

Tangenti a una conica

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,
e assillano anche gli studenti!

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,
e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.

Già la definizione di **retta tangente**, che intuitivamente può essere data come quella retta che “tocca la curva in un solo punto”

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,
e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.

Già la definizione di **retta tangente**, che intuitivamente può essere data come quella retta che “tocca la curva in un solo punto” o, in modo un po’ più preciso, come la retta che “meglio approssima” la curva in quel punto,

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.

Già la definizione di **retta tangente**, che intuitivamente può essere data come quella retta che “tocca la curva in un solo punto” o, in modo un po' più preciso, come la retta che “meglio approssima” la curva in quel punto, è difficile da formulare in modo rigoroso, se non appunto ricorrendo ai concetti dell'*analisi matematica*.

La retta tangente

Il problema di trovare la retta tangente a una curva in un punto è uno di quegli argomenti che hanno assillato i matematici per moltissimo tempo,

e assillano anche gli studenti!

Scherzi a parte, moltissimi strumenti della matematica moderna sono nati sotto lo stimolo di questo problema: primo fra tutti la nozione di derivata di una funzione.

Il problema della retta tangente è infatti piuttosto intricato e molto interessante.

Già la definizione di **retta tangente**, che intuitivamente può essere data come quella retta che “tocca la curva in un solo punto” o, in modo un po’ più preciso, come la retta che “meglio approssima” la curva in quel punto, è difficile da formulare in modo rigoroso, se non appunto ricorrendo ai concetti dell’*analisi matematica*.

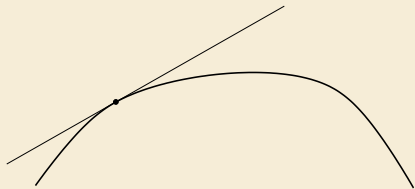
D'altra parte, anche la definizione di “curva” non è esente da trabocchetti.

Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato,

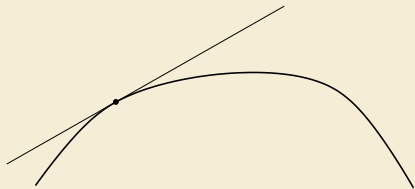
Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato,



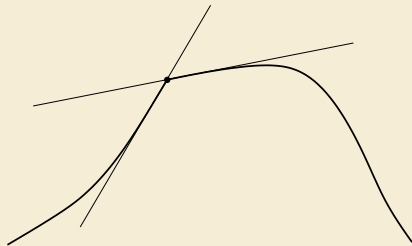
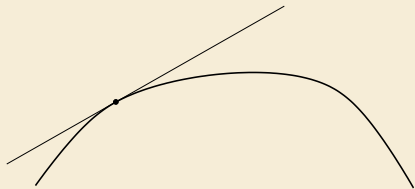
Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato, ben più difficile è capire se si può parlare di tangente alla seconda curva nel punto indicato.



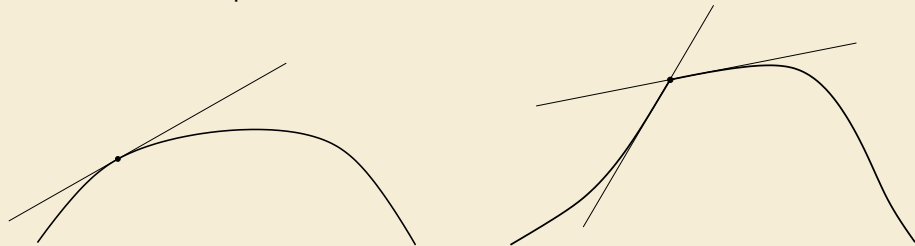
Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato, ben più difficile è capire se si può parlare di tangente alla seconda curva nel punto indicato.



Curve e tangenti

Se infatti è abbastanza intuitivo tracciare la tangente alla prima curva nel punto indicato, ben più difficile è capire se si può parlare di tangente alla seconda curva nel punto indicato.



In qualche modo, la curva deve essere **liscia**, ovvero (tautologicamente) ammettere la retta tangente in ogni punto.

