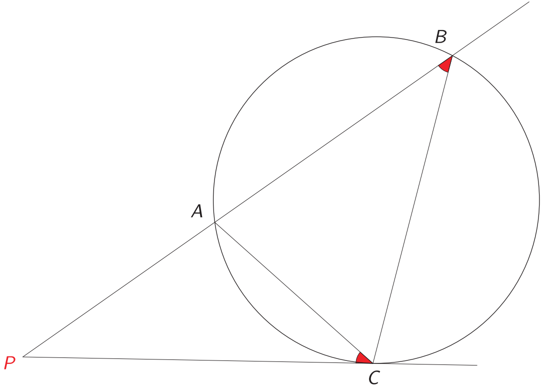


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

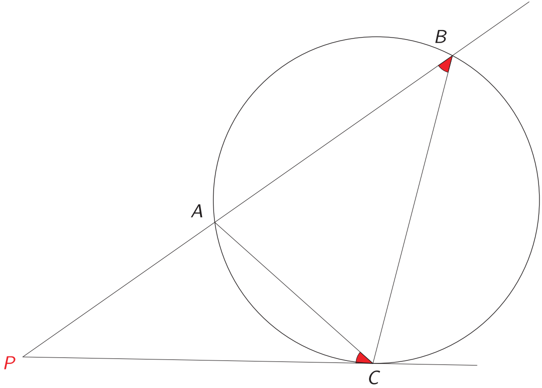



Essi sono simili. Infatti

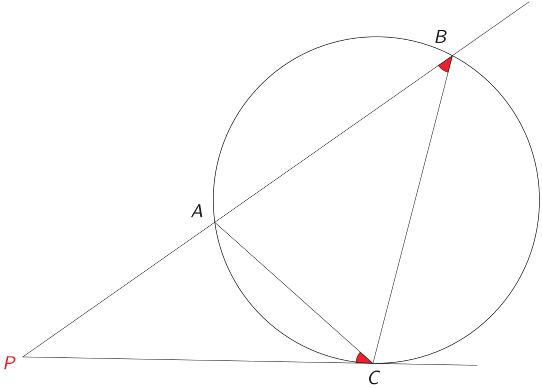

B
A
P
C




- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;

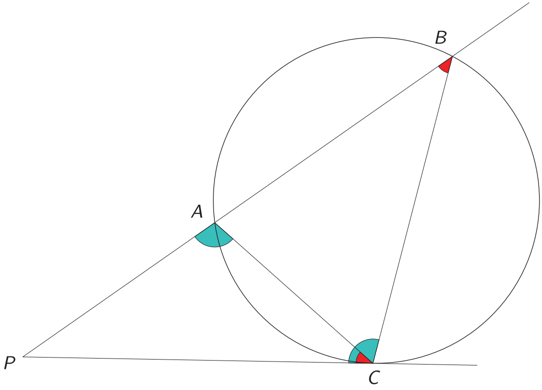


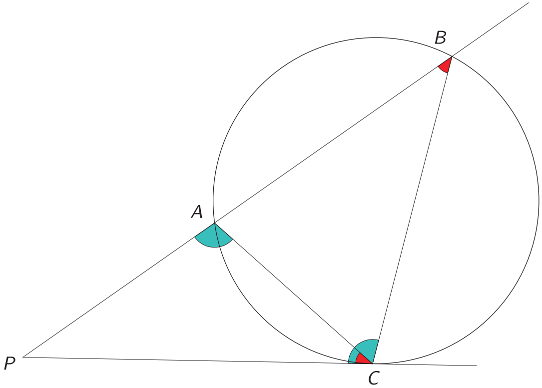

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.



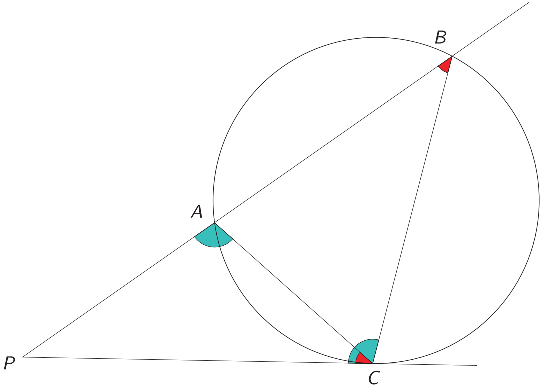

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


B
A
P
C

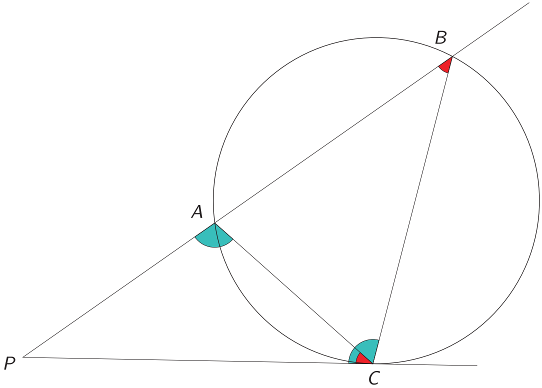



Pertanto



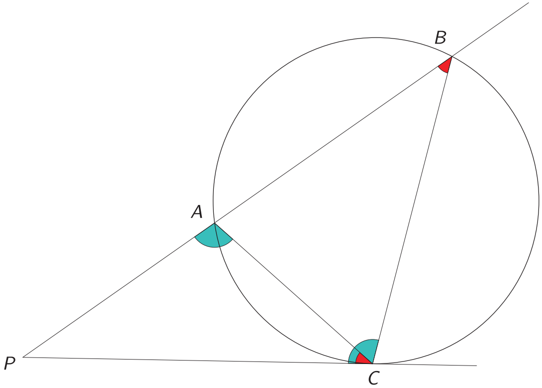

Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} =$$




Pertanto

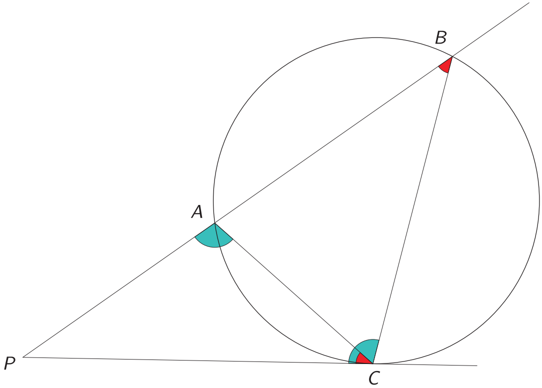
$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$




Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue poi



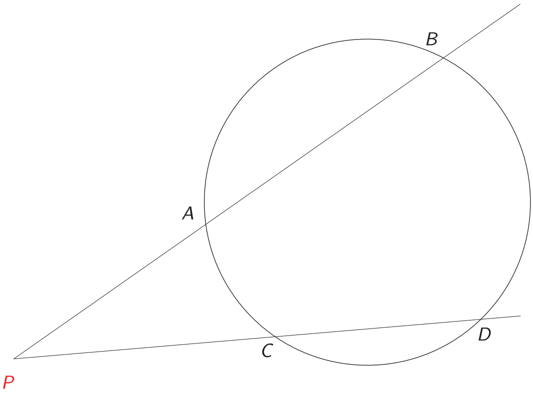

Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$

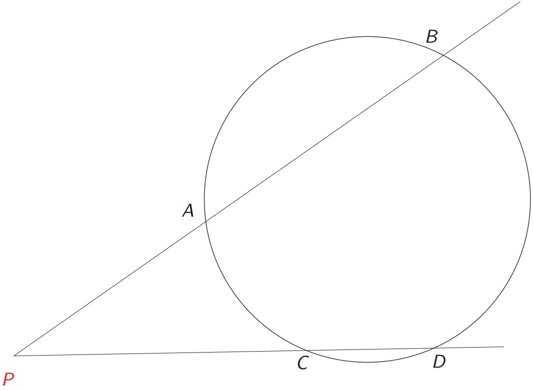
Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue poi

$$PA \cdot PB = PC^2.$$

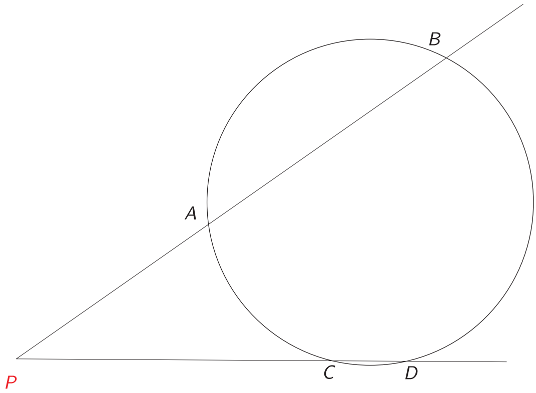
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un "caso limite" del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l'altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



