Tautologie e regole logiche

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

Osserviamo questa riflessione.

Osserviamo questa riflessione.

Piove.

Osserviamo questa riflessione.

Piove.

Se piove, allora sono arrabbiato.

Osserviamo questa riflessione.

Piove.

Se piove, allora sono arrabbiato.

Sono arrabbiato.

Osserviamo questa riflessione.

> *Piove.*
>
> *Se piove, allora sono arrabbiato.*
>
> *Sono arrabbiato.*

Sembra una riflessione "giusta", logicamente "corretta".

Osserviamo questa riflessione.

> *Piove.*
>
> *Se piove, allora sono arrabbiato.*
>
> *Sono arrabbiato.*

Sembra una riflessione "giusta", logicamente "corretta".

Naturalmente ci immaginiamo una situazione nella quale una persona nervosa guarda fuori dalla finestra, vede che piove, e siccome quando piove si arrabbia, allora si arrabbia.

Vediamo quest'altra.

Vediamo quest'altra.

3 è un numero dispari.

Vediamo quest'altra.

3 è un numero dispari.

Se 3 è un numero dispari, allora 4 è un numero pari.

Vediamo quest'altra.

3 è un numero dispari.

Se 3 è un numero dispari, allora 4 è un numero pari.

4 è un numero pari.

Vediamo quest'altra.

> *3 è un numero dispari.*
>
> *Se 3 è un numero dispari, allora 4 è un numero pari.*
>
> *4 è un numero pari.*

Anche qui, nulla da eccepire.

Vediamo quest'altra.

> *3 è un numero dispari.*
>
> *Se 3 è un numero dispari, allora 4 è un numero pari.*
>
> *4 è un numero pari.*

Anche qui, nulla da eccepire. La cosa si fa un pochino strana col prossimo caso.

3 è un numero pari.

*3 è un numero pari. (*falso*)*

3 è un numero pari. *(*falso*)*

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero dispari.

3 è un numero pari. (falso)

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero dispari.

4 è un numero dispari.

3 è un numero pari. (falso)

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero dispari.

4 è un numero dispari.

Che dire in questo caso?

3 è un numero pari. (falso)

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero dispari.

4 è un numero dispari.

Che dire in questo caso? Anche se la premessa ("3 è un numero pari") è falsa, sembra che

3 è un numero pari. (falso)

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero dispari.

4 è un numero dispari.

Che dire in questo caso? Anche se la premessa ("3 è un numero pari") è falsa, sembra che

1. Il "ragionamento" (cioè la seconda affermazione) sia corretto

3 è un numero pari. *(*falso*)*

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero dispari.

4 è un numero dispari.

Che dire in questo caso? Anche se la premessa ("3 è un numero pari") è falsa, sembra che

1. Il "ragionamento" (cioè la seconda affermazione) sia corretto
2. La conclusione, anche se falsa, sia dedotta correttamente.

*3 è un numero pari. (*falso*)*

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero dispari.

4 è un numero dispari.

Che dire in questo caso? Anche se la premessa ("3 è un numero pari") è falsa, sembra che

1. Il "ragionamento" (cioè la seconda affermazione) sia corretto
2. La conclusione, anche se falsa, sia dedotta correttamente.

Vediamone uno ancora più strano.

3 è un numero pari.

3 è un numero pari.

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero pari.

3 è un numero pari.

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero pari.

4 è un numero pari.

3 è un numero pari.

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero pari.

4 è un numero pari.

In questo "ragionamento" si parte da una premessa falsa e si deduce una cosa vera. Possiamo affermare (o richiedere) che questa frase sia vera?

3 è un numero pari.

Se 3 è un numero pari, allora 4 è un numero pari.

4 è un numero pari.

In questo "ragionamento" si parte da una premessa falsa e si deduce una cosa vera. Possiamo affermare (o richiedere) che questa frase sia vera? In effetti sì, e vediamo il perché.

Consideriamo la frase

Consideriamo la frase

"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"

Consideriamo la frase

"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"

A rigore pare tutto giusto:

Consideriamo la frase

"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"

A rigore pare tutto giusto: poiché $n + 2$ è superiore ad n, partendo da un numero positivo non si può ottenerne uno negativo più grande.

Consideriamo la frase

"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"

A rigore pare tutto giusto: poiché $n + 2$ è superiore ad n, partendo da un numero positivo non si può ottenerne uno negativo più grande.

Il fatto interessante è però che questa non è una "proposizione" come "3 è dispari" o "3 è pari" perché contiene una variabile, che è n.

Consideriamo la frase

"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"

A rigore pare tutto giusto: poiché $n+2$ è superiore ad n, partendo da un numero positivo non si può ottenerne uno negativo più grande.

Il fatto interessante è però che questa non è una "proposizione" come "3 è dispari" o "3 è pari" perché contiene una variabile, che è n.

L'idea, comunque, è che si vuole affermare la verità di questa frase *per ogni n*,

Consideriamo la frase

"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"

A rigore pare tutto giusto: poiché $n+2$ è superiore ad n, partendo da un numero positivo non si può ottenerne uno negativo più grande.

Il fatto interessante è però che questa non è una "proposizione" come "3 è dispari" o "3 è pari" perché contiene una variabile, che è n.

L'idea, comunque, è che si vuole affermare la verità di questa frase *per ogni n*, che significa che possiamo sostituire ad n un numero qualunque.

Consideriamo la frase

"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"

A rigore pare tutto giusto: poiché $n+2$ è superiore ad n, partendo da un numero positivo non si può ottenerne uno negativo più grande.

Il fatto interessante è però che questa non è una "proposizione" come "3 è dispari" o "3 è pari" perché contiene una variabile, che è n.