Curve polinomiali

Per fortuna, nel caso delle curve polinomiali (tra cui troviamo le coniche) tali problemi non si pongono, ed è possibile dare una definizione rigorosa di tangente in un punto e dei metodi per calcolarla a partire dall'equazione della curva.

Curve polinomiali

Per fortuna, nel caso delle curve polinomiali (tra cui troviamo le coniche) tali problemi non si pongono, ed è possibile dare una definizione rigorosa di tangente in un punto e dei metodi per calcolarla a partire dall'equazione della curva.

Definizione (algebrica) di retta tangente a una curva polinomiale

Una retta è tangente a una curva in un punto P se P è una soluzione di molteplicità (almeno) due nel sistema di intersezione retta–curva.

Curve polinomiali

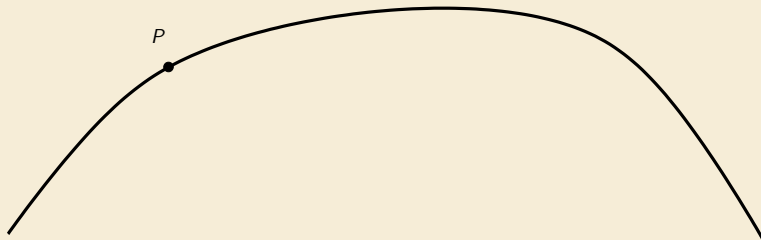
Per fortuna, nel caso delle curve polinomiali (tra cui troviamo le coniche) tali problemi non si pongono, ed è possibile dare una definizione rigorosa di tangente in un punto e dei metodi per calcolarla a partire dall'equazione della curva.

Definizione (algebrica) di retta tangente a una curva polinomiale

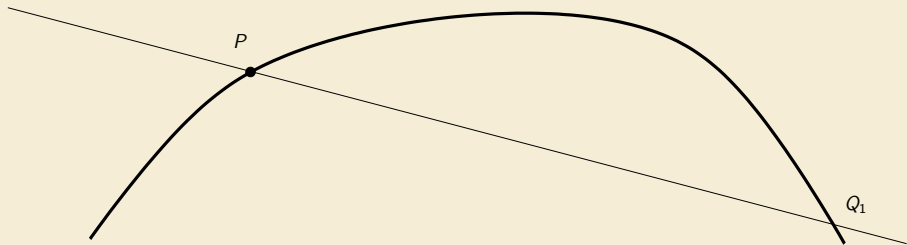
Una retta è tangente a una curva in un punto P se P è una soluzione di molteplicità (almeno) due nel sistema di intersezione retta–curva.

Perché questa definizione? L'idea è quella di caratterizzare la tangente come quella retta che ha con la curva (almeno) **due** punti di intersezione coincidenti: si può immaginare di cercare la tangente “muovendo” una retta in modo da far coincidere due punti di intersezione, ovvero cercando di trasformare una *secante* in una *tangente*, come ora andiamo a mostrare in un disegno.