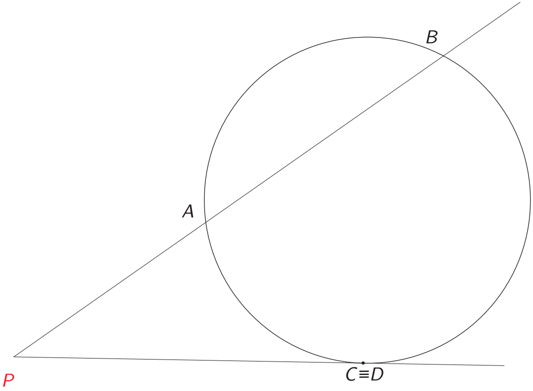
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un "caso limite" del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l'altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



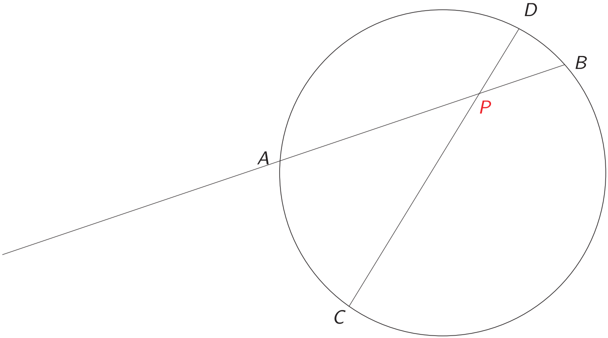
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un "caso limite" del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l'altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



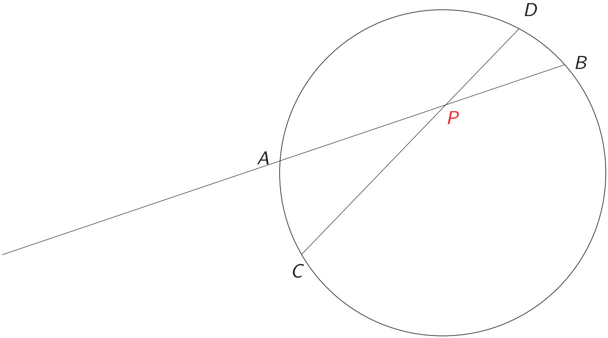
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un "caso limite" del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l'altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



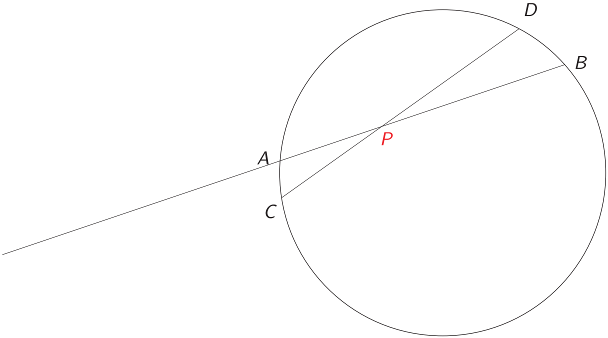
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



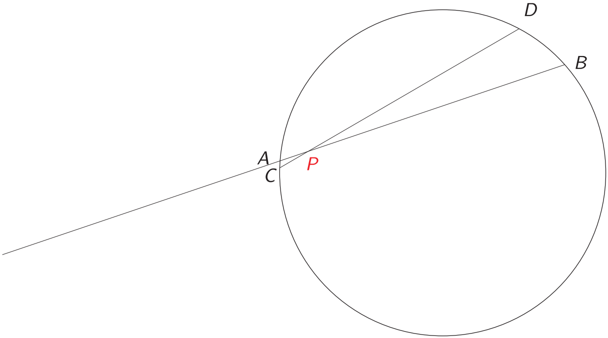
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



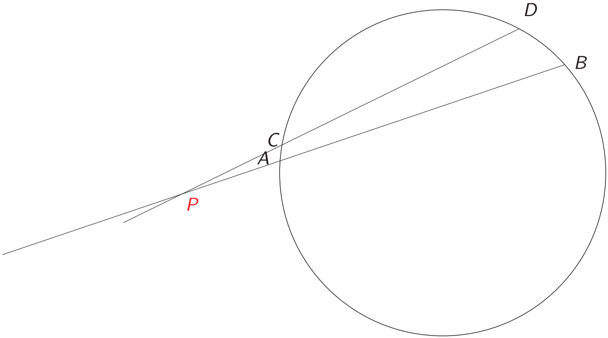
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



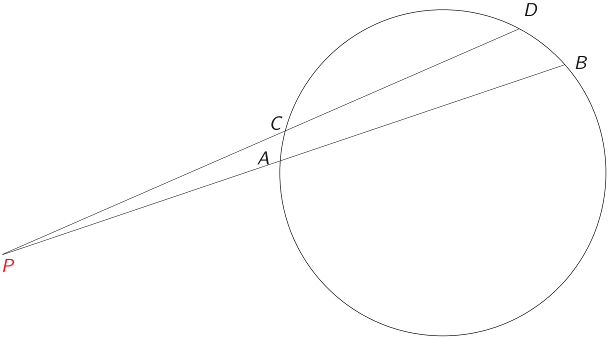
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



# Parte III

## percorso approfondito

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;
- Il raggio e la tangente nel punto di tangenza sono perpendicolari;

# Richiami

Ricordiamo alcuni fatti dimostrati sin qui:

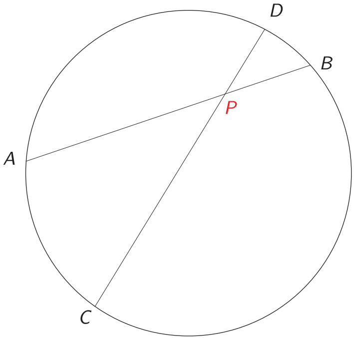
- Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti e sono pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente;
- Il raggio e la tangente nel punto di tangenza sono perpendicolari;
- Da un punto esterno a una circonferenza si possono condurre due tangenti; da un punto sulla circonferenza una e da un punto interno nessuna.

## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.

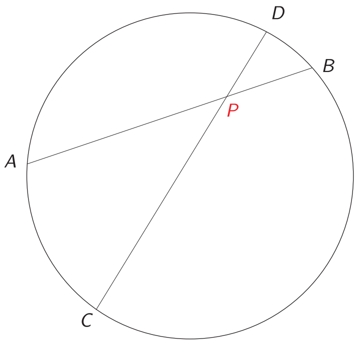
## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.



## Teorema delle corde

Date due corde in una circonferenza aventi per intersezione un punto interno alla circonferenza, esso divide le due corde in parti tali che il prodotto delle distanze dal punto dagli estremi dei segmenti è uguale nelle due corde.

