Tangenti a una conica

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.
Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.
Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.
Già la definizione di retta tangente, che intuitivamente può essere data come quella retta che "tocca la curva in un solo punto"

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.
Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.
Già la definizione di retta tangente, che intuitivamente può essere data come quella retta che "tocca la curva in un solo punto" o, in modo un po' più preciso, come la retta che "meglio approssima" la curva in quel punto,

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.

Già la definizione di retta tangente, che intuitivamente può essere data come quella retta che "tocca la curva in un solo punto" o, in modo un po' più preciso, come la retta che "meglio approssima" la curva in quel punto, è difficile da formulare in modo rigoroso, se non appunto ricorrendo ai concetti dell'*analisi matematica*.

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

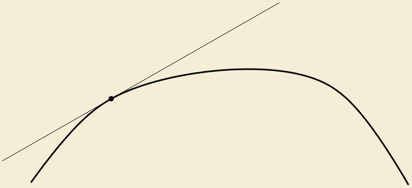
Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.
Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.
Già la definizione di retta tangente, che intuitivamente può essere data come quella retta che "tocca la curva in un solo punto" o, in modo un po' più preciso, come la retta che "meglio approssima" la curva in quel punto, è difficile da formulare in modo rigoroso, se non appunto ricorrendo ai concetti dell'*analisi matematica*.
D'altra parte, anche la definizione di "curva" non è esente da trabocchetti.

Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato,

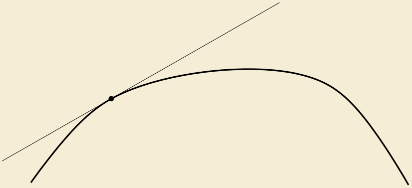
Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato,



Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato, ben più difficile è capire se si può parlare di tangente alla seconda curva nel punto indicato.



Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato, ben più difficile è capire se si può parlare di tangente alla seconda curva nel punto indicato.

Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato, ben più difficile è capire se si può parlare di tangente alla seconda curva nel punto indicato.

In qualche modo, la curva deve essere liscia, ovvero (tautologicamente) ammettere la retta tangente in ogni punto.

Curve polinomiali

Per fortuna, nel caso delle curve polinomiali (tra cui troviamo le coniche) tali problemi non si pongono, ed è possibile dare una definizione rigorosa di tangente in un punto e dei metodi per calcolarla a partire dall'equazione della curva.

Curve polinomiali

Per fortuna, nel caso delle curve polinomiali (tra cui troviamo le coniche) tali problemi non si pongono, ed è possibile dare una definizione rigorosa di tangente in un punto e dei metodi per calcolarla a partire dall'equazione della curva.

Definizione (algebrica) di retta tangente a una curva polinomiale

Una retta è tangente a una curva in un punto P se P è una soluzione di molteplicità (almeno) due nel sistema di intersezione retta–curva.

Curve polinomiali

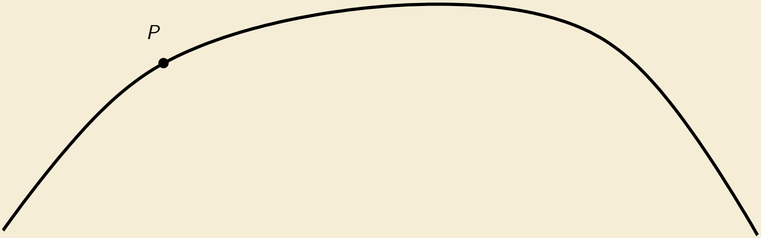
Per fortuna, nel caso delle curve polinomiali (tra cui troviamo le coniche) tali problemi non si pongono, ed è possibile dare una definizione rigorosa di tangente in un punto e dei metodi per calcolarla a partire dall'equazione della curva.

Definizione (algebrica) di retta tangente a una curva polinomiale

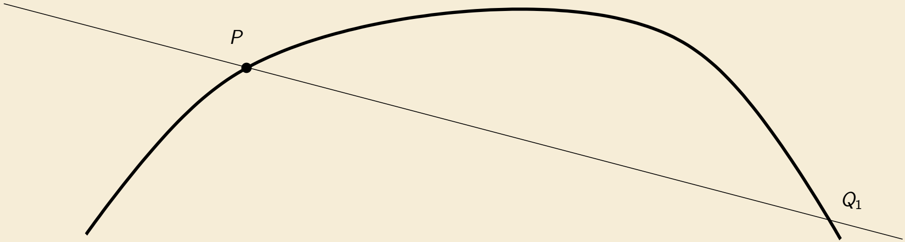
Una retta è tangente a una curva in un punto P se P è una soluzione di molteplicità (almeno) due nel sistema di intersezione retta–curva.

Perché questa definizione? L'idea è quella di caratterizzare la tangente come quella retta che ha con la curva (almeno) **due** punti di intersezione coincidenti: si può immaginare di cercare la tangente "muovendo" una retta in modo da far coincidere due punti di intersezione, ovvero cercando di trasformare una *secante* in una *tangente*, come ora andiamo a mostrare in un disegno.

