

Successioni e numeri di Fibonacci

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Le successioni

Una *successione* è un elenco ordinato di oggetti, che possono anche essere ripetuti.

Le successioni

Una *successione* è un elenco **ordinato** di oggetti, che possono anche essere ripetuti.

La parola “**ordinato**” è importante: la successione ha un primo elemento, un secondo, un terzo, e così via.

Le successioni

Una *successione* è un elenco ordinato di oggetti, che possono anche essere ripetuti.

La parola “ordinato” è importante: la successione ha un primo elemento, un secondo, un terzo, e così via.

L'elenco degli oggetti è infinito, però è **numerabile**:

Le successioni

Una *successione* è un elenco ordinato di oggetti, che possono anche essere ripetuti.

La parola “ordinato” è importante: la successione ha un primo elemento, un secondo, un terzo, e così via.

L'elenco degli oggetti è infinito, però è **numerabile**:

questo vuol dire che si possono contare gli oggetti tramite i numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Quindi:

Le successioni

Una *successione* è un elenco ordinato di oggetti, che possono anche essere ripetuti.

La parola “ordinato” è importante: la successione ha un primo elemento, un secondo, un terzo, e così via.

L'elenco degli oggetti è infinito, però è **numerabile**:

questo vuol dire che si possono contare gli oggetti tramite i numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Quindi:

Definizione

Una successione è una funzione

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{collezione degli oggetti}\}$$

che ad ogni numero naturale associa un oggetto.

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 1

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1 \quad a_5 = -1 \quad \dots$$

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 1

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1 \quad a_5 = -1 \quad \dots$$

è la successione dei valori 1 e -1 presi alternativamente. Si può anche scrivere così:

$$a_n = (-1)^n.$$

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 2

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 6 \quad a_4 = 8 \quad a_5 = 10 \quad \dots$$

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 2

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 6 \quad a_4 = 8 \quad a_5 = 10 \quad \dots$$

è la successione dei numeri pari. Si può anche scrivere così:

$$a_n = 2n.$$

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 3

$$a_0 = 0,3 \quad a_1 = 0,33 \quad a_2 = 0,333 \quad a_3 = 0,3333 \quad \dots$$

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 3

$$a_0 = 0,3 \quad a_1 = 0,33 \quad a_2 = 0,333 \quad a_3 = 0,3333 \quad \dots$$

è una successione di numeri razionali che approssima $\frac{1}{3}$.

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 4

$$a_0 = 3 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = 5 \quad a_5 = 9 \quad a_6 = 2 \dots$$

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 4

$$a_0 = 3 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = 5 \quad a_5 = 9 \quad a_6 = 2 \dots$$

è la successione dello sviluppo decimale delle *cifre* di π . Questa successione ha valori nell'insieme delle cifre da 0 a 9.

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 5

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{4} \quad a_4 = \frac{1}{5} \quad a_5 = \frac{1}{6} \quad \dots$$

Le successioni numeriche

Noi saremo interessati a **successioni numeriche**, quelle per cui gli oggetti sono numeri reali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nel caso delle successioni, di solito si indica con a_n il valore $a(n)$, ovvero l' n -esimo oggetto nell'elenco.

Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 5

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{4} \quad a_4 = \frac{1}{5} \quad a_5 = \frac{1}{6} \quad \dots$$

è la successione dei reciproci dei numeri positivi.

Si può anche scrivere $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Limite di una successione

Uno dei problemi più interessanti sulle successioni numeriche è capire il loro comportamento per valori di n molto grandi.

Per questo ci interessa introdurre la nozione di **limite di una successione** per n che tende all'infinito.

Limite di una successione

Uno dei problemi più interessanti sulle successioni numeriche è capire il loro comportamento per valori di n molto grandi.

Per questo ci interessa introdurre la nozione di **limite di una successione** per n che tende all'infinito.

Informalmente: se al crescere di n si ha che a_n diventa arbitrariamente grande, allora diremo che “ a_n tende all'infinito” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty .$$

Limite di una successione

Uno dei problemi più interessanti sulle successioni numeriche è capire il loro comportamento per valori di n molto grandi.

Per questo ci interessa introdurre la nozione di **limite di una successione** per n che tende all'infinito.