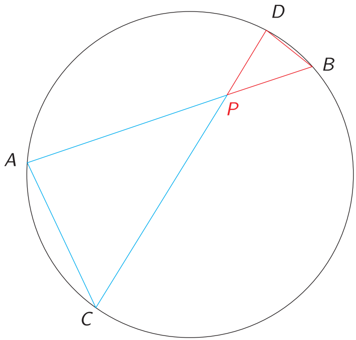



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

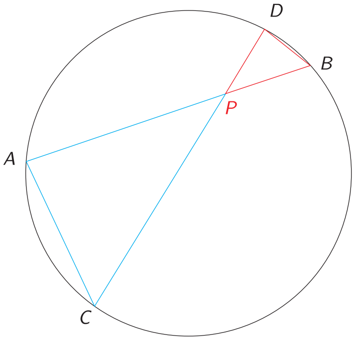
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:

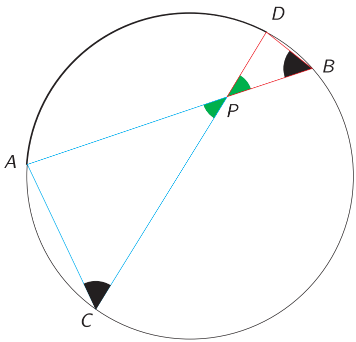
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:



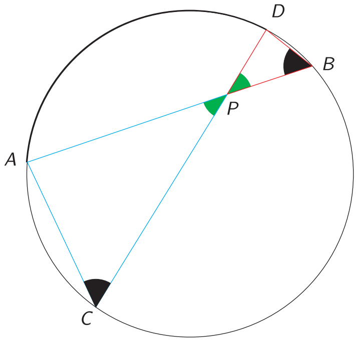
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAB$ e $PDC$, colorati nella figura:



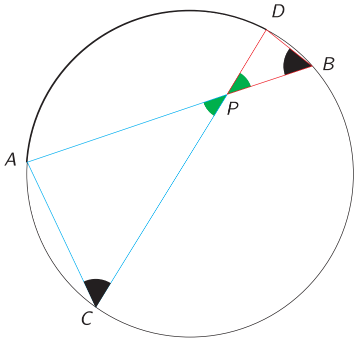

Essi sono simili. Infatti



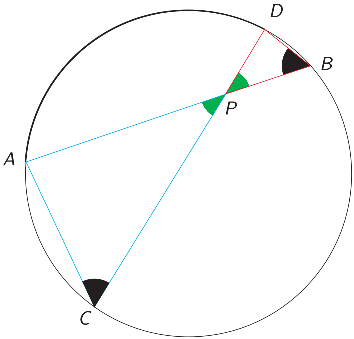
D
B
P
A
C




- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;

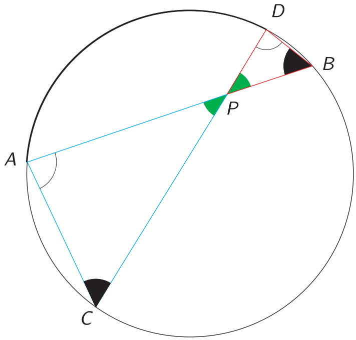


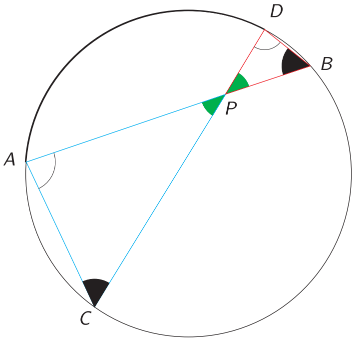

- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;
- i due angoli verdi sono uguali perché opposti al vertice.



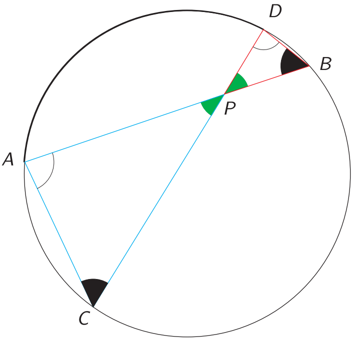

- i due angoli neri sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AD$;
- i due angoli verdi sono uguali perché opposti al vertice.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


D
B
P
A
C

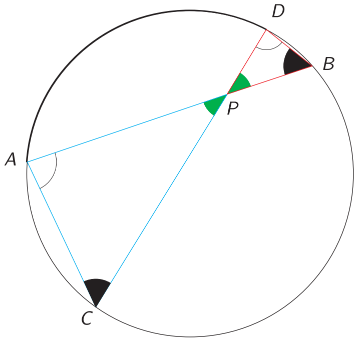



Pertanto



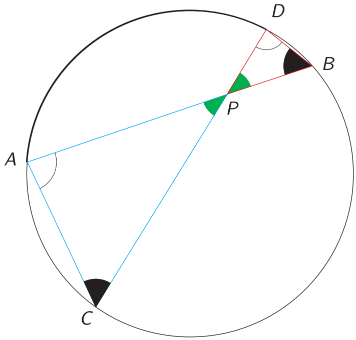

Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} \quad =$$




Pertanto

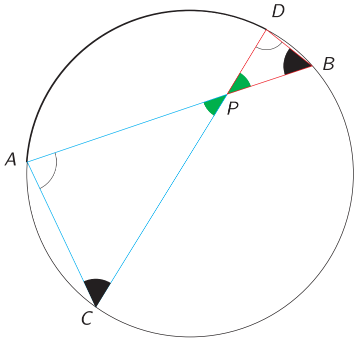
$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}} .$$




Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}} .$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora




Pertanto

$$\underbrace{PA : PD}_{\text{opposti agli angoli neri}} = \underbrace{PC : PB}_{\text{opposti agli angoli bianchi}}.$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora

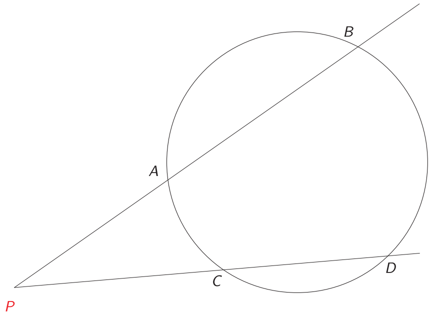
$$PA \cdot PB = PC \cdot PB. \blacksquare$$

## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.

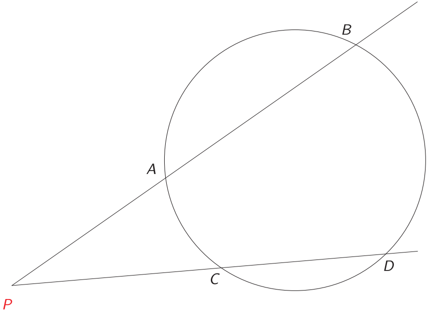
## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.



## Teorema delle secanti

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, e secanti la circonferenza stessa, si ha che il prodotto delle distanze dei punti di intersezione dal punto comune alle due semirette è lo stesso per le due semirette.

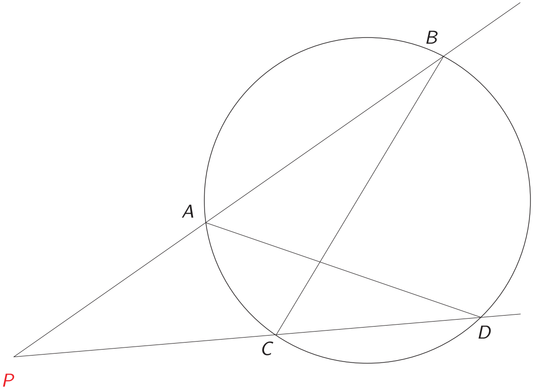



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

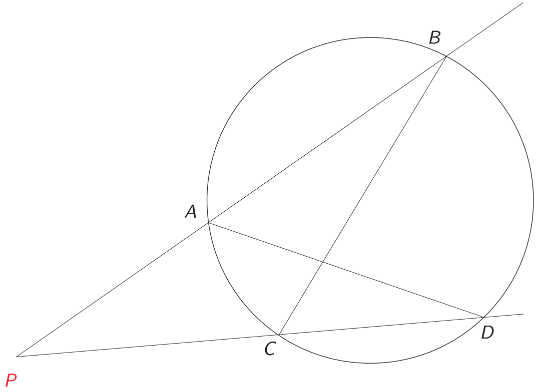
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

