

Storia del calcolo infinitesimale, V

I fondamenti del calcolo infinitesimale

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

La diffusione del calcolo differenziale in Europa

Nell'immediato periodo post-Leibniz nell'Europa continentale si assiste ad una rapida diffusione dei metodi del calcolo differenziale e del calcolo integrale, anche se tra pochi esponenti della comunità matematica. In particolare, i primi matematici che danno un notevole contributo alla teoria sono i fratelli Bernoulli, Jacob (1654-1705) e Johann (1667-1748). In questi anni il calcolo differenziale viene applicato per la risoluzione di moltissimi problemi di origine fisica, problemi inattaccabili con gli strumenti della matematica classica. Nonostante questi matematici di grande valore cercano di diffondere il calcolo in Europa, le resistenze sono tante, e sono dovute soprattutto al fatto che i fondamenti del calcolo stesso sono poco affidabili e imprecisati, rispetto per esempio ai ben noti metodi classici, di solide fondamenta. Per cercare di vincere queste resistenze, i matematici sostenitori del nuovo calcolo si dilettaavano a proporre spesso problemi inattaccabili classicamente, allo scopo di mostrare la superiorità del nuovo metodo di calcolo.

Va in proposito ricordato il più celebre problema di questo tipo, proposto nel 1696 proprio da uno dei Bernoulli, e precisamente da Johann, sugli *Acta Eruditorum*. Si tratta del celebre problema della *brachistocrona*: dati due punti P e Q in un piano verticale, posti ad altezza diversa, si chiede di determinare la curva che connette P e Q e che minimizza il tempo di discesa di un grave che la percorre per il solo effetto della forza di gravità. Il problema della brachistocrona è il problema che ha segnato l'inizio di quel ramo dell'analisi matematica oggi noto come *Calcolo delle Variazioni*, ovvero dello studio dei problemi di minimo di funzionali di tipo integrale. Tra le soluzioni giunte per questo problema arrivano quelle di Leibniz e del fratello Jacob; inoltre arriva anche una soluzione non firmata dall'Inghilterra, ma notoriamente dovuta a Newton: si narra altresì che Newton abbia risolto il problema della brachistocrona in una sola notte di lavoro. Curiosamente, la soluzione a questo problema è una curva già nota a quei tempi: si tratta infatti della cicloide, di cui abbiamo già parlato a proposito della determinazione delle tangenti con metodi riconducibili a considerazioni di tipo cinematico.

Ma non è solo la Svizzera, patria dei Bernoulli, o la Germania ad accogliere le nuove idee della matematica. Il nuovo calcolo arriva anche in Francia nel 1691, anno in cui Johann Bernoulli, durante un soggiorno a Parigi, insegna il calcolo infinitesimale al marchese francese Guillaume François de l'Hôpital (1661-1704) il quale nel 1696 pubblica, in anonimato, il trattato *Analyse des infiniments petits*, prima esposizione sistematica del calcolo differenziale.

Il concetto di funzione

Abbiamo più volte sottolineato il fatto che il moderno concetto di funzione non è presente negli studi di calcolo infinitesimale di Newton e Leibniz, ma ormai siamo arrivati al momento in cui i matematici capiscono che la nozione di funzione può essere risolutiva per approfondire il problema sui fondamenti dell'analisi matematica. Il termine *funzione* appare per la prima volta nel 1673 in un manoscritto di Leibniz intitolato *Methodus tangentium inversa seu de functionibus*. Il concetto di funzione tuttavia fa fatica a prendere piede: ricordiamo che fino a questo momento gli oggetti di interesse matematico erano le curve, espresse da relazioni del tipo

$$P(x, y) = 0.$$

Anche i Bernoulli trattano in modo secondario l'idea di funzione, ma sempre più si comprende in questi anni il fatto che la relazione

$$P(x, y) = 0$$

sta in realtà dicendo, in molte situazioni, che l'ordinata y viene calcolata a partire dall'ascissa x applicando ripetutamente varie operazioni.

Ecco che quindi uno dei Bernoulli dà la seguente definizione:

Definizione

(Johann Bernoulli, 1718) Una funzione di una grandezza variabile è una quantità composta in una maniera qualunque da questa grandezza variabile e da costanti.

Si fa quindi spazio una prima nozione di funzione completamente operativa: una funzione non è ancora una legge qualunque che associa ad ogni valore di x uno ed un solo valore di y , ma per adesso è solo un modo ben definito per trovare y ogni volta che x è noto. Questa analiticità del concetto di funzione si ritrova nell'*Introductio in analysin infinitorum* di Eulero (1707-1783), il quale dà la seguente definizione.

Definizione

(Eulero, 1748) Una funzione è un'espressione analitica costruita a partire dalla variabile x mediante una serie di operazioni.