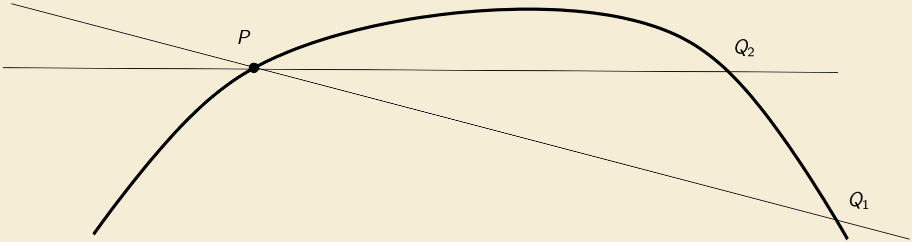
Da secante a tangente



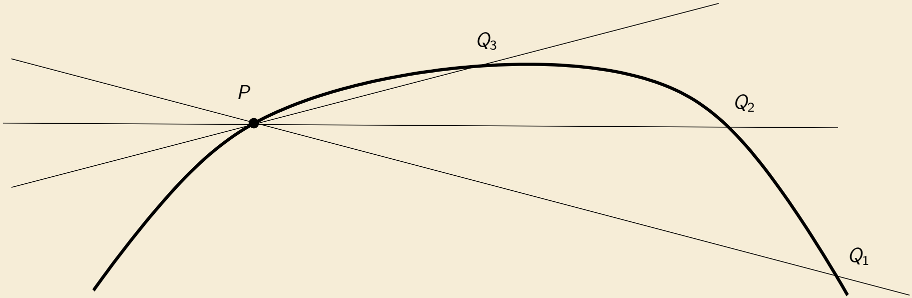
Da secante a tangente



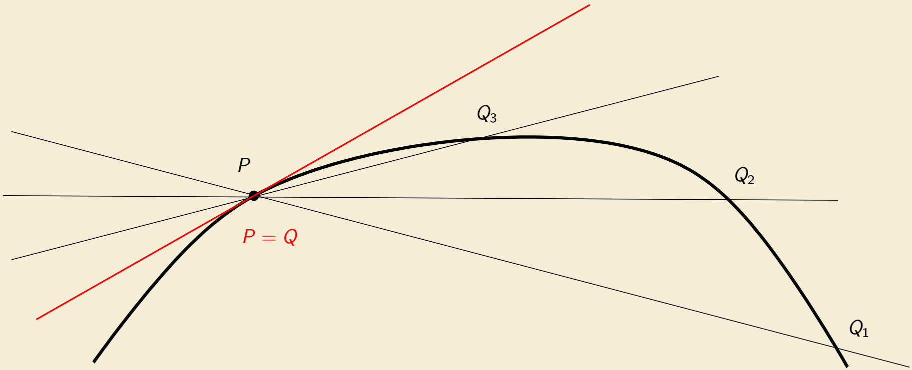
Da secante a tangente



Da secante a tangente



Da secante a tangente



Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica.

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema.

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

- se $\Delta = 0$, la retta è tangente;

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

- se $\Delta = 0$, la retta è tangente;
- se $\Delta > 0$, la retta è secante;

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

- se $\Delta = 0$, la retta è tangente;
- se $\Delta > 0$, la retta è secante;
- se $\Delta < 0$, la retta è esterna.

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$.

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta–conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta–conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta–conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0\,.$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta–conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0\,.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta–conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0\,.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.
Se avessimo provato con la stessa parabola e la retta $y = 4x - 3$, avremmo ottenuto

$$x^2 + 2x - 2 = 4x - 3$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta–conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0\,.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.
Se avessimo provato con la stessa parabola e la retta $y = 4x - 3$, avremmo ottenuto

$$x^2 + 2x - 2 = 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0\,,$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta–conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0 \,.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.
Se avessimo provato con la stessa parabola e la retta $y = 4x - 3$, avremmo ottenuto

$$x^2 + 2x - 2 = 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \,,$$

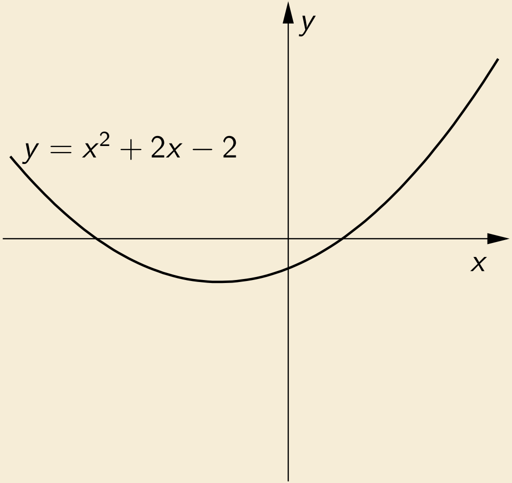
che ha $\Delta = 0$, quindi questa retta è *tangente* alla parabola.

Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:

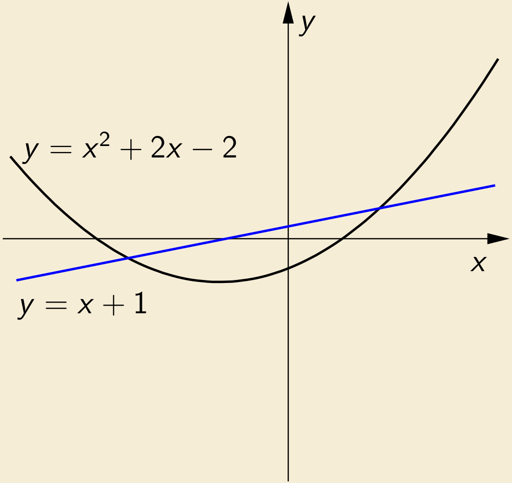
Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:



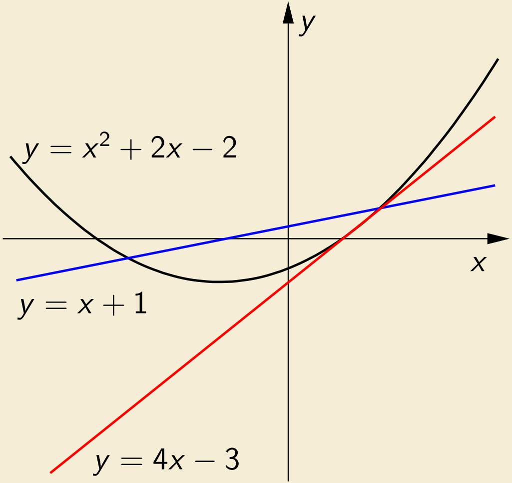
Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:



Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:



Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Per fare questo dobbiamo:

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Per fare questo dobbiamo:

1. costruire il fascio di rette per P: $y + 1 = m(x - 1)$

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Per fare questo dobbiamo:

1. costruire il fascio di rette per P: $y + 1 = m(x - 1)$
2. formare il sistema di intersezione conica–fascio:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ y = mx - m - 1 \end{cases}$$

Un esempio più complicato

3. trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) = 0$$

Un esempio più complicato

3. trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) = 0$$

4. trovare il discriminante dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (1 + 3m + m^2)^2 - (5 + 6m + m^2)(1 + m^2) = 5m^2 - 4$$