L'idea, comunque, è che si vuole affermare la verità di questa frase *per ogni* n, che significa che possiamo sostituire ad n un numero qualunque.

Dunque, per esempio possiamo sostituire 3 ad n e trovare

Consideriamo la frase

"*Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo*"

A rigore pare tutto giusto: poiché $n + 2$ è superiore ad n, partendo da un numero positivo non si può ottenerne uno negativo più grande.

Il fatto interessante è però che questa non è una "proposizione" come "3 è dispari" o "3 è pari" perché contiene una variabile, che è n.

L'idea, comunque, è che si vuole affermare la verità di questa frase *per ogni n*, che significa che possiamo sostituire ad n un numero qualunque.

Dunque, per esempio possiamo sostituire 3 ad n e trovare

"*Se* 3 *è positivo, allora* 5 *è positivo*"

Consideriamo la frase

> *"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"*

A rigore pare tutto giusto: poiché $n+2$ è superiore ad n, partendo da un numero positivo non si può ottenerne uno negativo più grande.

Il fatto interessante è però che questa non è una "proposizione" come "3 è dispari" o "3 è pari" perché contiene una variabile, che è n.

L'idea, comunque, è che si vuole affermare la verità di questa frase *per ogni* n, che significa che possiamo sostituire ad n un numero qualunque.

Dunque, per esempio possiamo sostituire 3 ad n e trovare

> *"Se* 3 *è positivo, allora* 5 *è positivo"*

che è una frase senza dubbio vera, anche se forse un po' strana.

Ma se ora nella frase

Ma se ora nella frase

"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"

Ma se ora nella frase

"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"

sostituiamo -1 ad n troviamo

Ma se ora nella frase

> *"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"*

sostituiamo -1 ad n troviamo

> *"Se -1 è positivo, allora* 1 *è positivo"*.

Ma se ora nella frase

> *"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"*

sostituiamo -1 ad n troviamo

> *"Se -1 è positivo, allora 1 è positivo"*.

È stranissima come frase, ma dobbiamo accettare che sia giusta se vogliamo che la frase "generale" con la variabile sia vera. E, di conseguenza, anche questa sarà vera, ottenuta sostituendo -3 ad n:

Ma se ora nella frase

"Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo"

sostituiamo -1 ad n troviamo

"Se -1 è positivo, allora 1 è positivo".

È stranissima come frase, ma dobbiamo accettare che sia giusta se vogliamo che la frase "generale" con la variabile sia vera. E, di conseguenza, anche questa sarà vera, ottenuta sostituendo -3 ad n:

"Se -3 è positivo, allora -1 è positivo".

Ma se ora nella frase

"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"

sostituiamo -1 ad n troviamo

"Se -1 *è positivo, allora* 1 *è positivo".*

È stranissima come frase, ma dobbiamo accettare che sia giusta se vogliamo che la frase "generale" con la variabile sia vera. E, di conseguenza, anche questa sarà vera, ottenuta sostituendo -3 ad n:

"Se -3 *è positivo, allora* -1 *è positivo".*

Da questo ragionamento capiamo che ci conviene accettare che una *implicazione* (se... allora...) è vera sia quando entrambe le frasi sono vere, sia quando la prima frase è falsa.

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

Per esempio, la frase

Se 3 è dispari, allora 4 è dispari

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

Per esempio, la frase

Se 3 è dispari, allora 4 è dispari

ci sembra falsa.

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

Per esempio, la frase

Se 3 è dispari, allora 4 è dispari

ci sembra falsa. E in effetti, nella frase di poco fa

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

Per esempio, la frase

Se 3 è dispari, allora 4 è dispari

ci sembra falsa. E in effetti, nella frase di poco fa

"*Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo*"

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

Per esempio, la frase

Se 3 è dispari, allora 4 è dispari

ci sembra falsa. E in effetti, nella frase di poco fa

"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"

non troveremo mai un caso nel quale n sia positivo (dunque premessa vera)

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

Per esempio, la frase

> *Se 3 è dispari, allora 4 è dispari*

ci sembra falsa. E in effetti, nella frase di poco fa

> "*Se n è positivo, allora $n + 2$ è positivo*"

non troveremo mai un caso nel quale n sia positivo (dunque premessa vera) e $n + 2$ negativo (conclusione falsa).

L'unico caso la cui verità ci sentiamo di escludere è quello in cui la prima frase è vera e la seconda falsa.

Per esempio, la frase

Se 3 è dispari, allora 4 è dispari

ci sembra falsa. E in effetti, nella frase di poco fa

"Se n è positivo, allora $n+2$ è positivo"

non troveremo mai un caso nel quale n sia positivo (dunque premessa vera) e $n+2$ negativo (conclusione falsa). Ciò accade proprio perché l'implicazione è vera.

Se riassumiamo i quattro possibili casi di verità e di falsità delle proposizioni componenti (quella di n e quella di $n+2$), troviamo la tabella di "Se... allora":

Se riassumiamo i quattro possibili casi di verità e di falsità delle proposizioni componenti (quella di n e quella di $n+2$), troviamo la tabella di "Se... allora":

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	Se $\mathscr{P}$ allora $\mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ora verifichiamo una cosa.

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Fa davvero ridere.

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Fa davvero ridere. Allora abbreviamo la dicitura "se... allora" con $\Rightarrow$.