Informalmente: se al crescere di n si ha che a_n diventa arbitrariamente grande, allora diremo che “ a_n tende all'infinito” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty .$$

Se invece al crescere di n si ha che a_n si avvicina arbitrariamente a un certo numero ℓ , allora diremo che “ a_n converge a ℓ ” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \ell \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell .$$

Definizione formale di limite

- Se per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_M$ si abbia $a_n > M$, allora la successione a_n tende a $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Definizione formale di limite

- Se per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_M$ si abbia $a_n > M$, allora la successione a_n tende a $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- Se per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_M$ si abbia $a_n < -M$, allora la successione a_n tende a $-\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Definizione formale di limite

- Se per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_M$ si abbia $a_n > M$, allora la successione a_n tende a $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- Se per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_M$ si abbia $a_n < -M$, allora la successione a_n tende a $-\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

- Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si abbia $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$, allora la successione tende a ℓ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

Esempi di limiti

Torniamo agli esempi precedenti.

- La successione $a_n = (-1)^n$ non ammette alcun limite, poiché non si avvicina indefinitamente a nessun numero, e non va neppure all'infinito.

Esempi di limiti

Torniamo agli esempi precedenti.

- La successione $a_n = (-1)^n$ non ammette alcun limite, poiché non si avvicina indefinitamente a nessun numero, e non va neppure all'infinito.
- La successione dei numeri pari $a_n = 2n$ tende a $+\infty$: infatti, fissato un qualsiasi $M > 0$, sappiamo trovare un numero naturale n_M per il quale $2n > M$ per ogni $n \geq n_M$ (basta prendere il numero successivo alla parte intera di $M/2$).

Esempi di limiti

Torniamo agli esempi precedenti.

- La successione $a_n = (-1)^n$ non ammette alcun limite, poiché non si avvicina indefinitamente a nessun numero, e non va neppure all'infinito.
- La successione dei numeri pari $a_n = 2n$ tende a $+\infty$: infatti, fissato un qualsiasi $M > 0$, sappiamo trovare un numero naturale n_M per il quale $2n > M$ per ogni $n \geq n_M$ (basta prendere il numero successivo alla parte intera di $M/2$).
- La successione 0,3, 0,33 0,333 ... delle approssimazioni di $\frac{1}{3}$ tende, ovviamente, a $\frac{1}{3}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

Infatti, fissato un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, possiamo spingere l'approssimante a_n ad essere vicina a $\frac{1}{3}$ con un errore più piccolo di ε .

Esempi di limiti

- La successione 3,1,4,1,5,9,2,6,... delle cifre di π non ammette limite. Dimostrarlo però è parecchio complicato, ed è legato anche al fatto che π è un numero *irrazionale*.

Esempi di limiti

- La successione $3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, \dots$ delle cifre di π non ammette limite. Dimostrarlo però è parecchio complicato, ed è legato anche al fatto che π è un numero *irrazionale*.
- La successione dei reciproci $a_n = \frac{1}{n+1}$ tende a 0, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Infatti, preso un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, posso sempre fare in modo che gli $\frac{1}{n+1}$ siano più piccoli di ε da un certo n in poi.

Le successioni per ricorsione

Esistono dei modi per definire un elemento della successione a partire da tutti gli elementi precedenti. Ad esempio, si potrebbe definire una successione in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

Le successioni per ricorsione

Esistono dei modi per definire un elemento della successione a partire da tutti gli elementi precedenti. Ad esempio, si potrebbe definire una successione in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

Come si vede, partendo dal primo elemento $a_0 = 0$ si può trovare il secondo, $a_1 = 1 + a_0 = 1$

Le successioni per ricorsione

Esistono dei modi per definire un elemento della successione a partire da tutti gli elementi precedenti. Ad esempio, si potrebbe definire una successione in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

Come si vede, partendo dal primo elemento $a_0 = 0$ si può trovare il secondo, $a_1 = 1 + a_0 = 1$ e poi il terzo, $a_2 = 2 + a_1 = 3$,

Le successioni per ricorsione

Esistono dei modi per definire un elemento della successione a partire da tutti gli elementi precedenti. Ad esempio, si potrebbe definire una successione in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

Come si vede, partendo dal primo elemento $a_0 = 0$ si può trovare il secondo, $a_1 = 1 + a_0 = 1$ e poi il terzo, $a_2 = 2 + a_1 = 3$, e poi il quarto, $a_3 = 3 + a_2 = 6$, e così via.