Un esempio più complicato

3. trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) = 0$$

4. trovare il discriminante dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (1 + 3m + m^2)^2 - (5 + 6m + m^2)(1 + m^2) = 5m^2 - 4$$

5. risolvere l'equazione $\Delta = 0$ nell'incognita m:

$$m = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Un esempio più complicato

3. trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) = 0$$

4. trovare il discriminante dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (1 + 3m + m^2)^2 - (5 + 6m + m^2)(1 + m^2) = 5m^2 - 4$$

5. risolvere l'equazione $\Delta = 0$ nell'incognita m:

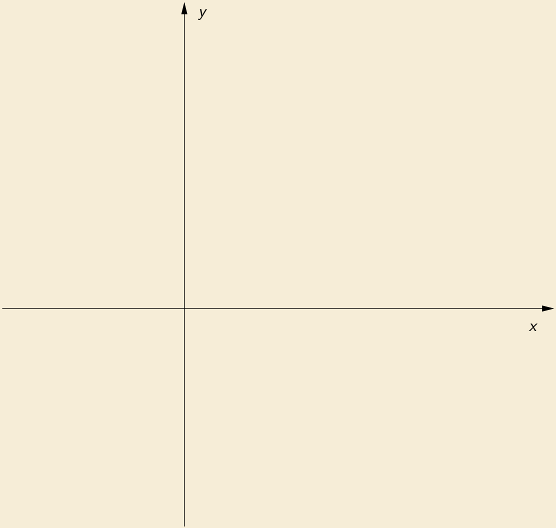
$$m = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

6. sostituire i valori trovati nell'equazione del fascio di rette:

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}} - 1\,, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}} - 1\,.$$

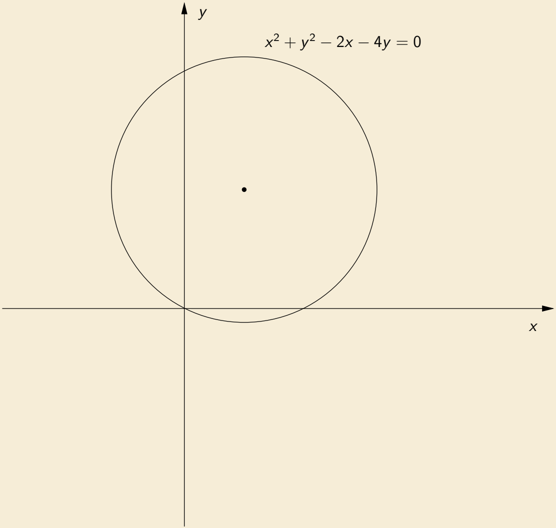
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



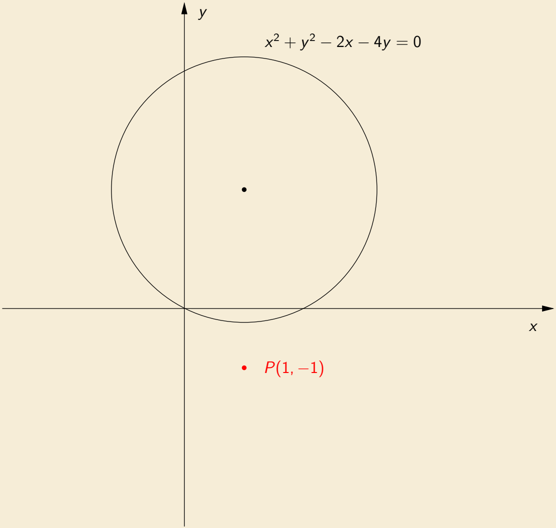
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



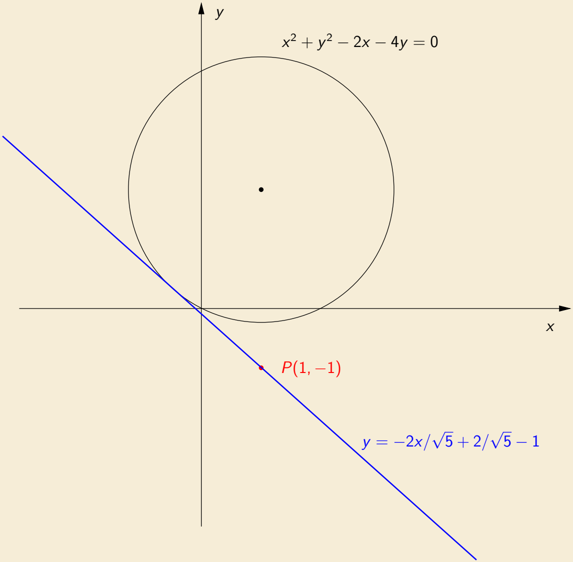
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



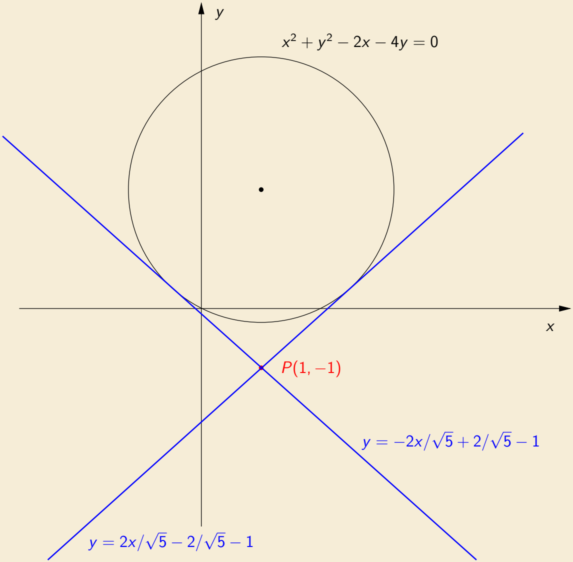
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.
Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.
Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto–retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.

Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.
Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto–retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.
Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.

Il caso della circonferenza

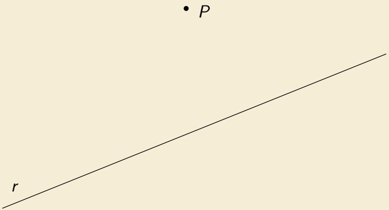
Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.
Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto–retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.
Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.