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Fa davvero ridere. Allora abbreviamo la dicitura "se... allora" con $\Rightarrow$. In altre parole

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Fa davvero ridere. Allora abbreviamo la dicitura "se... allora" con $\Rightarrow$. In altre parole

$$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q} \quad \text{significa "se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q}\text{".}$$

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Fa davvero ridere. Allora abbreviamo la dicitura "se... allora" con $\Rightarrow$. In altre parole

$$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q} \quad \text{significa "se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q}\text{".}$$

La frase risulta allora riscritta così, con le parentesi per capire meglio:

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Fa davvero ridere. Allora abbreviamo la dicitura "se... allora" con $\Rightarrow$. In altre parole

$$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q} \quad \text{significa "se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q}\text{".}$$

La frase risulta allora riscritta così, con le parentesi per capire meglio:

$$[\mathscr{P} \text{ e } (\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$$

Ora verifichiamo una cosa. Consideriamo questa proposizione:

Se $\mathscr{P}$, e se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$, allora $\mathscr{Q}$.

Fa davvero ridere. Allora abbreviamo la dicitura “se... allora” con $\Rightarrow$. In altre parole

$$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q} \quad \text{significa “se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q}\text{”.}$$

La frase risulta allora riscritta così, con le parentesi per capire meglio:

$$[\mathscr{P} \text{ e } (\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$$

Quello che vogliamo studiare ora è la tabella di verità di questa proposizione (vedi la lezione “La logica delle proposizioni”).

Riportiamo dapprima la tabella di $\Rightarrow$, e accanto la prima parte della proposizione $(\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}))$:

Riportiamo dapprima la tabella di $\Rightarrow$, e accanto la prima parte della proposizione ($\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$):

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$
V	V	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

Per trovare l'ultima colonna, dobbiamo ricordare che la congiunzione "e" è vera solo quando entrambe le proposizioni sono vere.

Per trovare l'ultima colonna, dobbiamo ricordare che la congiunzione "e" è vera solo quando entrambe le proposizioni sono vere. In definitiva, allora, guardando alla prima colonna, che contiene $\mathscr{P}$, e alla terza, troviamo

Per trovare l'ultima colonna, dobbiamo ricordare che la congiunzione "e" è vera solo quando entrambe le proposizioni sono vere. In definitiva, allora, guardando alla prima colonna, che contiene $\mathscr{P}$, e alla terza, troviamo

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Ora, per finire, dobbiamo aggiungere una colonna con la proposizione finale:

Ora, per finire, dobbiamo aggiungere una colonna con la proposizione finale:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V	V	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	F	V	F	

Ora, per finire, dobbiamo aggiungere una colonna con la proposizione finale:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V	V	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	F	V	F	

nella quale abbiamo segnato in rosso le proposizioni da comporre.

Ora, per finire, dobbiamo aggiungere una colonna con la proposizione finale:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V	V	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	F	V	F	

nella quale abbiamo segnato in rosso le proposizioni da comporre. Allora semplifichiamo tutto lasciando solo le proposizioni da comporre:

$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$\mathscr{Q}$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	
F	F	
F	V	
F	F	

$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$\mathscr{Q}$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	
F	F	
F	V	
F	F	

e adesso componiamo secondo la regola di $\Rightarrow$.

$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$\mathscr{Q}$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	
F	F	
F	V	
F	F	

e adesso componiamo secondo la regola di $\Rightarrow$.Ricordiamo che $\Rightarrow$ dava F solo quando la prima era V e la seconda F, ma questo non capita mai, e dunque

$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$\mathscr{Q}$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
F	F	V
F	V	V
F	F	V

$\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$\mathscr{Q}$	$[\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})] \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
F	F	V
F	V	V
F	F	V

Vediamo quindi che la nostra proposizione è una *tautologia*, ossia è sempre vera qualunque sia il valore di verità delle proposizioni che vi entrano.

Il fatto che la proposizione che abbiamo analizzato sia una tautologia è alla base del seguente ragionamento:

Il fatto che la proposizione che abbiamo analizzato sia una tautologia è alla base del seguente ragionamento:

$$\mathscr{P}$$

Il fatto che la proposizione che abbiamo analizzato sia una tautologia è alla base del seguente ragionamento:

$$\mathscr{P}$$

Se $\mathscr{P}$, allora $\mathscr{Q}$

Il fatto che la proposizione che abbiamo analizzato sia una tautologia è alla base del seguente ragionamento:

$$\begin{array}{rl} & \mathscr{P} \\ & \text{Se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q} \\ \textit{Conclusione:} & \mathscr{Q} \end{array}$$

Il fatto che la proposizione che abbiamo analizzato sia una tautologia è alla base del seguente ragionamento:

$$\begin{aligned} & \mathscr{P} \\ & \text{Se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q} \\ \textit{Conclusione: } & \mathscr{Q} \end{aligned}$$

Questa è una *regola logica*:

Il fatto che la proposizione che abbiamo analizzato sia una tautologia è alla base del seguente ragionamento:

$$\begin{array}{rl} & \mathscr{P} \\ & \text{Se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q} \\ \textit{Conclusione:} & \mathscr{Q} \end{array}$$

Questa è una *regola logica*: permette di dedurre una conclusione in modo logicamente corretto.

Il fatto che la proposizione che abbiamo analizzato sia una tautologia è alla base del seguente ragionamento:

$$\mathscr{P}$$

$$\text{Se } \mathscr{P}\text{, allora } \mathscr{Q}$$

$$\textit{Conclusione: } \mathscr{Q}$$

Questa è una *regola logica*: permette di dedurre una conclusione in modo logicamente corretto.
Il suo nome è *modus ponens*, e si usa moltissimo nelle dimostrazioni.

Ecco un esempio di utilizzo del modus ponens:

Ecco un esempio di utilizzo del modus ponens:

$\underbrace{\text{Questo triangolo ha i lati uguali}}_{\mathscr{P}}$.

Ecco un esempio di utilizzo del modus ponens:

$\underbrace{\text{Questo triangolo ha i lati uguali}}_{\mathscr{P}}$.