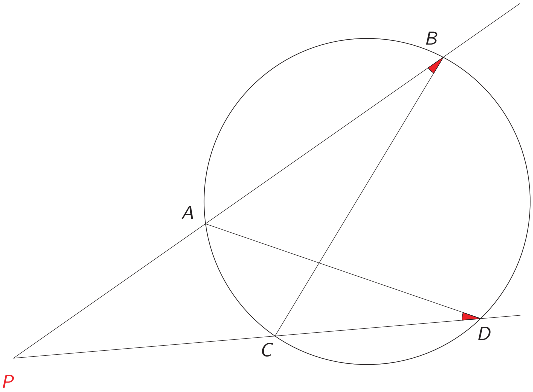
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

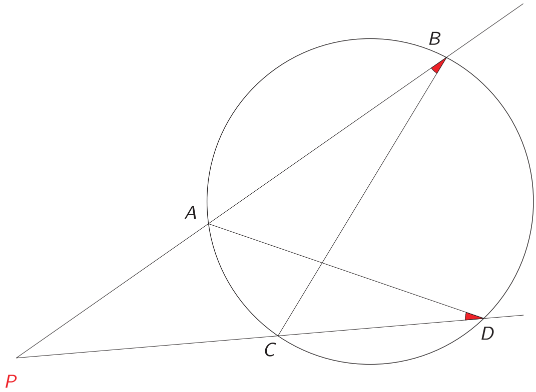


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAD$ e $PCB$, indicati nella figura:

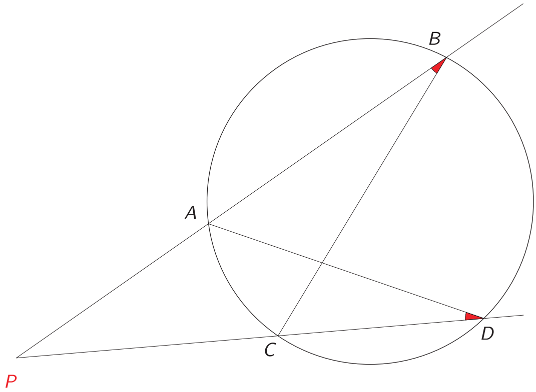



Essi sono simili. Infatti

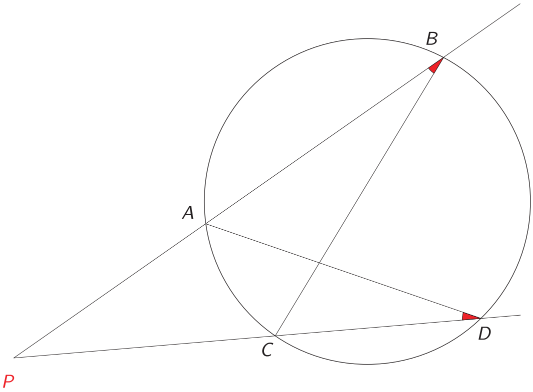

B
A
C
D
P




- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;

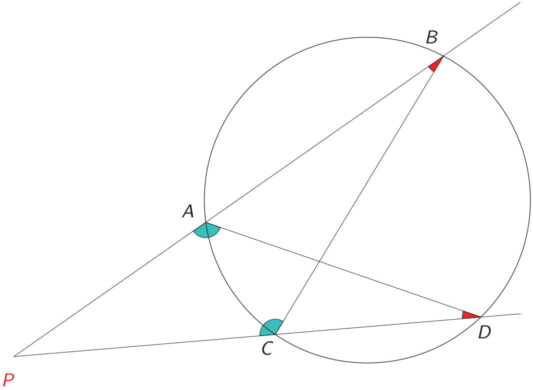


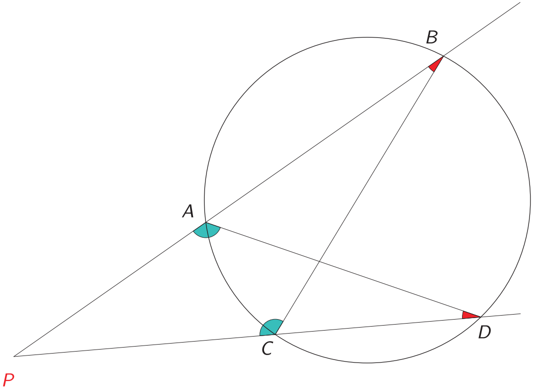

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.



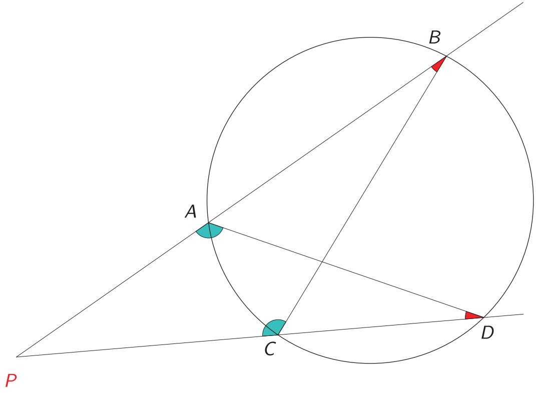

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


B
A
C
D
P

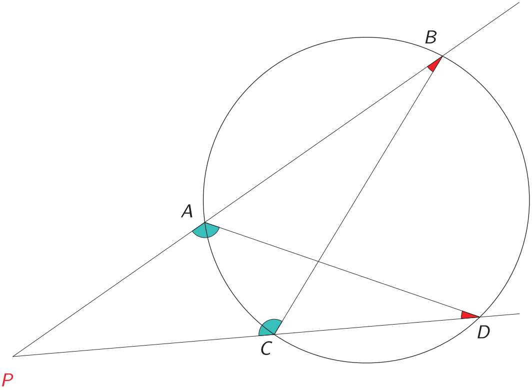



Pertanto



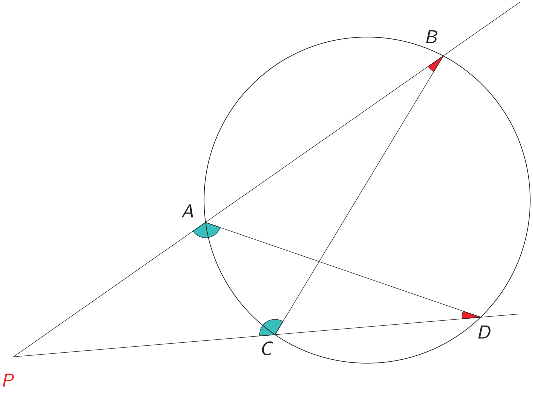

Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} \quad =$$




Pertanto

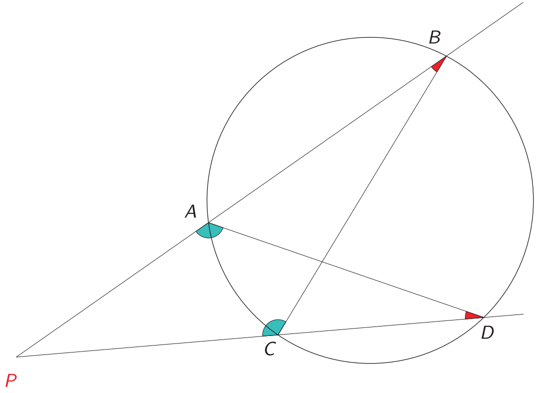
$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} .$$




Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} .$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora




Pertanto

$$\underbrace{PB : PD}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}}.$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue allora

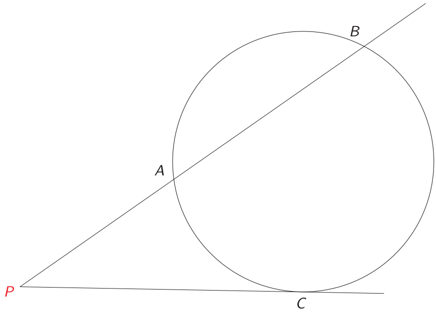
$$PA \cdot PB = PC \cdot PB. \blacksquare$$

## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.