Le successioni per ricorsione

Esistono dei modi per definire un elemento della successione a partire da tutti gli elementi precedenti. Ad esempio, si potrebbe definire una successione in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

Come si vede, partendo dal primo elemento $a_0 = 0$ si può trovare il secondo, $a_1 = 1 + a_0 = 1$ e poi il terzo, $a_2 = 2 + a_1 = 3$, e poi il quarto, $a_3 = 3 + a_2 = 6$, e così via.

Si ottiene così una successione, dove per conoscere l'elemento a_n devo prima ricavare tutti gli elementi precedenti.

Le successioni per ricorsione

Esistono dei modi per definire un elemento della successione a partire da tutti gli elementi precedenti. Ad esempio, si potrebbe definire una successione in questo modo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

Come si vede, partendo dal primo elemento $a_0 = 0$ si può trovare il secondo, $a_1 = 1 + a_0 = 1$ e poi il terzo, $a_2 = 2 + a_1 = 3$, e poi il quarto, $a_3 = 3 + a_2 = 6$, e così via.

Si ottiene così una successione, dove per conoscere l'elemento a_n devo prima ricavare tutti gli elementi precedenti.

Queste successioni si chiamano **ricorsive**, perché dobbiamo ripetere la loro definizione molte volte, per arrivare all'elemento desiderato.

Le successioni per ricorsione

A volte (ma non sempre) può capitare che una successione per ricorsione si possa anche scrivere nella cosiddetta **forma esplicita**, quella dove a_n si scrive direttamente in funzione di n , senza dover conoscere tutti gli elementi precedenti.

Le successioni per ricorsione

A volte (ma non sempre) può capitare che una successione per ricorsione si possa anche scrivere nella cosiddetta **forma esplicita**, quella dove a_n si scrive direttamente in funzione di n , senza dover conoscere tutti gli elementi precedenti.

Ad esempio, nella successione introdotta prima

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

si può vedere che

$$a_1 = 0 + 1,$$

Le successioni per ricorsione

A volte (ma non sempre) può capitare che una successione per ricorsione si possa anche scrivere nella cosiddetta **forma esplicita**, quella dove a_n si scrive direttamente in funzione di n , senza dover conoscere tutti gli elementi precedenti.

Ad esempio, nella successione introdotta prima

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

si può vedere che

$$a_1 = 0 + 1, \quad a_2 = 0 + 1 + 2,$$

Le successioni per ricorsione

A volte (ma non sempre) può capitare che una successione per ricorsione si possa anche scrivere nella cosiddetta **forma esplicita**, quella dove a_n si scrive direttamente in funzione di n , senza dover conoscere tutti gli elementi precedenti.

Ad esempio, nella successione introdotta prima

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

si può vedere che

$$a_1 = 0 + 1, \quad a_2 = 0 + 1 + 2, \quad a_3 = 0 + 1 + 2 + 3, \quad \dots$$

Le successioni per ricorsione

A volte (ma non sempre) può capitare che una successione per ricorsione si possa anche scrivere nella cosiddetta **forma esplicita**, quella dove a_n si scrive direttamente in funzione di n , senza dover conoscere tutti gli elementi precedenti.

Ad esempio, nella successione introdotta prima

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

si può vedere che

$$a_1 = 0 + 1, \quad a_2 = 0 + 1 + 2, \quad a_3 = 0 + 1 + 2 + 3, \quad \dots$$

quindi $a_n = 0 + 1 + \dots + n$. L'elemento di posto n è la somma dei numeri naturali tra 0 e n .

Le successioni per ricorsione

A volte (ma non sempre) può capitare che una successione per ricorsione si possa anche scrivere nella cosiddetta **forma esplicita**, quella dove a_n si scrive direttamente in funzione di n , senza dover conoscere tutti gli elementi precedenti.