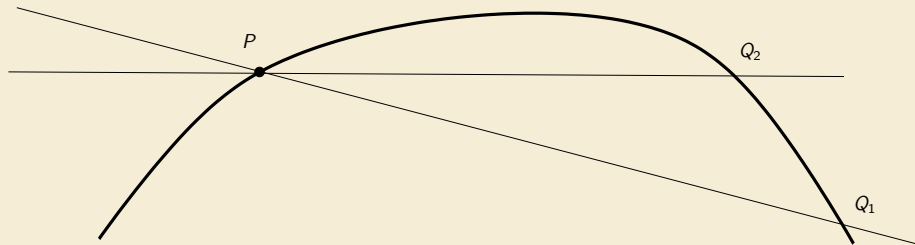
Da secante a tangente



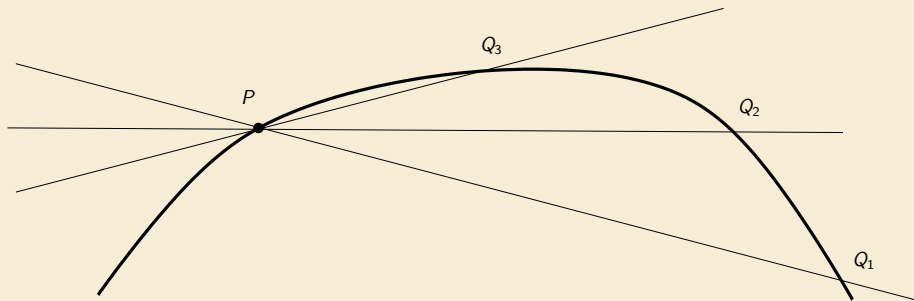
Da secante a tangente



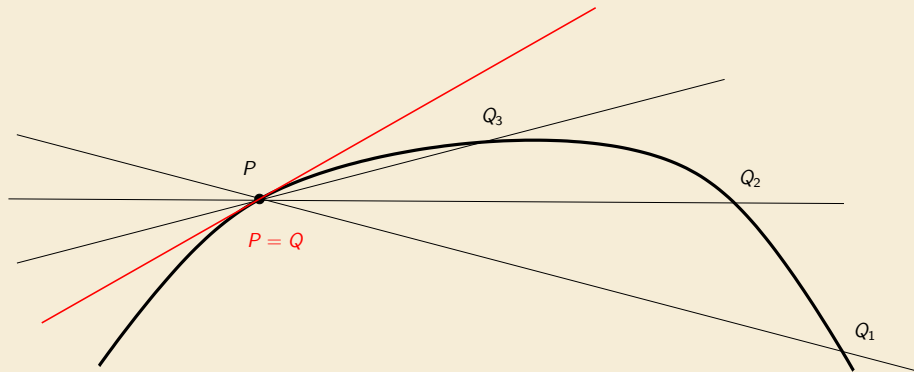
Da secante a tangente



Da secante a tangente



Da secante a tangente



Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica.

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema.

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

- se $\Delta = 0$, la retta è **tangente**;

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

- se $\Delta = 0$, la retta è **tangente**;
- se $\Delta > 0$, la retta è secante;

Tangente a una conica

La conica è una curva polinomiale di grado 2. Quindi per verificare se una retta è tangente a una conica data si deve impostare un sistema di secondo grado, le cui equazioni sono l'una quella della retta e l'altra quella della conica. Procedendo ad esempio per sostituzione (a partire dall'equazione della retta, che è di primo grado), ci si riconduce a un'equazione di secondo grado in una sola incognita, che chiameremo **equazione risolvente** del sistema. Per vedere se il sistema ha due soluzioni coincidenti, bisogna trovare il discriminante (Δ) dell'equazione risolvente:

- se $\Delta = 0$, la retta è **tangente**;
- se $\Delta > 0$, la retta è secante;
- se $\Delta < 0$, la retta è esterna.

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$.

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta-conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta-conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta-conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0.$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta-conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta-conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.

Se avessimo provato con la stessa parabola e la retta $y = 4x - 3$, avremmo ottenuto

$$x^2 + 2x - 2 = 4x - 3$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta-conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.

Se avessimo provato con la stessa parabola e la retta $y = 4x - 3$, avremmo ottenuto

$$x^2 + 2x - 2 = 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0,$$

Un esempio

Facciamo subito un esempio: consideriamo la parabola $y = x^2 + 2x - 2$ e la retta $y = x + 1$. Formiamo il sistema di intersezione retta-conica:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

e scriviamone l'equazione di secondo grado corrispondente:

$$x^2 + 2x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = 0.$$

Si ha $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$, quindi la retta è secante, ovvero interseca la parabola in due punti.