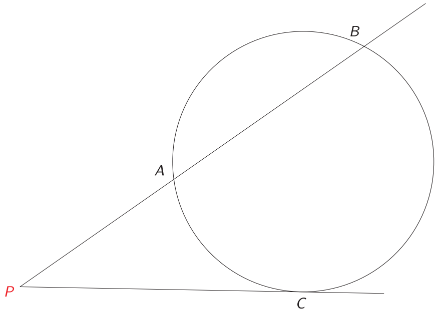
## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.



## Teorema della secante e della tangente

Date due semirette, uscenti da un punto esterno a una circonferenza, una tangente e una secante la circonferenza stessa, si ha che il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante congiungenti i punti di intersezione e il punto comune alle semirette.

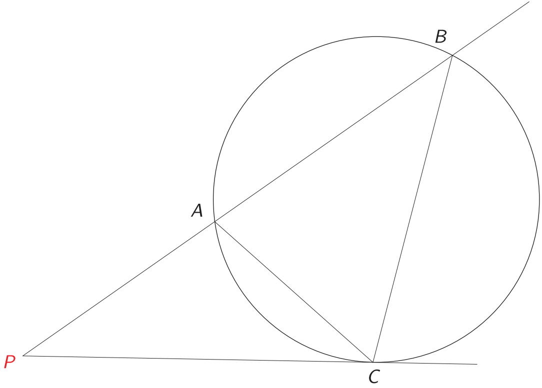



$$PA : PC = PC : PB, \qquad \text{oppure} \qquad PA \cdot PB = PC^2.$$

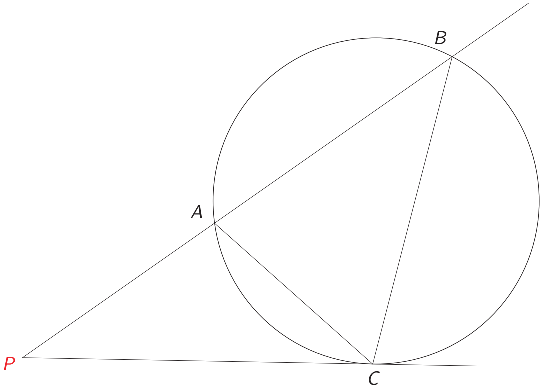
*Dimostrazione.*

*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

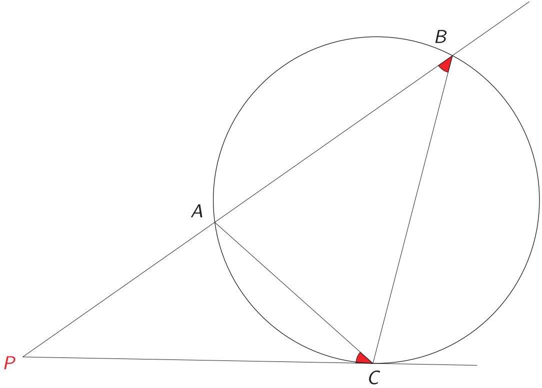
*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

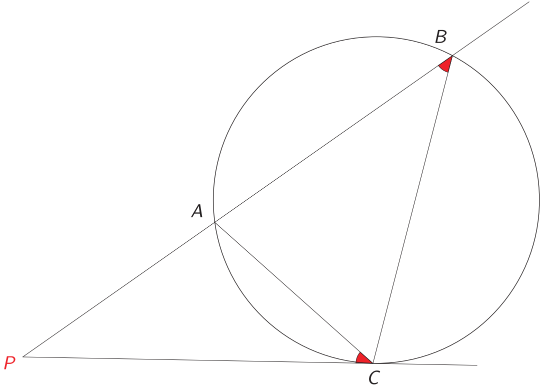


*Dimostrazione.* Consideriamo i triangoli $PAC$ e $PCB$, indicati nella figura:

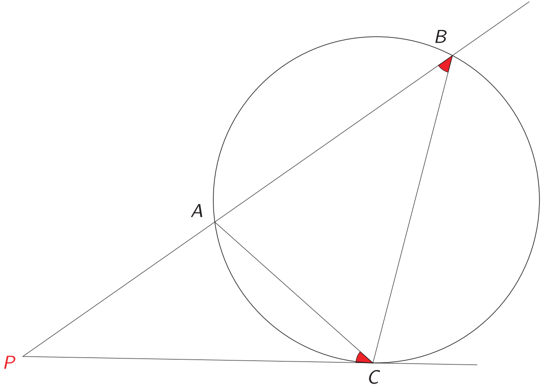



Essi sono simili. Infatti

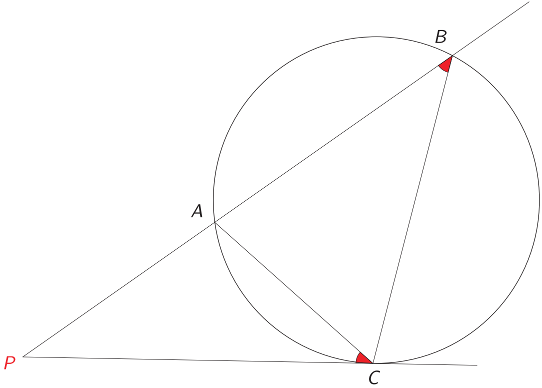

B
A
P
C




- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;

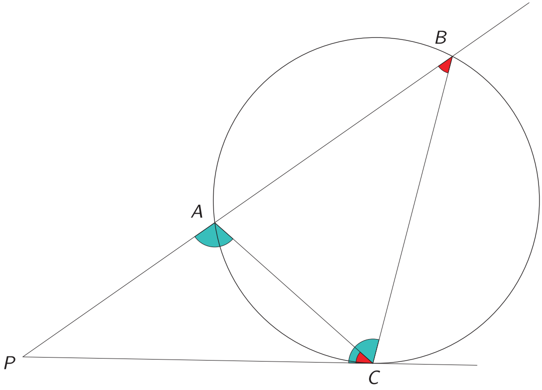


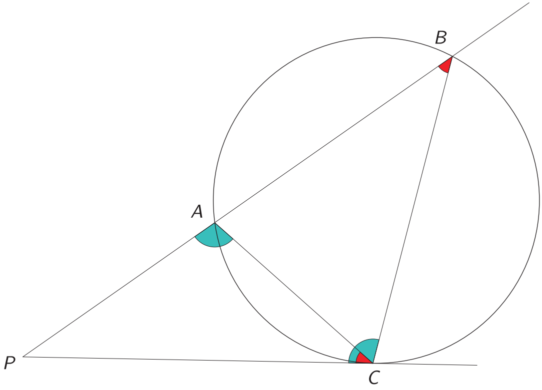

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.



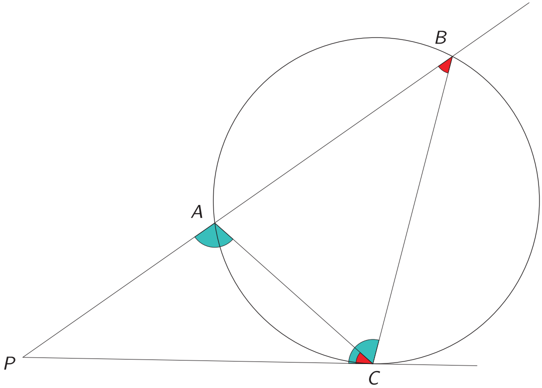

- i due angoli rossi sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $AC$;
- l'angolo in $P$ è in comune.

Dunque la similitudine si ha per il secondo criterio.