Ad esempio, nella successione introdotta prima

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n + a_{n-1} \end{cases}$$

si può vedere che

$$a_1 = 0 + 1, \quad a_2 = 0 + 1 + 2, \quad a_3 = 0 + 1 + 2 + 3, \quad \dots$$

quindi $a_n = 0 + 1 + \dots + n$. L'elemento di posto n è la somma dei numeri naturali tra 0 e n . Questa si può scrivere anche come

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il principio di induzione

Un argomento legato in qualche modo alle successioni per ricorsione è il cosiddetto **principio di induzione**. Si tratta di una tecnica dimostrativa che è molto utile per dimostrare alcune formule sui numeri naturali.

Il principio di induzione

Un argomento legato in qualche modo alle successioni per ricorsione è il cosiddetto **principio di induzione**. Si tratta di una tecnica dimostrativa che è molto utile per dimostrare alcune formule sui numeri naturali.

Enunciato del principio di induzione

Sia $P(n)$ una certa formula che dipende dal numero n . Supponiamo di dimostrare che

- $P(0)$ è vera;
- $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ per ogni $n \geq 1$.

Allora si ha che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il principio di induzione

Un argomento legato in qualche modo alle successioni per ricorsione è il cosiddetto **principio di induzione**. Si tratta di una tecnica dimostrativa che è molto utile per dimostrare alcune formule sui numeri naturali.

Enunciato del principio di induzione

Sia $P(n)$ una certa formula che dipende dal numero n . Supponiamo di dimostrare che

- $P(0)$ è vera;
- $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ per ogni $n \geq 1$.

Allora si ha che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi per dimostrare una certa formula sui numeri naturali possiamo procedere così: la dimostriamo per 0 e poi, *facendo finta* che sia vera per un generico $n-1$, la dimostriamo per n . Allora la formula è vera per tutti gli n .

La somma dei primi n numeri naturali

Ad esempio: prima abbiamo affermato che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La somma dei primi n numeri naturali

Ad esempio: prima abbiamo affermato che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cerchiamo di dimostrarlo tramite il principio di induzione: intanto è vero che $0 = \frac{0(0+1)}{2}$, quindi la formula è vera per 0.

La somma dei primi n numeri naturali

Ad esempio: prima abbiamo affermato che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cerchiamo di dimostrarlo tramite il principio di induzione: intanto è vero che $0 = \frac{0(0+1)}{2}$, quindi la formula è vera per 0.

Ora facciamo finta che la formula sia vera per $n - 1$, ovvero che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Da questo possiamo dedurre che

La somma dei primi n numeri naturali

Ad esempio: prima abbiamo affermato che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cerchiamo di dimostrarlo tramite il principio di induzione: intanto è vero che $0 = \frac{0(0+1)}{2}$, quindi la formula è vera per 0.

Ora facciamo finta che la formula sia vera per $n-1$, ovvero che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Da questo possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \cdots + n &= \left(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)\right) + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

La somma dei primi n numeri naturali

Ad esempio: prima abbiamo affermato che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cerchiamo di dimostrarlo tramite il principio di induzione: intanto è vero che $0 = \frac{0(0+1)}{2}$, quindi la formula è vera per 0.

Ora facciamo finta che la formula sia vera per $n-1$, ovvero che

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Da questo possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \cdots + n &= \left(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)\right) + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che la formula è vera per ogni n .

Le serie numeriche

Ad ogni successione numerica (a_n) si può associare un'altra successione, detta successione *delle somme parziali*, in questo modo:

$$s_0 = a_0 \quad s_1 = a_0 + a_1 \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \quad \dots$$

ovvero

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Le serie numeriche

Ad ogni successione numerica (a_n) si può associare un'altra successione, detta successione *delle somme parziali*, in questo modo:

$$s_0 = a_0 \quad s_1 = a_0 + a_1 \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \quad \dots$$

ovvero

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Introducendo il simbolo di sommatoria (una sigma greca maiuscola), si scrive

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Le serie numeriche

Ad ogni successione numerica (a_n) si può associare un'altra successione, detta successione *delle somme parziali*, in questo modo:

$$s_0 = a_0 \quad s_1 = a_0 + a_1 \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \quad \dots$$

ovvero

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Introducendo il simbolo di sommatoria (una sigma greca maiuscola), si scrive

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Quando mandiamo al limite la successione delle somme parziali otteniamo in qualche senso una “somma di infiniti termini”, che si chiama *serie numerica*, e si scrive

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Esempio di serie numerica

L'esempio visto prima della successione

$$s_n = 0 + 1 + \cdots + n$$

è un esempio di successione di somme parziali, in cui $a_n = n$ e dunque

$$s_n = \sum_{k=0}^n k.$$

Esempio di serie numerica

L'esempio visto prima della successione

$$s_n = 0 + 1 + \cdots + n$$

è un esempio di successione di somme parziali, in cui $a_n = n$ e dunque

$$s_n = \sum_{k=0}^n k.$$

Per quanto abbiamo visto, si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

e dunque la successione s_n diverge a $+\infty$. Si dice che la *serie diverge*.