Se avessimo provato con la stessa parabola e la retta $y = 4x - 3$, avremmo ottenuto

$$x^2 + 2x - 2 = 4x - 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0,$$

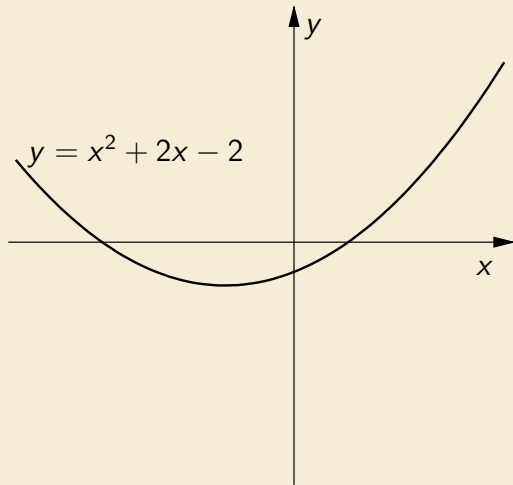
che ha $\Delta = 0$, quindi questa retta è *tangente* alla parabola.

Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:

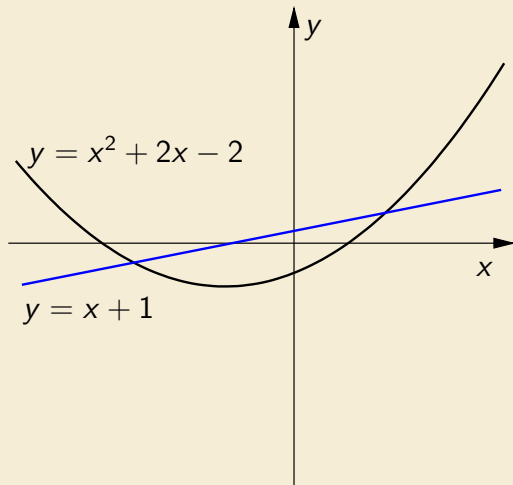
Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:



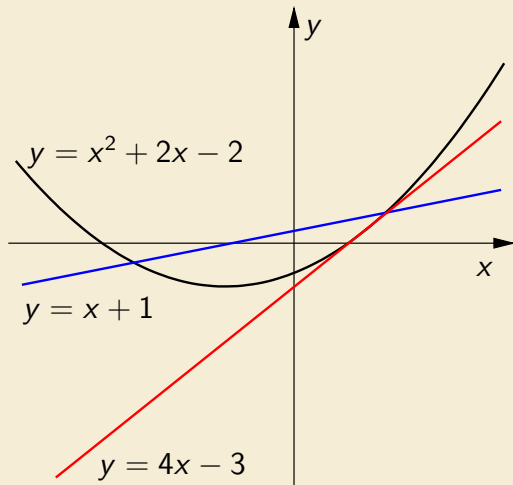
Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:



Un esempio

Vediamo un disegno di quello che abbiamo trovato:



Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Per fare questo dobbiamo:

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Per fare questo dobbiamo:

- 1 costruire il fascio di rette per P : $y + 1 = m(x - 1)$

Un esempio più complicato

Il metodo che abbiamo visto è un po' macchinoso e a volte complicato nei conti. Pensiamo ad esempio al problema di dover *trovare* la retta tangente a una conica per un punto dato, e non solo dover verificare se una retta è tangente, come abbiamo fatto prima.

Esercizio di esempio

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Per fare questo dobbiamo:

- 1 costruire il fascio di rette per P : $y + 1 = m(x - 1)$
- 2 formare il sistema di intersezione conica-fascio:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ y = mx - m - 1 \end{cases}$$

Un esempio più complicato

- ③ trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) = 0$$

Un esempio più complicato

- ③ trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{aligned}x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) &= 0 \\(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) &= 0\end{aligned}$$

- ④ trovare il discriminante dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (1 + 3m + m^2)^2 - (5 + 6m + m^2)(1 + m^2) = 5m^2 - 4$$

Un esempio più complicato

- ③ trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{aligned}x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) &= 0 \\(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) &= 0\end{aligned}$$

- ④ trovare il discriminante dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (1 + 3m + m^2)^2 - (5 + 6m + m^2)(1 + m^2) = 5m^2 - 4$$