Se $\underbrace{\text{questo triangolo ha i lati uguali}}_{\mathscr{P}}$, allora $\underbrace{\text{questo triangolo ha gli angoli uguali}}_{\mathscr{Q}}$

Ecco un esempio di utilizzo del modus ponens:

$\underbrace{\text{Questo triangolo ha i lati uguali}}_{\mathscr{P}}$.

Se $\underbrace{\text{questo triangolo ha i lati uguali}}_{\mathscr{P}}$, allora $\underbrace{\text{questo triangolo ha gli angoli uguali}}_{\mathscr{Q}}$

$\underbrace{\text{Questo triangolo ha gli angoli uguali}}_{\mathscr{Q}}$.

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche.

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti.

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti. Per esempio,

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti. Per esempio,

$$\mathscr{P} \Rightarrow (\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{P})$$

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti. Per esempio,

$$\mathscr{P} \Rightarrow (\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{P})$$

è una tautologia.

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti. Per esempio,

$$\mathscr{P} \Rightarrow (\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{P})$$

è una tautologia.

Infatti, $\mathscr{P}$ e $(\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{P})$ hanno sempre gli stessi valori di verità

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti. Per esempio,

$$\mathscr{P} \Rightarrow (\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{P})$$

è una tautologia.

Infatti, $\mathscr{P}$ e ($\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$) hanno sempre gli stessi valori di verità (se $\mathscr{P}$ è vera, lo è anche $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$, e analogamente se è falsa).

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti. Per esempio,

$$\mathscr{P} \Rightarrow (\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{P})$$

è una tautologia.

Infatti, $\mathscr{P}$ e ($\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$) hanno sempre gli stessi valori di verità (se $\mathscr{P}$ è vera, lo è anche $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$, e analogamente se è falsa).
Dato che l'implicazione è falsa solo quando da `V` segue `F`, ne segue che questa è una tautologia.

Vi è un legame stretto fra le tautologie e le regole logiche. In pratica, dato che in una tautologia i valori di verità delle proposizioni possono essere qualunque, quando un enunciato proviene da una tautologie è sempre vero.
Alcune proposizioni sono tautologie ma non permettono di trarre delle conclusioni interessanti. Per esempio,

$$\mathscr{P} \Rightarrow (\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{P})$$

è una tautologia.

Infatti, $\mathscr{P}$ e ($\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$) hanno sempre gli stessi valori di verità (se $\mathscr{P}$ è vera, lo è anche $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$, e analogamente se è falsa).
Dato che l'implicazione è falsa solo quando da `V` segue `F`, ne segue che questa è una tautologia.
A quale regola logica corrisponde?

Non è molto interessante:

Non è molto interessante:

"Se 3 è dispari, allora 3 è dispari e 3 è dispari"

Non è molto interessante:

"Se 3 è dispari, allora 3 è dispari e 3 è dispari"

che è una totale banalità.

Non è molto interessante:

> *"Se 3 è dispari, allora 3 è dispari e 3 è dispari"*

che è una totale banalità.
Il linguaggio, poi, fa strani scherzi: per esempio, se invece di "3 è dispari" scriviamo "piove", avremmo

Non è molto interessante:

> *"Se 3 è dispari, allora 3 è dispari e 3 è dispari"*

che è una totale banalità.
Il linguaggio, poi, fa strani scherzi: per esempio, se invece di "3 è dispari" scriviamo "piove", avremmo

> *"Se piove, allora piove e piove"*

Non è molto interessante:

> *"Se 3 è dispari, allora 3 è dispari e 3 è dispari"*

che è una totale banalità.
Il linguaggio, poi, fa strani scherzi: per esempio, se invece di "3 è dispari" scriviamo "piove", avremmo

> *"Se piove, allora piove e piove"*

che sembra avere un significato, ma solo perché "piove e piove" potrebbe voler dire "piove senza interruzione".

Non è molto interessante:

"Se 3 è dispari, allora 3 è dispari e 3 è dispari"

che è una totale banalità.
Il linguaggio, poi, fa strani scherzi: per esempio, se invece di "3 è dispari" scriviamo "piove", avremmo

"Se piove, allora piove e piove"

che sembra avere un significato, ma solo perché "piove e piove" potrebbe voler dire "piove senza interruzione".
Questa frase ha un significato (e potrebbe essere falsa per una pioggerellina breve) per la sua interpretazione nel linguaggio, che non c'entra in questo caso con la logica.

Vediamo ora questo dialogo:

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?
— Perché sei vestita di verde. Se sei vestita di verde, allora sei elegante.

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?
— Perché sei vestita di verde. Se sei vestita di verde, allora sei elegante.
— Ma allora se non sono vestita di verde, non sono elegante?

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?
— Perché sei vestita di verde. Se sei vestita di verde, allora sei elegante.
— Ma allora se non sono vestita di verde, non sono elegante?
— Non ho detto questo...

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?
— Perché sei vestita di verde. Se sei vestita di verde, allora sei elegante.
— Ma allora se non sono vestita di verde, non sono elegante?
— Non ho detto questo...
— E invece sì. Tu hai detto che se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante, no?

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?
— Perché sei vestita di verde. Se sei vestita di verde, allora sei elegante.
— Ma allora se non sono vestita di verde, non sono elegante?
— Non ho detto questo...
— E invece sì. Tu hai detto che se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante, no?
— ...

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?
— Perché sei vestita di verde. Se sei vestita di verde, allora sei elegante.
— Ma allora se non sono vestita di verde, non sono elegante?
— Non ho detto questo...
— E invece sì. Tu hai detto che se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante, no?
— ...

Non continuiamo questo che pare essere un dialogo fra sordi.