Esempio di serie numerica

L'esempio visto prima della successione

$$s_n = 0 + 1 + \cdots + n$$

è un esempio di successione di somme parziali, in cui $a_n = n$ e dunque

$$s_n = \sum_{k=0}^n k.$$

Per quanto abbiamo visto, si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

e dunque la successione s_n diverge a $+\infty$. Si dice che la *serie diverge*. Per sperare che una successione delle somme parziali converga a un numero ℓ (ovvero che la *serie converga*), i termini a_n della successione di partenza devono diventare sempre più piccoli e avvicinarsi a 0.

La serie armonica

È chiaro che la serie dei numeri naturali vista prima diverge: stiamo sommando numeri sempre più grandi!

La serie armonica

È chiaro che la serie dei numeri naturali vista prima diverge: stiamo sommando numeri sempre più grandi! Proviamo invece a sommare quantità sempre più piccole:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

La serie armonica

È chiaro che la serie dei numeri naturali vista prima diverge: stiamo sommando numeri sempre più grandi! Proviamo invece a sommare quantità sempre più piccole:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Stiamo sommando i reciproci dei numeri naturali: come abbiamo detto prima, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0, quindi i termini della successione diventano sempre più piccoli.

La serie armonica

È chiaro che la serie dei numeri naturali vista prima diverge: stiamo sommando numeri sempre più grandi! Proviamo invece a sommare quantità sempre più piccole:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Stiamo sommando i reciproci dei numeri naturali: come abbiamo detto prima, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0, quindi i termini della successione diventano sempre più piccoli.

Possiamo dire che la serie converge?

La serie armonica

È chiaro che la serie dei numeri naturali vista prima diverge: stiamo sommando numeri sempre più grandi! Proviamo invece a sommare quantità sempre più piccole:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Stiamo sommando i reciproci dei numeri naturali: come abbiamo detto prima, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0, quindi i termini della successione diventano sempre più piccoli.

Possiamo dire che la serie converge?

La risposta è NO. Tale serie, che si chiama **serie armonica**, comunque dà come risultato $+\infty$.

La serie armonica

Un modo per vedere che la serie armonica diverge è il seguente: raggruppiamo i suoi termini in gruppi di 1, 2, 4, 8, 16, ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots$$

La serie armonica

Un modo per vedere che la serie armonica diverge è il seguente: raggruppiamo i suoi termini in gruppi di 1, 2, 4, 8, 16, ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots$$

e osserviamo che ogni gruppo (tra le parentesi) è maggiore o uguale a 1:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \dots \end{aligned}$$

quindi la serie è più grande di una somma di infiniti 1, che ovviamente è infinita.

Serie convergenti

Ora sorge spontanea una domanda: ma possono esistere serie convergenti? Non è che a forza di sommare numeri, per quanto piccoli, si vada per forza all'infinito? In fondo anche Zenone, il filosofo greco, era di questa idea. . .

Serie convergenti

Ora sorge spontanea una domanda: ma possono esistere serie convergenti? Non è che a forza di sommare numeri, per quanto piccoli, si vada per forza all'infinito? In fondo anche Zenone, il filosofo greco, era di questa idea... Ebbene, le serie convergenti esistono, per fortuna dei matematici! Vediamone un breve esempio, la **serie di Mengoli** (Pietro Mengoli, 1626-1686):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \dots$$

Come già si vede, i termini di questa serie decrescono “più in fretta” di quelli della serie armonica, quindi c'è speranza che converga.