- ⑤ risolvere l'equazione $\Delta = 0$ nell'incognita m :

$$m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Un esempio più complicato

- 3 trovare l'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{aligned}x^2 + (mx - m - 1)^2 - 2x - 4(mx - m - 1) &= 0 \\(1 + m^2)x^2 - 2(1 + 3m + m^2)x + (5 + 6m + m^2) &= 0\end{aligned}$$

- 4 trovare il discriminante dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (1 + 3m + m^2)^2 - (5 + 6m + m^2)(1 + m^2) = 5m^2 - 4$$

- 5 risolvere l'equazione $\Delta = 0$ nell'incognita m :

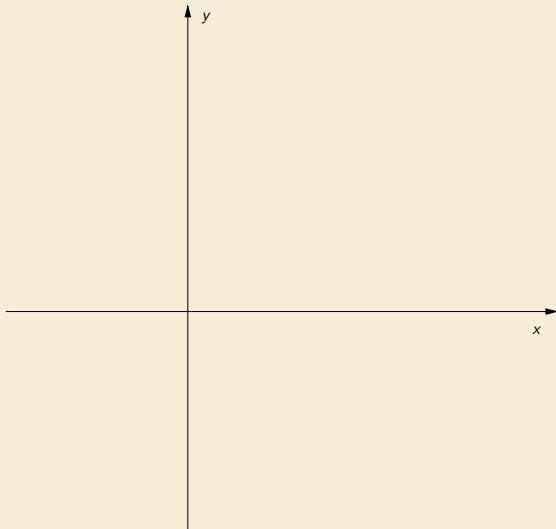
$$m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

- 6 sostituire i valori trovati nell'equazione del fascio di rette:

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}} - 1, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}} - 1.$$

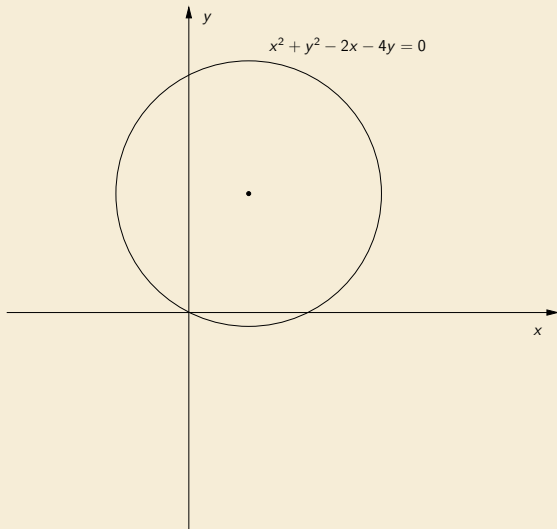
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



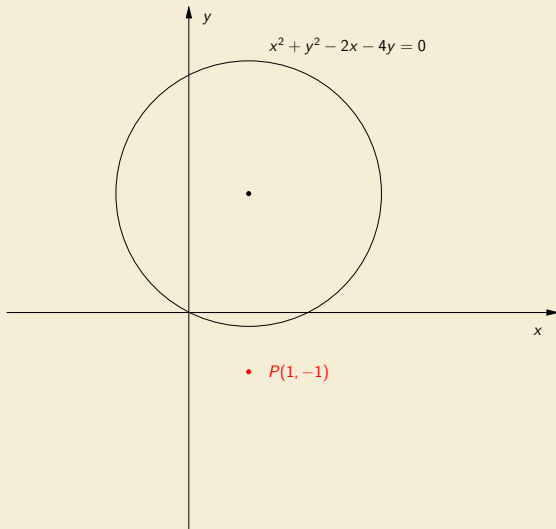
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