Vediamo ora questo dialogo:

— Come sei elegante.
— Grazie, com'è che te ne sei accorto?
— Perché sei vestita di verde. Se sei vestita di verde, allora sei elegante.
— Ma allora se non sono vestita di verde, non sono elegante?
— Non ho detto questo...
— E invece sì. Tu hai detto che se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante, no?
— ...

Non continuiamo questo che pare essere un dialogo fra sordi. Ma c'è una cosa interessante.

A un certo punto viene fatta la seguente affermazione:

A un certo punto viene fatta la seguente affermazione:

> *"se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante"*

A un certo punto viene fatta la seguente affermazione:

> *"se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante"*

Essa ha l'aria di una regola logica. Vediamo.

“se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante”

> *"se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante"*

ha la seguente struttura:

> *"se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante"*

ha la seguente struttura:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se non } \mathscr{P}, \text{ allora non } \mathscr{Q}).$$

> *"se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante"*

ha la seguente struttura:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se non } \mathscr{P}, \text{ allora non } \mathscr{Q}).$$

$$(\text{se } \underbrace{\mathscr{P}}_{\text{sono vestita di verde}}, \text{ allora } \underbrace{\mathscr{Q}}_{\text{sono elegante}}), \text{ allora}$$

$$(\text{se } \underbrace{\text{non } \mathscr{P}}_{\text{non sono vestita di verde}}, \text{ allora } \underbrace{\text{non } \mathscr{P}}_{\text{non sono elegante.}})$$

> *"se sono vestita di verde, sono elegante, e quindi se non sono vestita di verde non sono elegante"*

ha la seguente struttura:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se non } \mathscr{P}, \text{ allora non } \mathscr{Q}).$$

$$(\text{se } \underbrace{\mathscr{P}}_{\text{sono vestita di verde}}, \text{ allora } \underbrace{\mathscr{Q}}_{\text{sono elegante}}), \text{ allora}$$

$$(\text{se } \underbrace{\text{non } \mathscr{P}}_{\text{non sono vestita di verde}}, \text{ allora } \underbrace{\text{non } \mathscr{P}}_{\text{non sono elegante.}})$$

Vediamo se a questa "regola logica" corrisponde una tautologia.

Usando la scrittura $\Rightarrow$ per "se... allora..." dobbiamo analizzare la proposizione

Usando la scrittura $\Rightarrow$ per "se... allora..." dobbiamo analizzare la proposizione

$$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow (\text{non}\,\mathscr{P} \Rightarrow \text{non}\,\mathscr{Q})$$

Usando la scrittura $\Rightarrow$ per "se... allora..." dobbiamo analizzare la proposizione

$$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow (\text{non}\,\mathscr{P} \Rightarrow \text{non}\,\mathscr{Q})$$

Cominciamo con l'implicazione $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

Usando la scrittura $\Rightarrow$ per "se... allora..." dobbiamo analizzare la proposizione

$$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow (\text{non}\, \mathscr{P} \Rightarrow \text{non}\, \mathscr{Q})$$

Cominciamo con l'implicazione $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Usando la scrittura $\Rightarrow$ per "se... allora..." dobbiamo analizzare la proposizione

$$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow (\text{non}\, \mathscr{P} \Rightarrow \text{non}\, \mathscr{Q})$$

Cominciamo con l'implicazione $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Adesso invertiamo i valori di verità di $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ e troviamo quelli di non $\mathscr{P}$, non $\mathscr{Q}$:

non $\mathscr{P}$	non $\mathscr{Q}$	non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

non $\mathscr{P}$	non $\mathscr{Q}$	non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Notate che l'ultima colonna non è semplicemente l'inversa della precedente

non $\mathscr{P}$	non $\mathscr{Q}$	non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Notate che l'ultima colonna non è semplicemente l'inversa della precedente

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

non $\mathscr{P}$	non $\mathscr{Q}$	non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Notate che l'ultima colonna non è semplicemente l'inversa della precedente

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

in quanto si deve sempre applicare la regola secondo la quale l'implicazione è falsa solo quando da V segue F.

Adesso basta ricopiare le ultime due colonne e applicare di nuovo la regola dell'implicazione per vedere cosa succede:

Adesso basta ricopiare le ultime due colonne e applicare di nuovo la regola dell'implicazione per vedere cosa succede:

$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$	$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow$ (non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$)
V	V	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Adesso basta ricopiare le ultime due colonne e applicare di nuovo la regola dell'implicazione per vedere cosa succede:

$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$	$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow$ (non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$)
V	V	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Come vedete, c'è un caso in cui la proposizione composta viene falsa:

Adesso basta ricopiare le ultime due colonne e applicare di nuovo la regola dell'implicazione per vedere cosa succede:

$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$	$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow$ (non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$)
V	V	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Come vedete, c'è un caso in cui la proposizione composta viene falsa: dunque non è una tautologia e il "ragionamento" è sbagliato.

Possiamo anche vedere quando è sbagliato:

Possiamo anche vedere quando è sbagliato: è sbagliato nella terza riga, ossia quando $\mathscr{P}$ è falsa e $\mathscr{Q}$ è vera,

Possiamo anche vedere quando è sbagliato: è sbagliato nella terza riga, ossia quando $\mathscr{P}$ è falsa e $\mathscr{Q}$ è vera,

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathscr{P} \Rightarrow \text{non } \mathscr{Q})$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Possiamo anche vedere quando è sbagliato: è sbagliato nella terza riga, ossia quando $\mathscr{P}$ è falsa e $\mathscr{Q}$ è vera,

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathscr{P} \Rightarrow \text{non } \mathscr{Q})$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

ossia quando l'amica *non* è vestita di verde ma è elegante lo stesso, come il primo dialogante voleva dire quando diceva "non ho detto questo...".