La serie di Mengoli

Per dimostrarlo, basta accorgersi che

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

La serie di Mengoli

Per dimostrarlo, basta accorgersi che

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

quindi la successione delle somme parziali si può scrivere in *forma telescopica*, in questo modo:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

La serie di Mengoli

Per dimostrarlo, basta accorgersi che

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

quindi la successione delle somme parziali si può scrivere in *forma telescopica*, in questo modo:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Semplificando i termini di segno opposto, si ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e dunque, visto che la successione $\frac{1}{n+1}$ tende a 0, si ha che la serie di Mengoli converge e vale 1.

La successione di Fibonacci

Veniamo ora ad una successione molto famosa, dovuta a Leonardo Fibonacci (1170-1250), anche se pare che in India fosse già nota da tempo. È una successione definita per ricorsione, ma stavolta il termine generale F_n si trova conoscendo i *due* suoi termini precedenti:

La successione di Fibonacci

Veniamo ora ad una successione molto famosa, dovuta a Leonardo Fibonacci (1170-1250), anche se pare che in India fosse già nota da tempo. È una successione definita per ricorsione, ma stavolta il termine generale F_n si trova conoscendo i *due* suoi termini precedenti:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

La successione di Fibonacci

Veniamo ora ad una successione molto famosa, dovuta a Leonardo Fibonacci (1170-1250), anche se pare che in India fosse già nota da tempo. È una successione definita per ricorsione, ma stavolta il termine generale F_n si trova conoscendo i *due* suoi termini precedenti:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Si parte dai numeri 0 e 1, e poi ogni termine della successione di Fibonacci si trova sommando i due precedenti.

La successione di Fibonacci

Veniamo ora ad una successione molto famosa, dovuta a Leonardo Fibonacci (1170-1250), anche se pare che in India fosse già nota da tempo. È una successione definita per ricorsione, ma stavolta il termine generale F_n si trova conoscendo i *due* suoi termini precedenti:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Si parte dai numeri 0 e 1, e poi ogni termine della successione di Fibonacci si trova sommando i due precedenti.

I primi 19 elementi della successione di Fibonacci sono

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

I numeri di Fibonacci nella natura e nell'arte

I numeri di Fibonacci sono veramente onnipresenti in natura: i petali di moltissimi fiori (anche le margherite!), le infiorescenze a spirale dei girasoli, le spirali di pigne e ananas, la conchiglia del nautilus, sono tutti esempi in cui li possiamo ritrovare.

I numeri di Fibonacci nella natura e nell'arte

I numeri di Fibonacci sono veramente onnipresenti in natura: i petali di moltissimi fiori (anche le margherite!), le infiorescenze a spirale dei girasoli, le spirali di pigne e ananas, la conchiglia del nautilus, sono tutti esempi in cui li possiamo ritrovare. Esistono anche interpretazioni biologiche sullo sviluppo degli esseri viventi che ne giustificano la sorprendente ricorrenza, (per quanto a volte si abbia la sensazione che alcune ricorrenze dei numeri di Fibonacci siano un po' forzate).

I numeri di Fibonacci nella natura e nell'arte

I numeri di Fibonacci sono veramente onnipresenti in natura: i petali di moltissimi fiori (anche le margherite!), le infiorescenze a spirale dei girasoli, le spirali di pigne e ananas, la conchiglia del nautilus, sono tutti esempi in cui li possiamo ritrovare. Esistono anche interpretazioni biologiche sullo sviluppo degli esseri viventi che ne giustificano la sorprendente ricorrenza, (per quanto a volte si abbia la sensazione che alcune ricorrenze dei numeri di Fibonacci siano un po' forzate).

In effetti, tali numeri sono stati introdotti da Fibonacci con un intento "naturale": descrivere la crescita di una popolazione di conigli!

I numeri di Fibonacci nella natura e nell'arte

I numeri di Fibonacci sono veramente onnipresenti in natura: i petali di moltissimi fiori (anche le margherite!), le infiorescenze a spirale dei girasoli, le spirali di pigne e ananas, la conchiglia del nautilus, sono tutti esempi in cui li possiamo ritrovare. Esistono anche interpretazioni biologiche sullo sviluppo degli esseri viventi che ne giustificano la sorprendente ricorrenza, (per quanto a volte si abbia la sensazione che alcune ricorrenze dei numeri di Fibonacci siano un po' forzate).