B
A
P
C

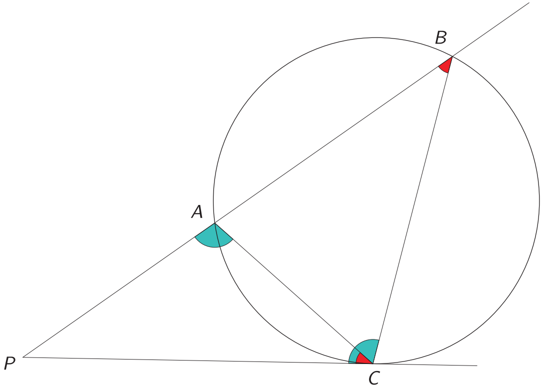



Pertanto



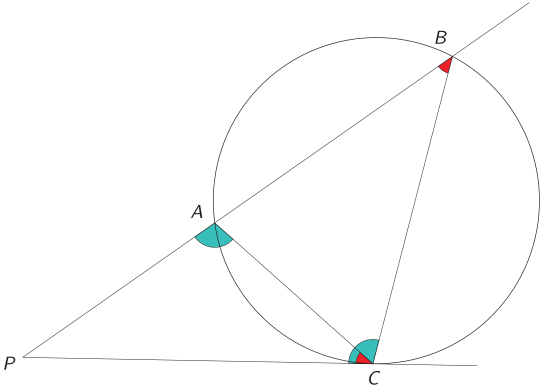

Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} =$$




Pertanto

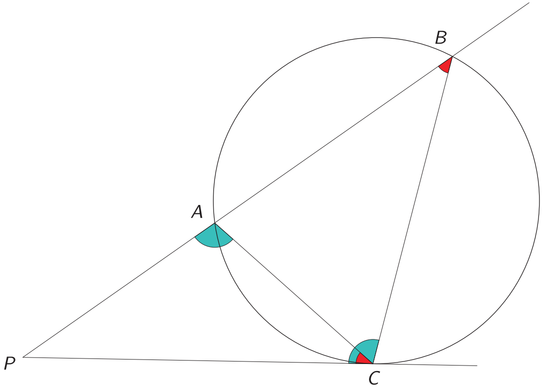
$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$




Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$

Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue poi



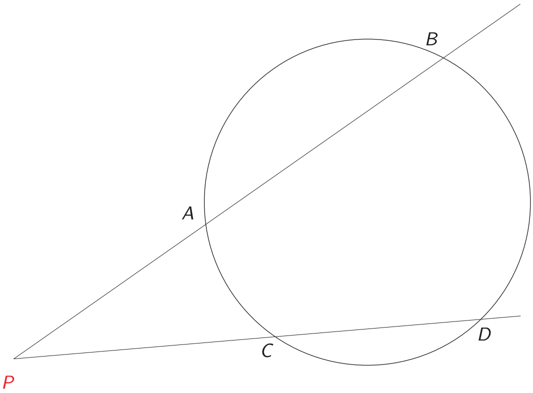

Pertanto

$$\underbrace{PB : PC}_{\text{opposti agli angoli azzurri}} = \underbrace{PC : PA}_{\text{opposti agli angoli rossi}} . \blacksquare$$

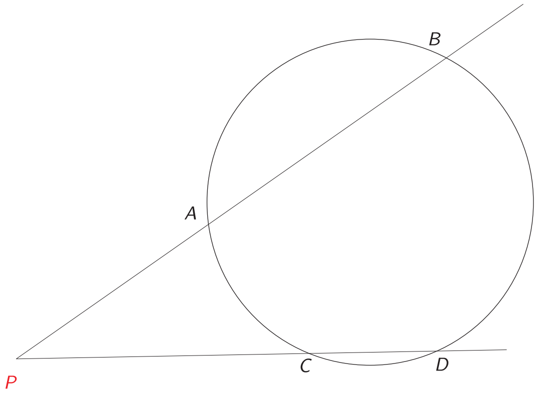
Dalla proprietà fondamentale delle proporzioni segue poi

$$PA \cdot PB = PC^2.$$

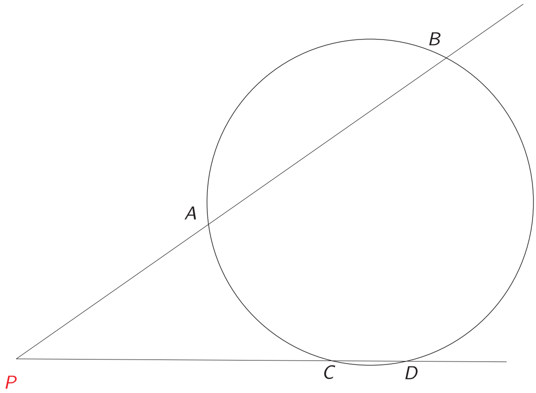
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un “caso limite” del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l’altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



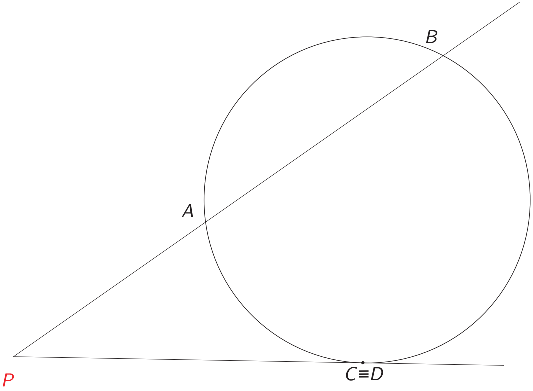
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un "caso limite" del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l'altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



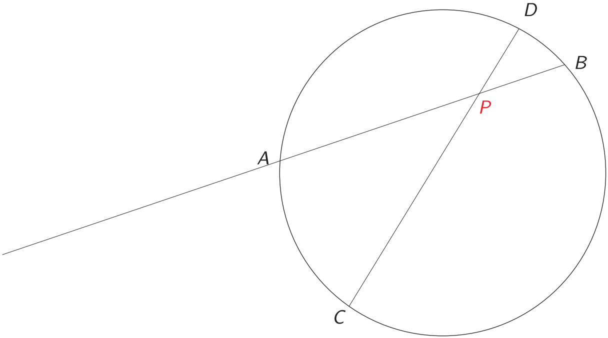
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un "caso limite" del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l'altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



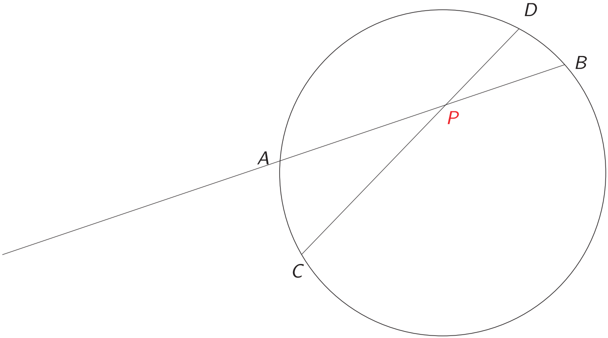
Il teorema della secante e della tangente si può pensare come un “caso limite” del teorema delle secanti, nel quale una secante resta ferma e l’altra si muove fino a raggiungere la posizione di tangenza.