Il caso della circonferenza

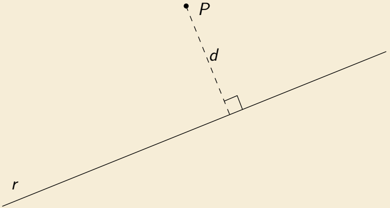
Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.
Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto–retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.
Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.



Il caso della circonferenza

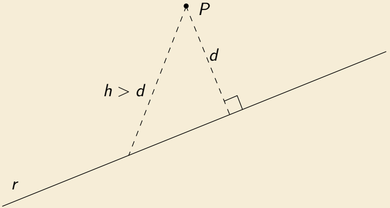
Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.
Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto–retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.
Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.



Formula della distanza punto–retta

Se il punto P ha coordinate (x_0, y_0) e la retta r ha equazione implicita $ax + by + c = 0$, la distanza punto–retta è data da

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Formula della distanza punto–retta

Se il punto P ha coordinate (x_0, y_0) e la retta r ha equazione implicita $ax + by + c = 0$, la distanza punto–retta è data da

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \,.$$

Se invece la retta è data in forma esplicita, cioè $r: \;\; y = mx + q$, allora la formula della distanza punto–retta diventa

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}} \,.$$

Dimostrazione

La retta $r: \ ax + by + c = 0$ ha coefficiente angolare $m = -a/b$,

Dimostrazione

La retta $r: \; ax + by + c = 0$ ha coefficiente angolare $m = -a/b$, quindi il coefficiente angolare della retta perpendicolare è $m' = b/a$.

Dimostrazione

La retta $r: \; ax + by + c = 0$ ha coefficiente angolare $m = -a/b$, quindi il coefficiente angolare della retta perpendicolare è $m' = b/a$. Se trasliamo l'origine del sistema di riferimento in P, mediante il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

l'equazione della retta diventa $aX + bY + ax_0 + by_0 + c = 0$ e le coordinate di P diventano $(0, 0)$.

Dimostrazione

La retta $r: \ ax + by + c = 0$ ha coefficiente angolare $m = -a/b$, quindi il coefficiente angolare della retta perpendicolare è $m' = b/a$. Se trasliamo l'origine del sistema di riferimento in P, mediante il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

l'equazione della retta diventa $aX + bY + ax_0 + by_0 + c = 0$ e le coordinate di P diventano $(0, 0)$.
La retta per P con coefficiente angolare m' ha equazione

$$r': \ Y = \frac{b}{a} X$$

Dimostrazione

La retta $r: \; ax + by + c = 0$ ha coefficiente angolare $m = -a/b$, quindi il coefficiente angolare della retta perpendicolare è $m' = b/a$. Se trasliamo l'origine del sistema di riferimento in P, mediante il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

l'equazione della retta diventa $aX + bY + ax_0 + by_0 + c = 0$ e le coordinate di P diventano $(0, 0)$.
La retta per P con coefficiente angolare m' ha equazione

$$r': \; Y = \frac{b}{a}X$$

e quindi l'intersezione tra r e r' è data dal sistema

$$\begin{cases} aX + bY + ax_0 + by_0 + c = 0 \\ Y = \dfrac{b}{a}X \, . \end{cases}$$

Dimostrazione

Risolvendo il sistema per sostituzione si ha

$$aX + b\left(\frac{b}{a}X\right) + ax_0 + by_0 + c = 0\,,$$

Dimostrazione

Risolvendo il sistema per sostituzione si ha

$$aX + b\left(\frac{b}{a}X\right) + ax_0 + by_0 + c = 0\,,$$

da cui

$$X = -a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2},$$

Dimostrazione

Risolvendo il sistema per sostituzione si ha

$$aX + b\left(\frac{b}{a}X\right) + ax_0 + by_0 + c = 0\,,$$

da cui

$$X = -a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, \quad Y = \frac{b}{a}X = -b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\,.$$

Dimostrazione

Risolvendo il sistema per sostituzione si ha

$$aX + b\left(\frac{b}{a}X\right) + ax_0 + by_0 + c = 0\,,$$

da cui

$$X = -a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, \quad Y = \frac{b}{a}X = -b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\,.$$

Allora la distanza punto–retta è data dalla distanza dall'origine del punto trovato, ovvero

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} =$$

Dimostrazione

Risolvendo il sistema per sostituzione si ha

$$aX + b\left(\frac{b}{a}X\right) + ax_0 + by_0 + c = 0\,,$$

da cui

$$X = -a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, \quad Y = \frac{b}{a}X = -b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\,.$$

Allora la distanza punto–retta è data dalla distanza dall'origine del punto trovato, ovvero

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} =$$

Dimostrazione

Risolvendo il sistema per sostituzione si ha

$$aX + b\left(\frac{b}{a}X\right) + ax_0 + by_0 + c = 0\,,$$

da cui

$$X = -a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, \quad Y = \frac{b}{a}X = -b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\,.$$

Allora la distanza punto–retta è data dalla distanza dall'origine del punto trovato, ovvero

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Il caso della circonferenza

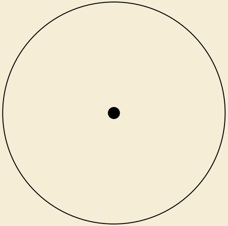
Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio.

Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.

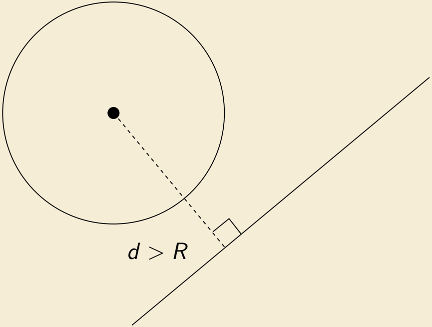
Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



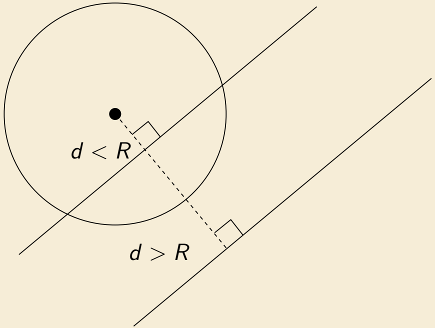
Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