In effetti, tali numeri sono stati introdotti da Fibonacci con un intento "naturale": descrivere la crescita di una popolazione di conigli!

Anche nell'arte, specialmente nell'architettura e nella pittura, i numeri di Fibonacci sono molto presenti. Questo fatto però ha una motivazione meno misteriosa, visto che c'è un legame molto stretto con la **sezione aurea**.

Legame con la sezione aurea

Se infatti si costruisce la successione dei rapporti tra un numero di Fibonacci e il suo precedente, ovvero

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

si ottiene una successione di numeri razionali che converge a ϕ , dove ricordiamo che

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$$

è la **sezione aurea**, cioè quel numero positivo tale che

$$(1 + \phi) : \phi = \phi : 1.$$

Forma esplicita

Dimostreremo fra un attimo quanto abbiamo enunciato sul legame tra gli F_n e la sezione aurea. Prima parliamo di una proprietà altrettanto sorprendente: la successione di Fibonacci può essere messa in forma esplicita, senza usare la ricorsione.

Forma esplicita

Dimostreremo fra un attimo quanto abbiamo enunciato sul legame tra gli F_n e la sezione aurea. Prima parliamo di una proprietà altrettanto sorprendente: la successione di Fibonacci può essere messa in forma esplicita, senza usare la ricorsione.

Infatti: cerchiamo di scrivere ogni F_n come potenza di una base λ fissata, ovvero $F_n = \lambda^n$. Tale base dovrà soddisfare la relazione

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n,$$

ovvero $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Forma esplicita

Dimostreremo fra un attimo quanto abbiamo enunciato sul legame tra gli F_n e la sezione aurea. Prima parliamo di una proprietà altrettanto sorprendente: la successione di Fibonacci può essere messa in forma esplicita, senza usare la ricorsione.

Infatti: cerchiamo di scrivere ogni F_n come potenza di una base λ fissata, ovvero $F_n = \lambda^n$. Tale base dovrà soddisfare la relazione

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n,$$

ovvero $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Chi conosce la sezione aurea riconoscerà subito questa equazione, le cui soluzioni sono proprio ϕ e $1 - \phi$, ovvero $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Forma esplicita

Dimostreremo fra un attimo quanto abbiamo enunciato sul legame tra gli F_n e la sezione aurea. Prima parliamo di una proprietà altrettanto sorprendente: la successione di Fibonacci può essere messa in forma esplicita, senza usare la ricorsione.

Infatti: cerchiamo di scrivere ogni F_n come potenza di una base λ fissata, ovvero $F_n = \lambda^n$. Tale base dovrà soddisfare la relazione

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n,$$

ovvero $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Chi conosce la sezione aurea riconoscerà subito questa equazione, le cui soluzioni sono proprio ϕ e $1 - \phi$, ovvero $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Allora si avrà

$$F_n = a\phi^n + b(1 - \phi)^n$$

dove le costanti a, b devono essere trovate in base alle condizioni iniziali.

Forma esplicita

Partendo da

$$F_n = a\phi^n + b(1 - \phi)^n$$

e imponendo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, con facili conti si trova $a = 1/\sqrt{5}$ e $b = -1/\sqrt{5}$, quindi

$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Forma esplicita

Partendo da

$$F_n = a\phi^n + b(1 - \phi)^n$$

e imponendo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, con facili conti si trova $a = 1/\sqrt{5}$ e $b = -1/\sqrt{5}$, quindi

$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Questa formula, molto utile dal punto di vista teorico, è però computazionalmente molto pesante, e infatti con un computer si usano altri modi per trovare i numeri di Fibonacci.

Forma esplicita

Partendo da

$$F_n = a\phi^n + b(1 - \phi)^n$$

e imponendo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, con facili conti si trova $a = 1/\sqrt{5}$ e $b = -1/\sqrt{5}$, quindi

$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Questa formula, molto utile dal punto di vista teorico, è però computazionalmente molto pesante, e infatti con un computer si usano altri modi per trovare i numeri di Fibonacci.

Però grazie ad essa è facile calcolare

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1} - (1 - \phi)^{n+1}}{\phi^n - (1 - \phi)^n}.$$

Forma esplicita

Partendo da

$$F_n = a\phi^n + b(1 - \phi)^n$$

e imponendo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, con facili conti si trova $a = 1/\sqrt{5}$ e $b = -1/\sqrt{5}$, quindi

$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Questa formula, molto utile dal punto di vista teorico, è però computazionalmente molto pesante, e infatti con un computer si usano altri modi per trovare i numeri di Fibonacci.