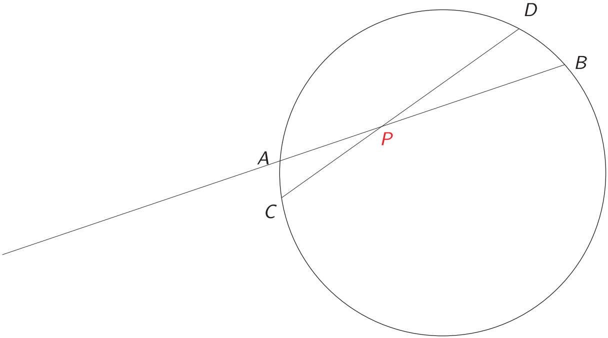
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



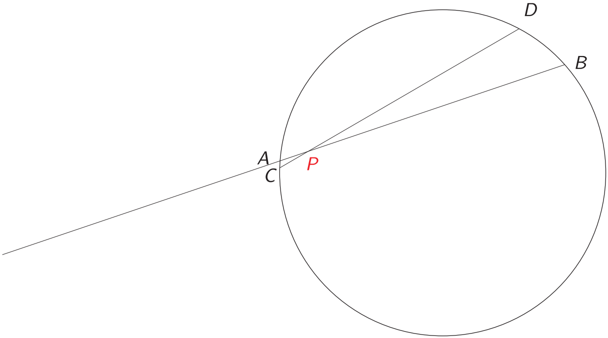
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



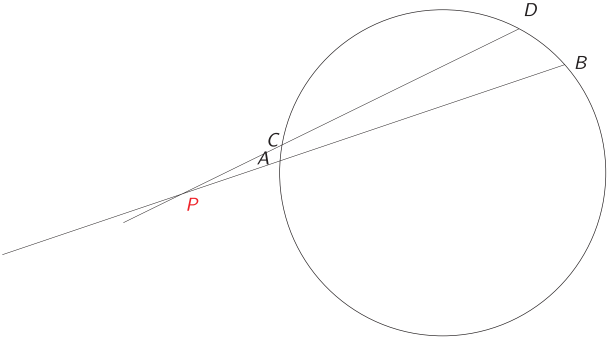
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



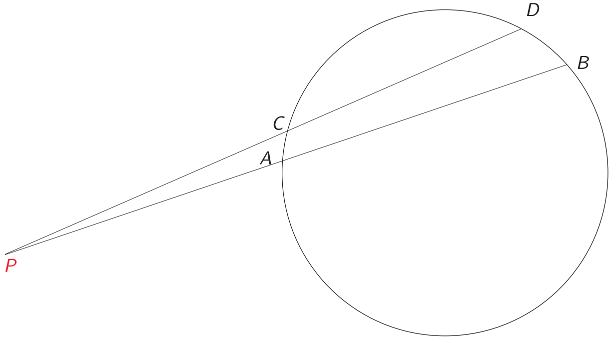
Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



Anche il teorema delle corde si trasforma in quello delle secanti quando il punto di intersezione si sposta fuori dalla circonferenza:



# Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

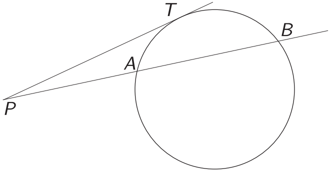
Il teorema delle secanti permette di definire un nuovo concetto:

# Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

Il teorema delle secanti permette di definire un nuovo concetto: la *potenza* di un punto rispetto a una circonferenza.

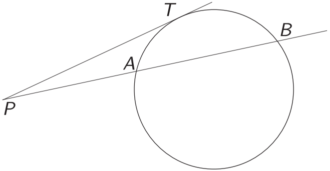
# Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

Il teorema delle secanti permette di definire un nuovo concetto: la *potenza* di un punto rispetto a una circonferenza.



# Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

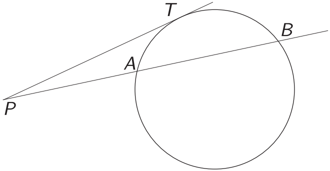
Il teorema delle secanti permette di definire un nuovo concetto: la *potenza* di un punto rispetto a una circonferenza.




Dato un punto $P$ (per ora esterno a una circonferenza data), diciamo *potenza* del punto il prodotto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, dove $A$ e $B$ sono le intersezioni con la circonferenza di una semiretta passante per $P$ e secante la circonferenza, oppure il prodotto $PT^2$, se la semiretta è tangente.

# Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

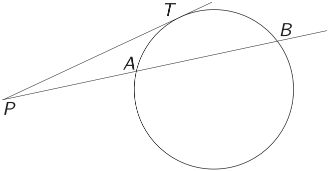
Il teorema delle secanti permette di definire un nuovo concetto: la *potenza* di un punto rispetto a una circonferenza.



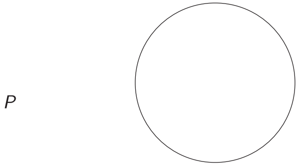

Dato un punto $P$ (per ora esterno a una circonferenza data), diciamo *potenza* del punto il prodotto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, dove $A$ e $B$ sono le intersezioni con la circonferenza di una semiretta passante per $P$ e secante la circonferenza, oppure il prodotto $PT^2$, se la semiretta è tangente. Questo concetto è ben definito, perché per il teorema delle secanti (o della secante e della tangente) esso *non dipende* dalla semiretta scelta, ma solo dalla reciproca posizione di $P$ e della circonferenza.

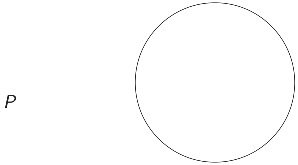
# Potenza di un punto rispetto a una circonferenza

Il teorema delle secanti permette di definire un nuovo concetto: la *potenza* di un punto rispetto a una circonferenza.

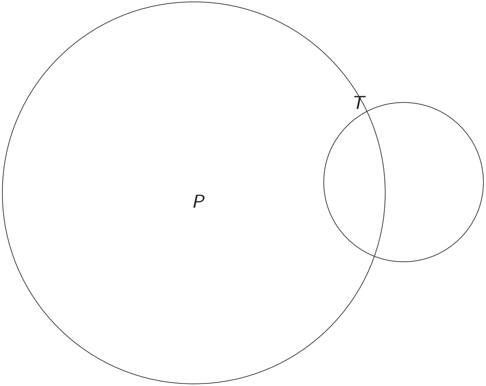



Dato un punto $P$ (per ora esterno a una circonferenza data), diciamo *potenza* del punto il prodotto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, dove $A$ e $B$ sono le intersezioni con la circonferenza di una semiretta passante per $P$ e secante la circonferenza, oppure il prodotto $PT^2$, se la semiretta è tangente. Questo concetto è ben definito, perché per il teorema delle secanti (o della secante e della tangente) esso *non dipende* dalla semiretta scelta, ma solo dalla reciproca posizione di $P$ e della circonferenza.

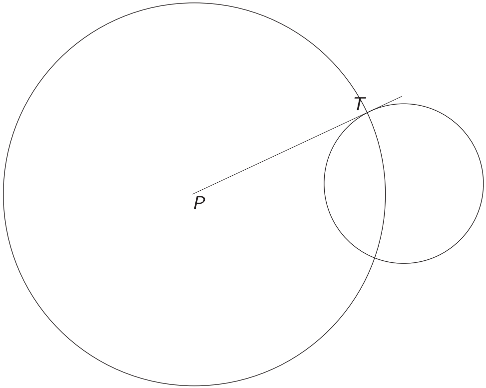

P




Nota la potenza di un punto rispetto a una circonferenza, è facile tracciare le tangenti dal punto ad essa, in quanto essa risulta pari al quadrato del segmento compreso fra il punto e il punto di tangenza.




Basta infatti tracciare una circonferenza di centro $P$ e raggio pari alla radice della potenza, che intersecherà la prima circonferenza esattamente nei punti di tangenza.



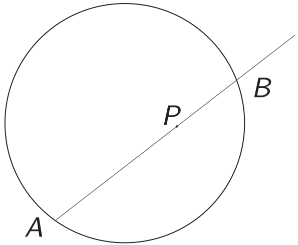

Basta infatti tracciare una circonferenza di centro $P$ e raggio pari alla radice della potenza, che intersecherà la prima circonferenza esattamente nei punti di tangenza.

Se $P$ è sulla circonferenza, allora la sua potenza è evidentemente zero (e viceversa).

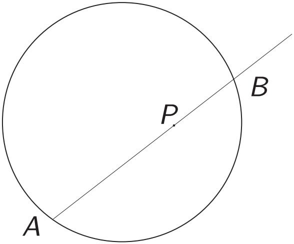
Se $P$ è sulla circonferenza, allora la sua potenza è evidentemente zero (e viceversa).