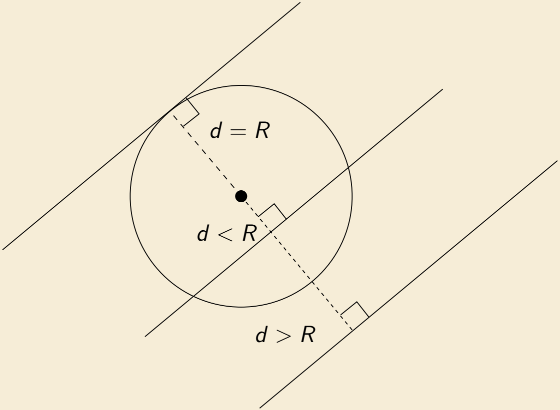
Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.
Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.
Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2)$,

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.
Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2), \quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{5}.$

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.
Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2), \quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{5}$.
Ora dobbiamo:

- costruire il fascio di rette per P: $y + 1 = m(x - 1)$

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.
Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2)$, $\quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{5}$.
Ora dobbiamo:

- costruire il fascio di rette per P: $y + 1 = m(x - 1)$
  e scriverlo in forma implicita: $mx - y - m - 1 = 0$;

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.
Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2), \quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{5}$.
Ora dobbiamo:

- costruire il fascio di rette per P: $y + 1 = m(x - 1)$
  e scriverlo in forma implicita: $mx - y - m - 1 = 0$;
- imporre che la distanza del fascio da C sia uguale a r:

$$\frac{|m - 2 - m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}\,.$$

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \quad \Rightarrow$$

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad 5m^2 = 4 \quad \Rightarrow$$

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad 5m^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Quindi si trovano le rette tangenti come prima.

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad 5m^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Quindi si trovano le rette tangenti come prima.
È evidente che questo metodo richiede meno calcoli del precedente. Ha però il difetto di valere solo per la circonferenza.

Polare di un punto esterno a una conica

Introduciamo ora una nozione molto importante riguardante le coniche: la relazione polo–polare.

Polare di un punto esterno a una conica

Introduciamo ora una nozione molto importante riguardante le coniche: la relazione polo–polare. Fissata una conica, si tratta di associare ad ogni punto del piano, detto **polo**, una retta, detta **polare**, in un modo che adesso vedremo.

Polare di un punto esterno a una conica

Introduciamo ora una nozione molto importante riguardante le coniche: la relazione polo–polare. Fissata una conica, si tratta di associare ad ogni punto del piano, detto **polo**, una retta, detta **polare**, in un modo che adesso vedremo.
Per fare questo, dobbiamo prima puntualizzare la nozione di punto "esterno" a una conica.

Polare di un punto esterno a una conica

Introduciamo ora una nozione molto importante riguardante le coniche: la relazione polo–polare. Fissata una conica, si tratta di associare ad ogni punto del piano, detto **polo**, una retta, detta **polare**, in un modo che adesso vedremo.
Per fare questo, dobbiamo prima puntualizzare la nozione di punto "esterno" a una conica. Se nel caso di un'ellisse (e quindi di una circonferenza) non ci sono dubbi su che cosa sia un punto esterno, nel caso di una parabola o un'iperbole potrebbero esserci dei dubbi. Diamo quindi la seguente

Definizione di punto esterno

Data una conica, un punto P si dice **esterno** alla conica se esistono esattamente due tangenti alla conica passanti per P.

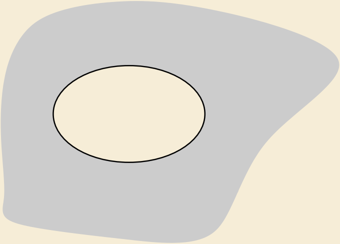
Polare di un punto esterno a una conica

Introduciamo ora una nozione molto importante riguardante le coniche: la relazione polo–polare. Fissata una conica, si tratta di associare ad ogni punto del piano, detto **polo**, una retta, detta **polare**, in un modo che adesso vedremo.
Per fare questo, dobbiamo prima puntualizzare la nozione di punto "esterno" a una conica. Se nel caso di un'ellisse (e quindi di una circonferenza) non ci sono dubbi su che cosa sia un punto esterno, nel caso di una parabola o un'iperbole potrebbero esserci dei dubbi. Diamo quindi la seguente

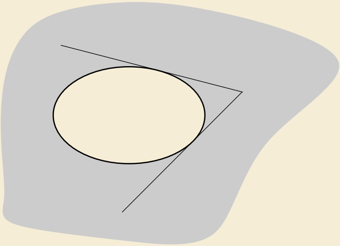
Definizione di punto esterno

Data una conica, un punto P si dice **esterno** alla conica se esistono esattamente due tangenti alla conica passanti per P.
Un punto P si dice **interno** alla conica se non esistono tangenti alla conica passanti per P.