Però grazie ad essa è facile calcolare

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1} - (1 - \phi)^{n+1}}{\phi^n - (1 - \phi)^n}.$$

Facendo il limite per $n \rightarrow \infty$, essendo $(1 - \phi)^n \rightarrow 0$ poiché $|1 - \phi| < 1$, si ha $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \phi$.

Altre identità

I numeri di Fibonacci hanno altre notevoli proprietà, che di solito si dimostrano per induzione. Vediamo qualche esempio.

Altre identità

I numeri di Fibonacci hanno altre notevoli proprietà, che di solito si dimostrano per induzione. Vediamo qualche esempio.

Le *formule del raddoppio* di n :

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Altre identità

I numeri di Fibonacci hanno altre notevoli proprietà, che di solito si dimostrano per induzione. Vediamo qualche esempio.

Le *formule del raddoppio* di n :

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Proviamo a dimostrarle: per $n = 1$ si ha subito $F_2 = 1 = F_1^2 - F_0^2$ e $F_3 = 2 = F_1^2 + F_2^2$.

Altre identità

I numeri di Fibonacci hanno altre notevoli proprietà, che di solito si dimostrano per induzione. Vediamo qualche esempio.

Le *formule del raddoppio* di n :

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Proviamo a dimostrarle: per $n = 1$ si ha subito $F_2 = 1 = F_1^2 - F_0^2$ e $F_3 = 2 = F_1^2 + F_2^2$. Considerate le identità vere per $n - 1$, abbiamo

$$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1} = (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2) + (F_n^2 + F_{n-1}^2) = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

che dimostra la seconda.

Altre identità

I numeri di Fibonacci hanno altre notevoli proprietà, che di solito si dimostrano per induzione. Vediamo qualche esempio.

Le *formule del raddoppio* di n :

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Proviamo a dimostrarle: per $n = 1$ si ha subito $F_2 = 1 = F_1^2 - F_0^2$ e $F_3 = 2 = F_1^2 + F_2^2$. Considerate le identità vere per $n - 1$, abbiamo

$$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1} = (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2) + (F_n^2 + F_{n-1}^2) = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

che dimostra la seconda. Con qualche conto in più, notando che

$$F_{n-2}^2 = (F_n - F_{n-1})^2 = F_n^2 + F_{n-1}^2 - 2F_n F_{n-1}$$

Altre identità

I numeri di Fibonacci hanno altre notevoli proprietà, che di solito si dimostrano per induzione. Vediamo qualche esempio.

Le *formule del raddoppio* di n :

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Proviamo a dimostrarle: per $n = 1$ si ha subito $F_2 = 1 = F_1^2 - F_0^2$ e $F_3 = 2 = F_1^2 + F_2^2$. Considerate le identità vere per $n - 1$, abbiamo

$$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1} = (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2) + (F_n^2 + F_{n-1}^2) = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

che dimostra la seconda. Con qualche conto in più, notando che

$$F_{n-2}^2 = (F_n - F_{n-1})^2 = F_n^2 + F_{n-1}^2 - 2F_nF_{n-1}$$

otteniamo, aggiungendo e togliendo $2F_nF_{n-1}$,

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} = (F_n^2 + F_{n-1}^2) + (F_n^2 - F_{n-2}^2) \\ &= (F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1}) + (F_n^2 - F_{n-2}^2 - 2F_nF_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \end{aligned}$$

che dimostra la prima.

Altre identità

L'identità di Cassini:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Altre identità

L'identità di Cassini:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

L'identità di Catalan:

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n+r-1}F_r^2$$

Altre identità

L'identità di Cassini:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

L'identità di Catalan:

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n+r-1}F_r^2$$

Le identità sulle somme:

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1, \quad \sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n}.$$

Altre identità

L'identità di Cassini:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

L'identità di Catalan:

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n+r-1}F_r^2$$

Le identità sulle somme:

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1, \quad \sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n}.$$

Queste ultime tre possono essere dimostrate per induzione per esercizio.