Se invece $P$ è interno, la definizione è analoga, anzi è la stessa, pensando $\overline{PA}$ negativo:

Se $P$ è sulla circonferenza, allora la sua potenza è evidentemente zero (e viceversa).
Se invece $P$ è interno, la definizione è analoga, anzi è la stessa, pensando $\overline{PA}$ negativo:

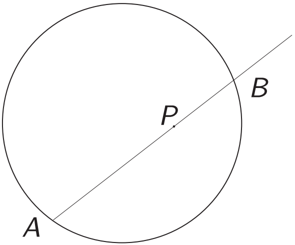


Se $P$ è sulla circonferenza, allora la sua potenza è evidentemente zero (e viceversa).
Se invece $P$ è interno, la definizione è analoga, anzi è la stessa, pensando $\overline{PA}$ negativo:




La potenza è in questo caso pari a $-\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, ed è ben definita grazie al teorema delle corde:

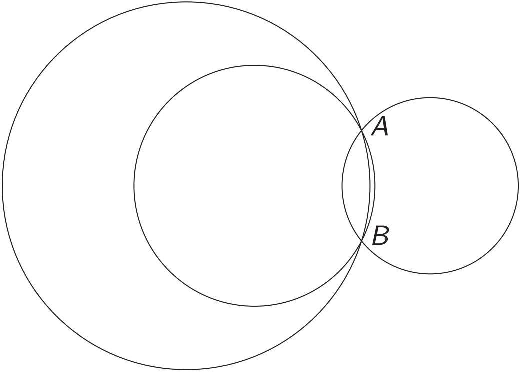
Se $P$ è sulla circonferenza, allora la sua potenza è evidentemente zero (e viceversa).
Se invece $P$ è interno, la definizione è analoga, anzi è la stessa, pensando $\overline{PA}$ negativo:



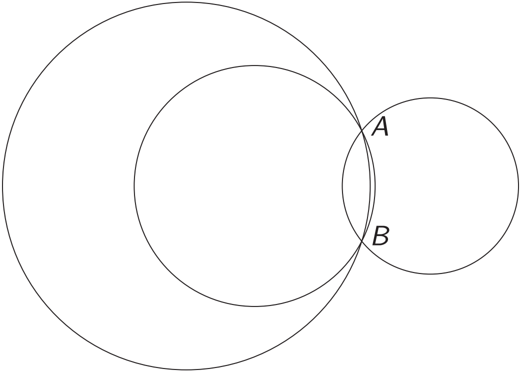

La potenza è in questo caso pari a $-\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, ed è ben definita grazie al teorema delle corde: infatti, grazie a questo teorema, essa non dipende dalla corda passante per $P$ scelta.

Supponiamo ora di considerare tutte le circonferenze passanti per due punti dati:

Supponiamo ora di considerare tutte le circonferenze passanti per due punti dati:

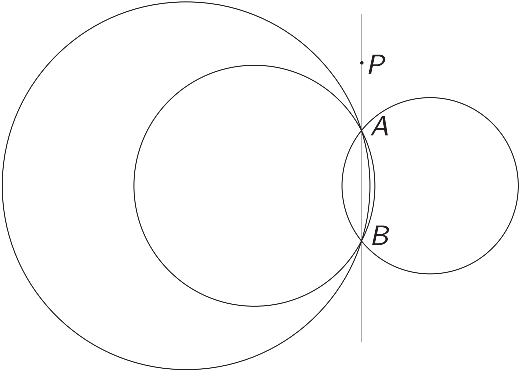


Supponiamo ora di considerare tutte le circonferenze passanti per due punti dati:




e consideriamo la retta per questi due punti e un punto su di essa:

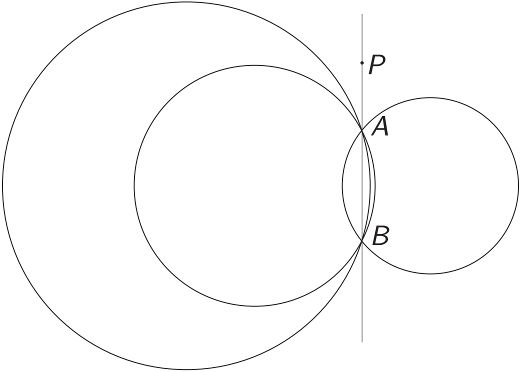
Supponiamo ora di considerare tutte le circonferenze passanti per due punti dati:



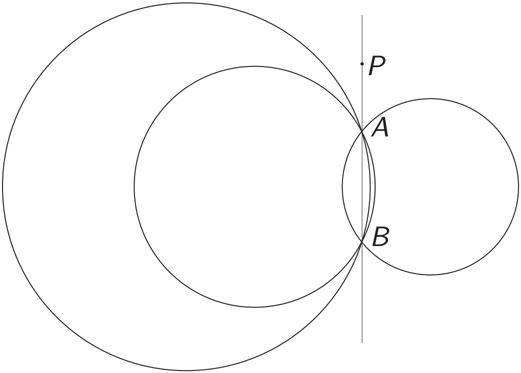

e consideriamo la retta per questi due punti e un punto su di essa:

Siccome $A$ e $B$ restano gli stessi, avremo che *la potenza del punto $P$ è la stessa rispetto a tutte le circonferenze*.

Siccome $A$ e $B$ restano gli stessi, avremo che *la potenza del punto $P$ è la stessa rispetto a tutte le circonferenze*.

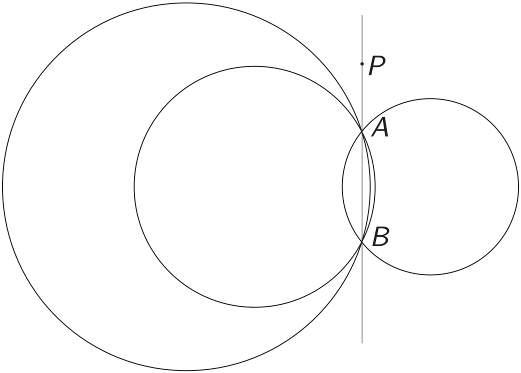


Siccome $A$ e $B$ restano gli stessi, avremo che *la potenza del punto $P$ è la stessa rispetto a tutte le circonferenze*.



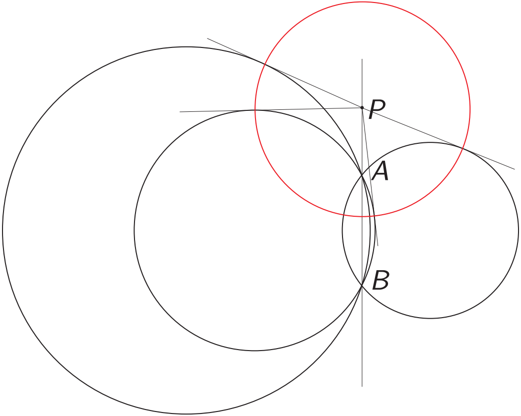

Ma allora, siccome la radice della potenza è il segmento di tangente condotta da $P$ a una delle circonferenze passanti per $A$ e $B$, avremo che

Siccome $A$ e $B$ restano gli stessi, avremo che *la potenza del punto $P$ è la stessa rispetto a tutte le circonferenze*.




Ma allora, siccome la radice della potenza è il segmento di tangente condotta da $P$ a una delle circonferenze passanti per $A$ e $B$, avremo che*i punti di tangenza delle semirette condotte da $P$ stanno su una circonferenza*.

Siccome $A$ e $B$ restano gli stessi, avremo che *la potenza del punto $P$ è la stessa rispetto a tutte le circonferenze*.




Ma allora, siccome la radice della potenza è il segmento di tangente condotta da $P$ a una delle circonferenze passanti per $A$ e $B$, avremo che *i punti di tangenza delle semirette condotte da $P$ stanno su una circonferenza*.

Questa circonferenza è inoltre perpendicolare, nei suoi punti di tangenza, a tutte le circonferenze passanti per $A$ e $B$.

Questa circonferenza è inoltre perpendicolare, nei suoi punti di tangenza, a tutte le circonferenze passanti per $A$ e $B$.