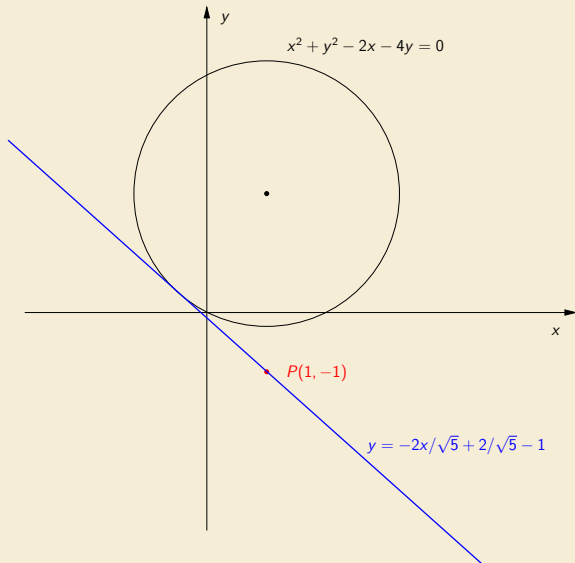
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



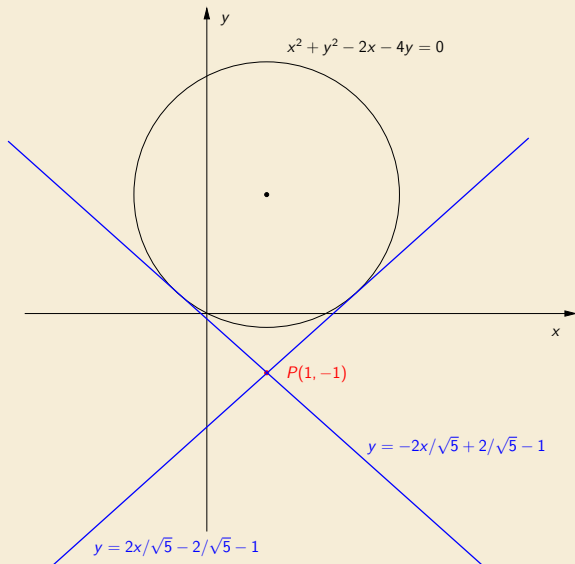
Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



Un esempio più complicato

Poiché il punto P è *esterno* alla circonferenza, troviamo due rette tangenti:



Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto-retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.

Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad 4c < a^2 + b^2,$$

allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto-retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.

Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.

Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad 4c < a^2 + b^2,$$

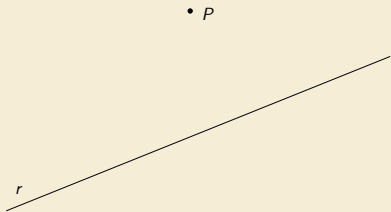
allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto-retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.

Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.



Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad 4c < a^2 + b^2,$$

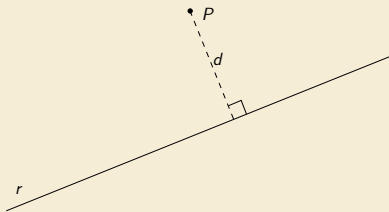
allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto-retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.

Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.



Il caso della circonferenza

Se la conica è una circonferenza, e dunque ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad 4c < a^2 + b^2,$$

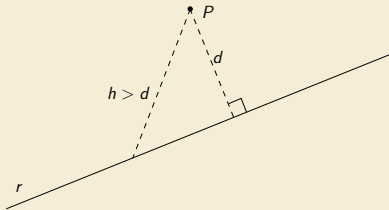
allora abbiamo a disposizione un metodo alternativo per imporre la condizione di tangenza.

Il metodo si basa sulla nozione di *distanza tra un punto e una retta*:

Distanza punto-retta

Si definisce distanza tra un punto P e una retta r la lunghezza del segmento che unisce P a r in modo perpendicolare.

Tale lunghezza è anche la minima distanza tra il punto P e i punti della retta.



Formula della distanza punto–retta

Se il punto P ha coordinate (x_0, y_0) e la retta r ha equazione implicita $ax + by + c = 0$, la distanza punto–retta è data da

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Formula della distanza punto–retta

Se il punto P ha coordinate (x_0, y_0) e la retta r ha equazione implicita $ax + by + c = 0$, la distanza punto–retta è data da

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Se invece la retta è data in forma esplicita, cioè $r : y = mx + q$, allora la formula della distanza punto–retta diventa

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Il caso della circonferenza

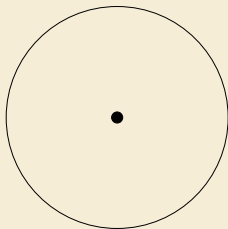
Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio.

Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.

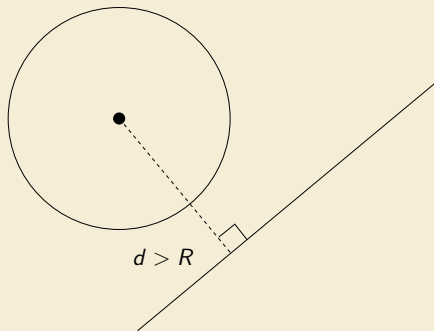
Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



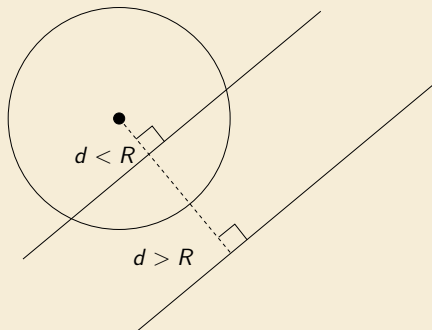
Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



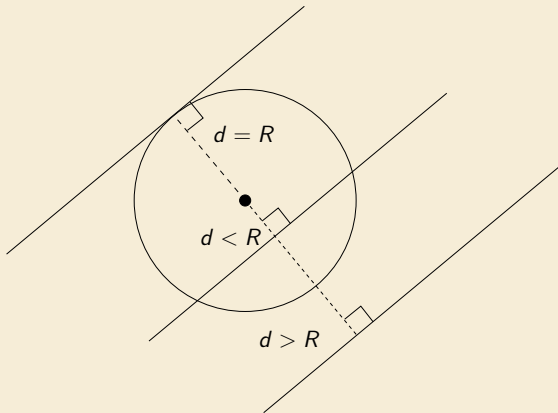
Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



Il caso della circonferenza

Torniamo alla circonferenza: osserviamo che le rette tangenti alla circonferenza hanno distanza dal centro pari al raggio, mentre quelle secanti distano meno del raggio e quelle esterne distano più del raggio. Questo segue dalla nota proprietà della circonferenza che assicura che il raggio condotto sul punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.



Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2)$,

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2)$, $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{5}$.

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2)$, $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{5}$.

Ora dobbiamo:

- costruire il fascio di rette per P : $y + 1 = m(x - 1)$

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2)$, $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{5}$.

Ora dobbiamo:

- costruire il fascio di rette per P : $y + 1 = m(x - 1)$
e scriverlo in forma implicita: $mx - y - m - 1 = 0$;

Il caso della circonferenza

Quindi per imporre la condizione di tangenza, conoscendo centro e raggio della circonferenza, bisogna imporre che la distanza della retta dal centro sia uguale al raggio.

Ripercorriamo l'esempio di prima:

Esempio rivisto

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e il punto $P = (1, -1)$, si trovino le rette tangenti alla circonferenza passanti per P .

Si ha subito $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 2)$, $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{5}$.

Ora dobbiamo:

- costruire il fascio di rette per P : $y + 1 = m(x - 1)$
e scriverlo in forma implicita: $mx - y - m - 1 = 0$;
- imporre che la distanza del fascio da C sia uguale a r :

$$\frac{|m - 2 - m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}.$$

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \Rightarrow$$

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \Rightarrow 5m^2 = 4 \Rightarrow$$

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \Rightarrow 5m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Quindi si trovano le rette tangenti come prima.

Il caso della circonferenza

Elevando al quadrato si ha

$$9 = 5(m^2 + 1) \Rightarrow 5m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Quindi si trovano le rette tangenti come prima.

È evidente che questo metodo richiede meno calcoli del precedente. Ha però il difetto di valere solo per la circonferenza.