Un ragionamento corretto è invece questo:

Un ragionamento corretto è invece questo:

> *"Se quando sei vestita di verde sei elegante, allora se non sei elegante non sei vestita di verde"*

Un ragionamento corretto è invece questo:

> *"Se quando sei vestita di verde sei elegante, allora se non sei elegante non sei vestita di verde"*

La struttura di questa frase è ora la seguente:

Un ragionamento corretto è invece questo:

> *"Se quando sei vestita di verde sei elegante, allora se non sei elegante non sei vestita di verde"*

La struttura di questa frase è ora la seguente:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se non } \mathscr{Q}, \text{ allora non } \mathscr{P}).$$

Un ragionamento corretto è invece questo:

> *"Se quando sei vestita di verde sei elegante, allora se non sei elegante non sei vestita di verde"*

La struttura di questa frase è ora la seguente:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se } \text{ non}\,\mathscr{Q}, \text{ allora } \text{ non}\,\mathscr{P}).$$

che differisce dalla precedente, quella del dialogo, per l'inversione delle due proposizioni:

Un ragionamento corretto è invece questo:

> *"Se quando sei vestita di verde sei elegante, allora se non sei elegante non sei vestita di verde"*

La struttura di questa frase è ora la seguente:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se non } \mathscr{Q}, \text{ allora non } \mathscr{P}).$$

che differisce dalla precedente, quella del dialogo, per l'inversione delle due proposizioni:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se non } \mathscr{P}, \text{ allora non } \mathscr{Q}). \text{ (ERRATA)}$$

Un ragionamento corretto è invece questo:

> *"Se quando sei vestita di verde sei elegante, allora se non sei elegante non sei vestita di verde"*

La struttura di questa frase è ora la seguente:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se } \text{ non } \mathscr{Q}, \text{ allora } \text{ non } \mathscr{P}).$$

che differisce dalla precedente, quella del dialogo, per l'inversione delle due proposizioni:

$$(\text{Se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q}), \text{ allora } (\text{se } \text{ non } \mathscr{P}, \text{ allora } \text{ non } \mathscr{Q}). \text{ (ERRATA)}$$

Vediamo ora di verificare che la prima è una tautologia.

Questa tabella la conosciamo bene:

Questa tabella la conosciamo bene:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Questa tabella la conosciamo bene:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

e adesso formiamo quella di (se non $\mathscr{Q}$, allora non $\mathscr{P}$):

Questa tabella la conosciamo bene:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

e adesso formiamo quella di (se non $\mathscr{Q}$, allora non $\mathscr{P}$):(dobbiamo invertire le colonne di $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ e poi invertire i valori di verità)

Questa tabella la conosciamo bene:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

e adesso formiamo quella di (se non $\mathscr{Q}$, allora non $\mathscr{P}$):(dobbiamo invertire le colonne di $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ e poi invertire i valori di verità)

non $\mathscr{Q}$	non $\mathscr{P}$	non $\mathscr{Q} \Rightarrow$ non $\mathscr{P}$
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

Adesso riuniamo tutto come abbiamo fatto prima e troviamo

Adesso riuniamo tutto come abbiamo fatto prima e troviamo

$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	non $\mathscr{Q} \Rightarrow$ non $\mathscr{P}$	$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow$ (non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q}$)
V	V	V
F	F	V
V	V	V
V	V	V

Adesso riuniamo tutto come abbiamo fatto prima e troviamo

$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	non $\mathscr{Q} \Rightarrow$ non $\mathscr{P}$	$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow ($non $\mathscr{P} \Rightarrow$ non $\mathscr{Q})$
V	V	V
F	F	V
V	V	V
V	V	V

Come vediamo il risultato che prima era rosso e F, adesso è V, e poiché gli altri non sono cambiati, abbiamo una tautologia.

Una tautologia simile alla precedente è questa:

Una tautologia simile alla precedente è questa:

$$(\text{non}\,\mathscr{Q})\ \text{e}\ (\text{se}\ \mathscr{P},\ \text{allora}\ \mathscr{Q})),\ \text{allora}\ \ \text{non}\,\mathscr{P}).$$

Una tautologia simile alla precedente è questa:

$$(\text{non}\,\mathscr{Q})\ \text{e}\ (\text{se}\ \mathscr{P},\ \text{allora}\ \mathscr{Q})),\ \text{allora}\ \ \text{non}\,\mathscr{P}).$$

Qui l'esempio sarebbe

Una tautologia simile alla precedente è questa:

$$(\text{non}\,\mathscr{Q})\ \text{e}\ (\text{se}\ \mathscr{P},\ \text{allora}\ \mathscr{Q})),\ \text{allora}\ \ \text{non}\,\mathscr{P}).$$

Qui l'esempio sarebbe

$$\underbrace{\text{Non sei elegante}}_{\text{non}\,\mathscr{Q}}.$$

Una tautologia simile alla precedente è questa:

$$(\text{non}\,\mathscr{Q}) \text{ e } (\text{se } \mathscr{P}, \text{ allora } \mathscr{Q})), \text{ allora } \ \text{non}\,\mathscr{P}).$$

Qui l'esempio sarebbe

$$\underbrace{\text{Non sei elegante}}_{\text{non}\,\mathscr{Q}}.$$

$$\text{Se } \underbrace{\text{sei vestita di verde}}_{\mathscr{P}}, \text{ allora } \underbrace{\text{sei elegante}}_{\mathscr{Q}}.$$

Conclusione: $\underbrace{\text{Non sei vestita di verde}}_{\text{non}\,\mathscr{P}}.$

Una tautologia simile alla precedente è questa:

$$(\text{non}\,\mathscr{Q})\ \text{e}\ (\text{se}\ \mathscr{P},\ \text{allora}\ \mathscr{Q})),\ \text{allora}\ \ \text{non}\,\mathscr{P}).$$

Qui l'esempio sarebbe

$$\underbrace{\text{Non sei elegante}}_{\text{non}\,\mathscr{Q}}.$$

$$\text{Se}\ \underbrace{\text{sei vestita di verde}}_{\mathscr{P}},\ \text{allora}\ \underbrace{\text{sei elegante}}_{\mathscr{Q}}.$$

$$\textit{Conclusione:}\quad \underbrace{\text{Non sei vestita di verde}}_{\text{non}\,\mathscr{P}}.$$

Si può constatare che questa è una tautologia, e la sua applicazione alla vita quotidiana è simile alla precedente.