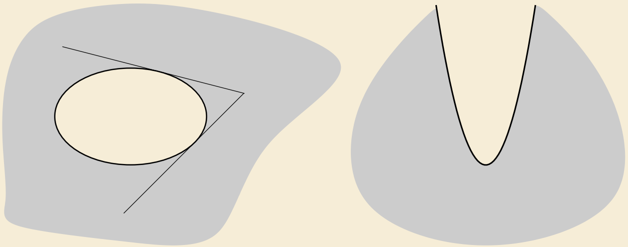
Punti esterni a una conica



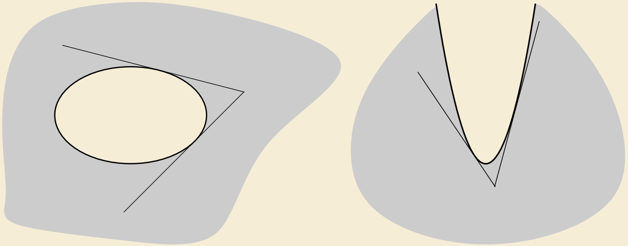
Punti esterni a una conica



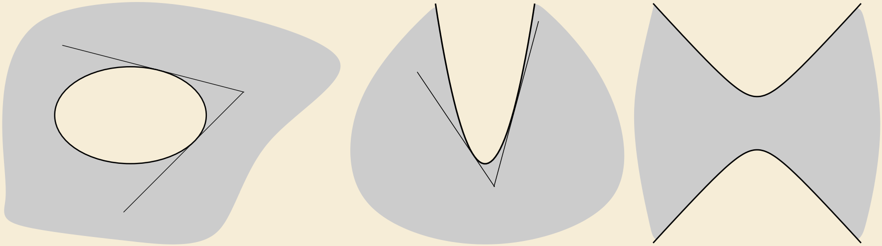
Punti esterni a una conica



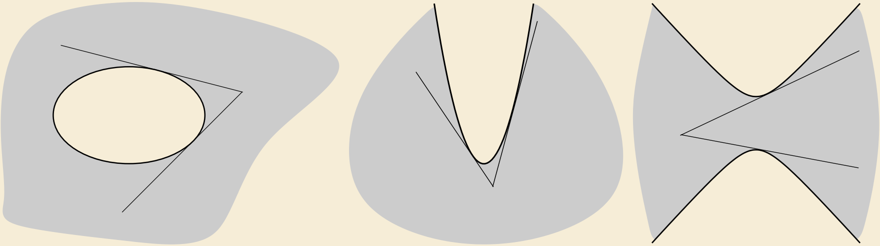
Punti esterni a una conica



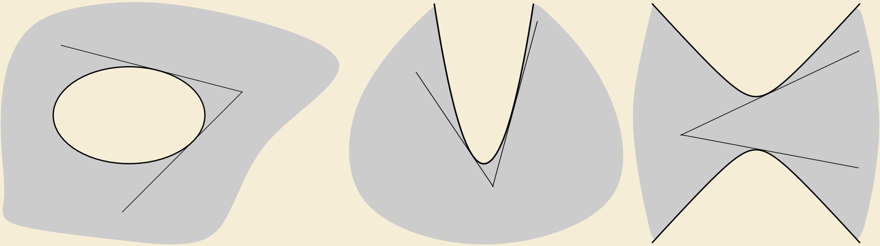
Punti esterni a una conica



Punti esterni a una conica



Punti esterni a una conica



Ovviamente, i punti per cui passa *una sola* tangente alla conica sono i punti che stanno sulla conica stessa.

Polare e polo

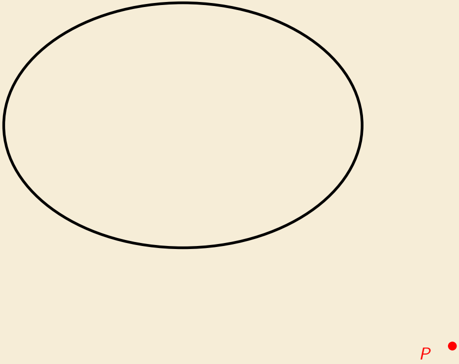
Definizione di polare e di polo

Data una conica, si chiama **polare** di un punto P esterno alla conica quella retta che passa per i due punti di tangenza di P sulla conica, ovvero i due punti della conica le cui tangenti passano per P.

Polare e polo

Definizione di polare e di polo

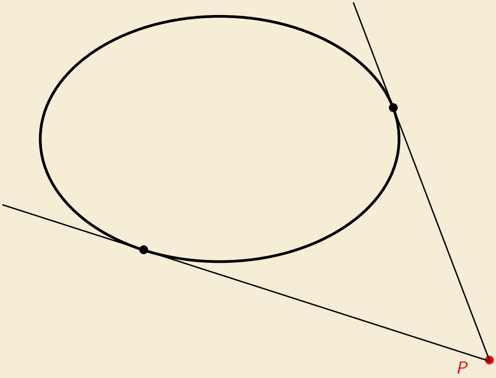
Data una conica, si chiama **polare** di un punto P esterno alla conica quella retta che passa per i due punti di tangenza di P sulla conica, ovvero i due punti della conica le cui tangenti passano per P.
Il punto P viene detto **polo**.



Polare e polo

Definizione di polare e di polo

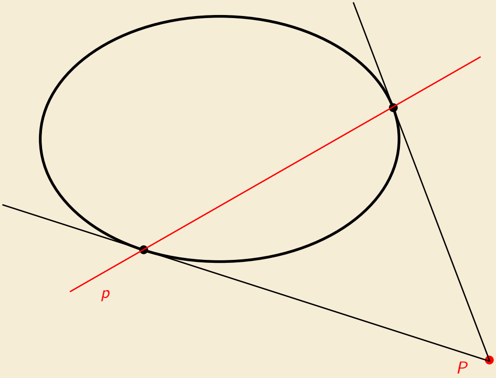
Data una conica, si chiama **polare** di un punto P esterno alla conica quella retta che passa per i due punti di tangenza di P sulla conica, ovvero i due punti della conica le cui tangenti passano per P.
Il punto P viene detto **polo**.



Polare e polo

Definizione di polare e di polo

Data una conica, si chiama **polare** di un punto P esterno alla conica quella retta che passa per i due punti di tangenza di P sulla conica, ovvero i due punti della conica le cui tangenti passano per P.
Il punto P viene detto **polo**.



Polare e di polo

Il bello della polare di un punto è che è facile darne una formula:

Polare e di polo

Il bello della polare di un punto è che è facile darne una formula:
se la conica ha equazione $\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c = 0$,

Polare e di polo

Il bello della polare di un punto è che è facile darne una formula:
se la conica ha equazione $\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c = 0$,
e il punto P ha coordinate $P(x_0, y_0)$,

Polare e di polo

Il bello della polare di un punto è che è facile darne una formula:
se la conica ha equazione $\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c = 0$,
e il punto P ha coordinate $P(x_0, y_0)$,
allora la polare di P rispetto alla conica ha equazione

$$\boxed{p: \quad (2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0}$$

Polare e di polo

Il bello della polare di un punto è che è facile darne una formula:
se la conica ha equazione $\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c = 0$,
e il punto P ha coordinate $P(x_0, y_0)$,
allora la polare di P rispetto alla conica ha equazione

$$\boxed{p: \quad (2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0}$$

Con questa formula si può definire la polare anche di un punto *interno* alla conica, o la polare di un punto che sta sulla conica.