La regola logica che sta dietro a questa tautologia si può scrivere

La regola logica che sta dietro a questa tautologia si può scrivere

non $\mathscr{Q}$.

La regola logica che sta dietro a questa tautologia si può scrivere

$$\text{non } \mathscr{Q}.$$
$$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}.$$

La regola logica che sta dietro a questa tautologia si può scrivere

$$
\begin{aligned}
&\text{non } \mathscr{Q}. \\
&\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}. \\
\textit{Conclusione:}\quad &\text{non } \mathscr{P}.
\end{aligned}
$$

La regola logica che sta dietro a questa tautologia si può scrivere

$$\begin{aligned} & \text{non } \mathscr{Q}. \\ & \mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}. \\ \textit{Conclusione:} \quad & \text{non } \mathscr{P}. \end{aligned}$$

e si chiama *modus tollens*.

Non tutte le tautologie sono costruite con l'implicazione $\Rightarrow$.

Non tutte le tautologie sono costruite con l'implicazione $\Rightarrow$. Una molto nota è la seguente:

Non tutte le tautologie sono costruite con l'implicazione $\Rightarrow$. Una molto nota è la seguente:

$$\mathscr{P} \text{ oppure } (\text{non } \mathscr{P}).$$

Non tutte le tautologie sono costruite con l'implicazione $\Rightarrow$. Una molto nota è la seguente:

$$\mathscr{P} \text{ oppure } (\text{non } \mathscr{P}).$$

È facile rendersi conto che questa è una tautologia se si ricorda dalla lezione sui connettivi che $\mathscr{P}$ oppure $\mathscr{Q}$ è falsa solo quando entrambe le proposizioni.

Non tutte le tautologie sono costruite con l'implicazione $\Rightarrow$. Una molto nota è la seguente:

$$\mathscr{P} \text{ oppure } (\text{non } \mathscr{P}).$$

È facile rendersi conto che questa è una tautologia se si ricorda dalla lezione sui connettivi che $\mathscr{P}$ oppure $\mathscr{Q}$ è falsa solo quando entrambe le proposizioni. Siccome delle due $\mathscr{P}$ e non $\mathscr{P}$ almeno una è vera, questa è una tautologia e si chiama *legge del terzo escluso*.

Non tutte le tautologie sono costruite con l'implicazione $\Rightarrow$. Una molto nota è la seguente:

$$\mathscr{P} \text{ oppure } (\text{non } \mathscr{P}).$$

È facile rendersi conto che questa è una tautologia se si ricorda dalla lezione sui connettivi che $\mathscr{P}$ oppure $\mathscr{Q}$ è falsa solo quando entrambe le proposizioni. Siccome delle due $\mathscr{P}$ e non $\mathscr{P}$ almeno una è vera, questa è una tautologia e si chiama *legge del terzo escluso*.
Enunciata, suona così:

> *"Piove, oppure non piove."*

Un'altra è la seguente:

Un'altra è la seguente:

$$\text{non}(\text{non}(\mathscr{P})) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Dalle regole dei connettivi sappiamo che non(non $\mathscr{P}$) ha gli stessi valori di verità di $\mathscr{P}$, dunque la tabella è la seguente:

Un'altra è la seguente:

$$\text{non}(\text{non}(\mathscr{P})) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Dalle regole dei connettivi sappiamo che non(non $\mathscr{P}$) ha gli stessi valori di verità di $\mathscr{P}$, dunque la tabella è la seguente:

non(non($\mathscr{P}$))		non(non($\mathscr{P}$)) $\Rightarrow \mathscr{P}$
V	V	V
F	F	V

Un'altra è la seguente:

$$\mathrm{non}(\mathrm{non}(\mathscr{P})) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Dalle regole dei connettivi sappiamo che non(non $\mathscr{P}$) ha gli stessi valori di verità di $\mathscr{P}$, dunque la tabella è la seguente:

non(non($\mathscr{P}$))		non(non($\mathscr{P}$)) $\Rightarrow \mathscr{P}$
V	V	V
F	F	V

e pertanto anche questa è una tautologia.

Un'altra è la seguente:

$$\text{non}(\text{non}(\mathscr{P})) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Dalle regole dei connettivi sappiamo che non(non $\mathscr{P}$) ha gli stessi valori di verità di $\mathscr{P}$, dunque la tabella è la seguente:

non(non($\mathscr{P}$))		non(non($\mathscr{P}$)) $\Rightarrow$ $\mathscr{P}$
V	V	V
F	F	V

e pertanto anche questa è una tautologia.Essa corrisponde alla regola logica della *doppia negazione*. Per esempio

"Se non sono ineleggibile, allora sono eleggibile."

Indichiamo con $\mathscr{C}$ una contraddizione, ossia una proposizione sempre falsa, e con $\mathscr{P}$ una proposizione qualunque.

Indichiamo con $\mathscr{C}$ una contraddizione, ossia una proposizione sempre falsa, e con $\mathscr{P}$ una proposizione qualunque. Analizziamo la seguente proposizione composta:

Indichiamo con $\mathscr{C}$ una contraddizione, ossia una proposizione sempre falsa, e con $\mathscr{P}$ una proposizione qualunque. Analizziamo la seguente proposizione composta:

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Indichiamo con $\mathscr{C}$ una contraddizione, ossia una proposizione sempre falsa, e con $\mathscr{P}$ una proposizione qualunque. Analizziamo la seguente proposizione composta:

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Cominciamo con i valori di verità della prima parte:

Indichiamo con $\mathscr{C}$ una contraddizione, ossia una proposizione sempre falsa, e con $\mathscr{P}$ una proposizione qualunque. Analizziamo la seguente proposizione composta:

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Cominciamo con i valori di verità della prima parte:

$$(\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}.$$

Indichiamo con $\mathscr{C}$ una contraddizione, ossia una proposizione sempre falsa, e con $\mathscr{P}$ una proposizione qualunque. Analizziamo la seguente proposizione composta:

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Cominciamo con i valori di verità della prima parte:

$$(\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}.$$

I valori di $\mathscr{P}$ sono i soliti, quelli di (non $\mathscr{P}$) sono invertiti, mentre quelli di $\mathscr{C}$ sono sempre `F`:

$\mathscr{P}$	non $\mathscr{P}$	$\mathscr{C}$
V	F	F
F	V	F

$\mathscr{P}$	non $\mathscr{P}$	$\mathscr{C}$
V	F	F
F	V	F

Adesso dobbiamo inserire i casi di verità di non $\mathscr{P}$ e $\mathscr{C}$, con la solita regola per cui l'implicazione è falsa solo nel caso V $\Rightarrow$ F:

$\mathscr{P}$	non $\mathscr{P}$	$\mathscr{C}$
V	F	F
F	V	F

Adesso dobbiamo inserire i casi di verità di non $\mathscr{P}$ e $\mathscr{C}$, con la solita regola per cui l'implicazione è falsa solo nel caso $\mathtt{V} \Rightarrow \mathtt{F}$:

non $\mathscr{P}$	$\mathscr{C}$	(non $\mathscr{P}$) $\Rightarrow \mathscr{C}$
F	F	V
V	F	F

Ora dobbiamo completare la frase di partenza, ossia

Ora dobbiamo completare la frase di partenza, ossia

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Ora dobbiamo completare la frase di partenza, ossia

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Quindi dovremo di nuovo usare la tabella di $\Rightarrow$:

Ora dobbiamo completare la frase di partenza, ossia

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Quindi dovremo di nuovo usare la tabella di $\Rightarrow$:

$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C})$	$\mathscr{P}$	$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}$
V	V	V
F	F	V

Ora dobbiamo completare la frase di partenza, ossia

$$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}.$$

Quindi dovremo di nuovo usare la tabella di $\Rightarrow$:

$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C})$	$\mathscr{P}$	$((\text{non } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{P}$
V	V	V
F	F	V

Dunque anche questa è una tautologia.

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$);

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$)

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$).

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$). Questa tautologia ci dice che da questo discende la proposizione che volevamo dimostrare.

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$). Questa tautologia ci dice che da questo discende la proposizione che volevamo dimostrare.
Per esempio, vogliamo dimostrare la proposizione

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$). Questa tautologia ci dice che da questo discende la proposizione che volevamo dimostrare.
Per esempio, vogliamo dimostrare la proposizione

> *"Non esiste nessun numero intero uguale alla divisione di 5 per 3."*

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$). Questa tautologia ci dice che da questo discende la proposizione che volevamo dimostrare.
Per esempio, vogliamo dimostrare la proposizione

> *"Non esiste nessun numero intero uguale alla divisione di 5 per 3."*

Supponiamo per assurdo che esista n intero tale che $n = 5/3$.

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$). Questa tautologia ci dice che da questo discende la proposizione che volevamo dimostrare.
Per esempio, vogliamo dimostrare la proposizione

> *"Non esiste nessun numero intero uguale alla divisione di 5 per 3."*

Supponiamo per assurdo che esista n intero tale che $n = 5/3$. Per definizione di divisione, allora n moltiplicato per 3 dà 5, ossia $5 = 3n$.

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$). Questa tautologia ci dice che da questo discende la proposizione che volevamo dimostrare.
Per esempio, vogliamo dimostrare la proposizione

> *"Non esiste nessun numero intero uguale alla divisione di 5 per 3."*

Supponiamo per assurdo che esista n intero tale che $n = 5/3$. Per definizione di divisione, allora n moltiplicato per 3 dà 5, ossia $5 = 3n$.Ma questo è assurdo, perché per $n \geqslant 2$ il numero $3n$ è composto, mentre 5 non lo è, e anche perché per $n = 0$ e $n = 1$ si trovano due uguaglianze assurde $5 = 0$ e $5 = 3$.

Il senso di questa tautologia è che noi vorremmo dimostrare una proposizione ($\mathscr{P}$); allora cerchiamo di dimostrare che dal suo contrario (non $\mathscr{P}$) segue una contraddizione ($\mathscr{C}$). Questa tautologia ci dice che da questo discende la proposizione che volevamo dimostrare.
Per esempio, vogliamo dimostrare la proposizione

> *"Non esiste nessun numero intero uguale alla divisione di 5 per 3."*

Supponiamo per assurdo che esista n intero tale che $n = 5/3$. Per definizione di divisione, allora n moltiplicato per 3 dà 5, ossia $5 = 3n$.Ma questo è assurdo, perché per $n \geqslant 2$ il numero $3n$ è composto, mentre 5 non lo è, e anche perché per $n = 0$ e $n = 1$ si trovano due uguaglianze assurde $5 = 0$ e $5 = 3$. Quindi $5/3$ non è intero.