Polare e di polo

Il bello della polare di un punto è che è facile darne una formula:
se la conica ha equazione $\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c = 0$,
e il punto P ha coordinate $P(x_0, y_0)$,
allora la polare di P rispetto alla conica ha equazione

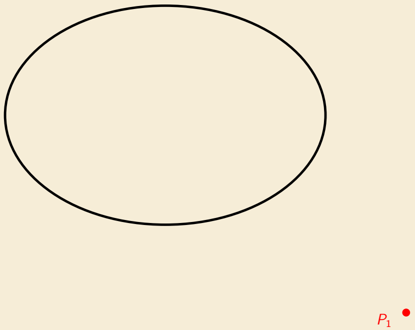
$$\boxed{p : \quad (2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0}$$

Con questa formula si può definire la polare anche di un punto *interno* alla conica, o la polare di un punto che sta sulla conica.
Anche queste polari hanno un significato geometrico, legato a un bellissimo teorema che vedremo (senza dimostrarlo!) nel prossimo lucido.

Teorema di reciprocità

Teorema di reciprocità

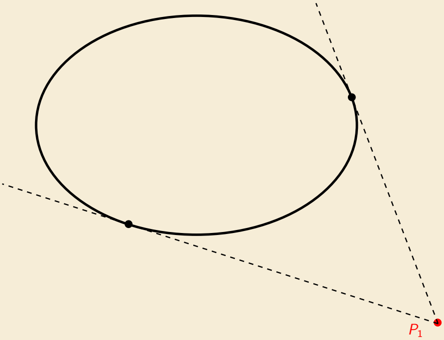
Se la polare di un punto P_1 passa per il punto P_2, allora la polare di P_2 passa per il punto P_1.



Teorema di reciprocità

Teorema di reciprocità

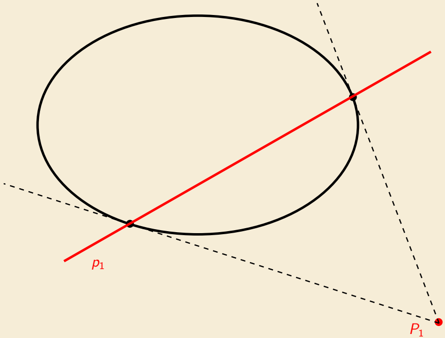
Se la polare di un punto P_1 passa per il punto P_2, allora la polare di P_2 passa per il punto P_1.



Teorema di reciprocità

Teorema di reciprocità

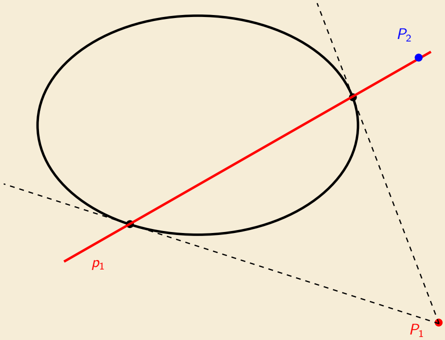
Se la polare di un punto P_1 passa per il punto P_2, allora la polare di P_2 passa per il punto P_1.



Teorema di reciprocità

Teorema di reciprocità

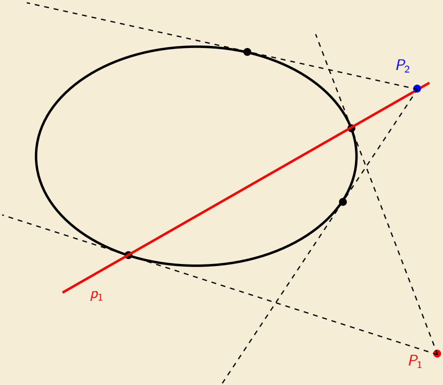
Se la polare di un punto P_1 passa per il punto P_2, allora la polare di P_2 passa per il punto P_1.



Teorema di reciprocità

Teorema di reciprocità

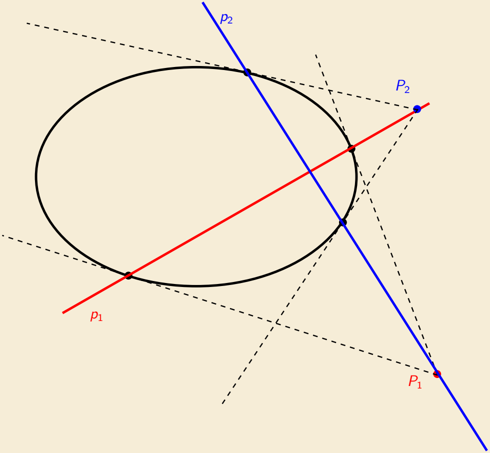
Se la polare di un punto P_1 passa per il punto P_2, allora la polare di P_2 passa per il punto P_1.



Teorema di reciprocità

Teorema di reciprocità

Se la polare di un punto P_1 passa per il punto P_2, allora la polare di P_2 passa per il punto P_1.



Polare e tangente

Ma cosa c'entra tutto questo con il nostro problema di trovare la retta tangente a una conica?

Polare e tangente

Ma cosa c'entra tutto questo con il nostro problema di trovare la retta tangente a una conica?
Ebbene, si ha che

> la polare di un punto che sta sulla conica è proprio la retta tangente alla conica in quel punto!

Polare e tangente

Ma cosa c'entra tutto questo con il nostro problema di trovare la retta tangente a una conica?
Ebbene, si ha che

> la polare di un punto che sta sulla conica è proprio la retta tangente alla conica in quel punto!

La dimostrazione di questo fatto, che si può intuire dalla nostra definizione, si può dare col teorema di reciprocità.

Polare e tangente

Ma cosa c'entra tutto questo con il nostro problema di trovare la retta tangente a una conica?
Ebbene, si ha che

> la polare di un punto che sta sulla conica è proprio la retta tangente alla conica in quel punto!

La dimostrazione di questo fatto, che si può intuire dalla nostra definizione, si può dare col teorema di reciprocità.
Quindi abbiamo una nuova formula per trovare la retta tangente di un punto $P(x_0, y_0)$ che sta sulla conica $\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c = 0$: è la formula della polare

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,.$$

Un esempio veloce

Se abbiamo la parabola $y = 2x^2 + 1$ e il punto $P(1, 3)$ che appartiene alla parabola, troviamo la retta tangente per P in questo modo:

Un esempio veloce

Se abbiamo la parabola $y = 2x^2 + 1$ e il punto $P(1, 3)$ che appartiene alla parabola, troviamo la retta tangente per P in questo modo:
riordiniamo la parabola: $2x^2 - y + 1 = 0$, quindi $\alpha = 2$, $\beta = a = 0$, $b = -1$, $c = 1$.

Un esempio veloce

Se abbiamo la parabola $y = 2x^2 + 1$ e il punto $P(1, 3)$ che appartiene alla parabola, troviamo la retta tangente per P in questo modo:
riordiniamo la parabola: $2x^2 - y + 1 = 0$, quindi $\alpha = 2$, $\beta = a = 0$, $b = -1$, $c = 1$.
Poi usiamo la formula della polare

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,.$$

Un esempio veloce

Se abbiamo la parabola $y = 2x^2 + 1$ e il punto $P(1, 3)$ che appartiene alla parabola, troviamo la retta tangente per P in questo modo:
riordiniamo la parabola: $2x^2 - y + 1 = 0$, quindi $\alpha = 2$, $\beta = a = 0$, $b = -1$, $c = 1$.
Poi usiamo la formula della polare

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,.$$

Quindi la retta tangente viene

$$(2 \cdot 2 \cdot 1 + 0)x + (2 \cdot 0 \cdot 3 - 1)y + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0$$

Un esempio veloce

Se abbiamo la parabola $y = 2x^2 + 1$ e il punto $P(1, 3)$ che appartiene alla parabola, troviamo la retta tangente per P in questo modo:
riordiniamo la parabola: $2x^2 - y + 1 = 0$, quindi $\alpha = 2$, $\beta = a = 0$, $b = -1$, $c = 1$.
Poi usiamo la formula della polare

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,.$$

Quindi la retta tangente viene

$$(2 \cdot 2 \cdot 1 + 0)x + (2 \cdot 0 \cdot 3 - 1)y + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0$$

ovvero

$$4x - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 1\,.$$

Tangenti per un punto esterno

E se vogliamo trovare le tangenti per un punto esterno? La formula della polare ci aiuta anche in questo caso. Seguiremo questa procedura:

Tangenti per un punto esterno

E se vogliamo trovare le tangenti per un punto esterno? La formula della polare ci aiuta anche in questo caso. Seguiremo questa procedura:

1. troviamo la polare del punto mediante la formula vista;

Tangenti per un punto esterno

E se vogliamo trovare le tangenti per un punto esterno? La formula della polare ci aiuta anche in questo caso. Seguiremo questa procedura:

1. troviamo la polare del punto mediante la formula vista;
2. intersechiamo la polare con la conica, mediante un sistema: le soluzioni del sistema ci danno i *punti di tangenza* sulla conica;

Tangenti per un punto esterno

E se vogliamo trovare le tangenti per un punto esterno? La formula della polare ci aiuta anche in questo caso. Seguiremo questa procedura:

1. troviamo la polare del punto mediante la formula vista;
2. intersechiamo la polare con la conica, mediante un sistema: le soluzioni del sistema ci danno i *punti di tangenza* sulla conica;
3. ora troviamo le rette passanti per il punto dato e per i punti di tangenza trovati: queste sono le rette tangenti cercate.

Esempio rivisto

Riprendiamo il solito esempio:

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Esempio rivisto

Riprendiamo il solito esempio:

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Ricordando ancora la formula della polare

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,,$$

si ha che la polare di P è $-6y + 2 = 0$, ovvero $y = 1/3$.

Esempio rivisto

Riprendiamo il solito esempio:

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Ricordando ancora la formula della polare

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,,$$

si ha che la polare di P è $-6y + 2 = 0$, ovvero $y = 1/3$.
Intersecando con la circonferenza si ha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

da cui subito, per sostituzione, $x^2 - 2x - 11/9 = 0$,

Esempio rivisto

Riprendiamo il solito esempio:

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P.

Ricordando ancora la formula della polare

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,,$$

si ha che la polare di P è $-6y + 2 = 0$, ovvero $y = 1/3$.
Intersecando con la circonferenza si ha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

da cui subito, per sostituzione, $x^2 - 2x - 11/9 = 0$, e dunque

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 11/9} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}\,.$$

Esempio rivisto

Quindi i punti di tangenza sono

$$\left((1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\right) \ ,$$

da cui le rette tangenti:

$$y = \frac{4/3}{2\sqrt{5}/3}(x-1) - 1 = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \,.$$

$$y = \frac{4/3}{-2\sqrt{5}/3}(x-1) - 1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \,.$$

Un ultimo esempio

Vediamo l'ultimo esempio, in cui la conica è un'ellisse:

Esercizio di esempio

Data l'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ e il punto $P = (6, 4)$, si trovino le rette tangenti passanti per P.

Un ultimo esempio

Vediamo l'ultimo esempio, in cui la conica è un'ellisse:

Esercizio di esempio

Data l'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ e il punto $P = (6, 4)$, si trovino le rette tangenti passanti per P.

La formula della polare è

$$(2\alpha x_0 + a)x + (2\beta y_0 + b)y + ax_0 + by_0 + 2c = 0\,,$$

quindi la polare per P è

$$\left(\frac{2}{9}\cdot 6\right)x + \left(\frac{2}{3}\cdot 4\right)y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 4y - 3 = 0\,.$$

Un ultimo esempio

Ora interseco con l'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$$

Un ultimo esempio

Ora interseco con l'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$$

... dopo alcuni conti troviamo i punti

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{39}{14}, -\frac{9}{14}\right).$$

Un ultimo esempio

Ora interseco con l'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$$

...dopo alcuni conti troviamo i punti

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) , \quad \left(\frac{39}{14}, -\frac{9}{14}\right) .$$

Quindi le rette tangenti sono

$$y = \frac{-5/2}{-15/2}(x-6) + 4 = \frac{1}{3}x + 2$$

$$y = \frac{-65/14}{-45/14}(x-6) + 4 = \frac{13}{9}x - \frac{14}{3} .$$