Si avverte, in particolare, il legame con il concetto di serie infinita di Newton: infatti, l'idea di Eulero è che *ogni* funzione sia espressa da una serie del tipo

$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \dots$$

dove le potenze sono di qualunque tipo, anche non intere. La concezione euleriana delle funzioni è ancora lontana dalla definizione moderna, ma c'è anche di più: Eulero chiama infatti *continue* tutte quelle funzioni che siano descrivibili con un'unica espressione analitica, mentre invece chiama *discontinue* tutte le altre; per Eulero dunque la funzione $f(x) = |x|$ è discontinua se considerata definita per ogni valore di x nel continuo geometrico dell'asse delle ascisse, in quanto risulta, per definizione,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dalla quale si evince che $|x|$ ha due espressioni analitiche diverse a seconda che x sia positivo o negativo.

La diffusione del calcolo infinitesimale in Italia

Nonostante l'Italia abbia dato i natali a Cavalieri, la geometria degli indivisibili non viene accettata dai matematici italiani, troppo ancorati alla geometria greca: va da sé dunque il fatto che anche la geometria di Cartesio e il calcolo infinitesimale non trovano nessuno spazio all'interno della matematica italiana del XVII secolo. Leibniz stesso fa alcuni tentativi di esportazione del calcolo differenziale anche nel nostro paese, grazie ad un soggiorno a Roma di sei mesi, ma con scarso successo. Bisogna quindi attendere la generazione successiva a quella dei matematici italiani già attivi al momento della comparsa del calcolo differenziale. Ed infatti, nel 1707 avviene il fatto che segna la comparsa del calcolo differenziale anche in Italia: Jacob Hermann (1678-1733), allievo dei fratelli Bernoulli, prende la cattedra di matematica all'Università di Padova. Da questo momento la città di Padova diviene il riferimento per tutti i matematici italiani che vogliono studiare i nuovi metodi del calcolo infinitesimale.

Tuttavia le resistenze sono ancora abbastanza forti, e l'analisi italiana si limita, in questi anni, allo studio dell'integrazione di equazioni differenziali: ricordiamo Guido Grandi (1671-1742), Gabriele Manfredi (1681-1761) e Jacopo Riccati (1676-1754). Nonostante questi pregevoli tentativi, l'analisi italiana resta ad uso di pochi, soprattutto a causa dell'assenza di buoni testi di riferimento. Una prima svolta in questa direzione si ha nel 1748, anno in cui appaiono le *Istituzioni analitiche* di Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), il primo matematico di sesso femminile dell'età moderna. Il punto di forza dell'opera della Agnesi consiste nel fatto che si tratta di un'opera volutamente elementare: essa mira alla preparazione di giovani menti e introduce ai metodi del calcolo infinitesimale.

L'opera è composta da due volumi: nel primo volume, *Dell'analisi delle quantità finite*, la Agnesi tratta l'algebra elementare e la geometria cartesiana introducendo allo studio analitico delle curve; il secondo volume invece è diviso a sua volta in tre libri, *Del calcolo differenziale*, *Del calcolo integrale*, *Del metodo inverso delle tangenti*, e, come gli stessi titoli suggeriscono, si tratta di un'esposizione del calcolo infinitesimale. Purtroppo, la matematica italiana arresta il proprio sviluppo in questo periodo nel quale sembra rinascere; dovremo aspettare la metà del secolo successivo per assistere ad un rifiorire della matematica anche in Italia.

La critica di Berkeley

Come abbiamo già detto, si ha una rottura tra la matematica del continente e quella inglese, rottura dovuta alla disputa scoppiata tra Newton e Leibniz. Mentre in praticamente tutta l'Europa continentale il calcolo leibniziano si diffonde, in Inghilterra si crede ancora che il calcolo delle flussioni, accompagnato dal metodo delle serie infinite, sia in realtà più adatto ad essere sviluppato. Abbiamo avuto modo di osservare che è vero che l'uso combinato di flussioni e serie infinite permette di arrivare sempre ad una soluzione, ma solo, e questo accade in un grandissimo numero di casi significativi, ad una soluzione estremamente teorica: si arriva infatti ad avere sviluppi in serie, per altro locali, che non dicono assolutamente nulla sull'eventuale funzione generatrice. Tuttavia, i matematici inglesi perseverano con i metodi di Newton, e non stupisce che in questi anni ci siano alcune delle scoperte, che ricordiamo ancora oggi, a proposito degli sviluppi in serie di potenze di funzioni, da parte di analisti inglesi, come ad esempio Brook Taylor (1685-1731) e Colin Maclaurin (1698-1746), nomi che ricordiamo ancora oggi a proposito degli sviluppi in serie delle funzioni.

I risultati sulle serie di potenze raggiunti dagli inglesi restano però privi di un vero significato, dal momento che non è ancora assolutamente presente la nozione di convergenza di una serie. A peggiorare lo stato dell'analisi matematica inglese si presenta sulla scena la più severa critica ai fondamenti del calcolo infinitesimale, ovvero quella del vescovo irlandese George Berkeley (1685-1753). Nell'anno 1734 infatti Berkeley pubblica un piccolo trattato intitolato *The analyst*, scritto nella forma di dialogo rivolto ad un "matematico infedele". Il vescovo critica molto duramente i fondamenti del calcolo, sia del calcolo delle flussioni newtoniano sia del calcolo differenziale leibniziano. Ad esempio, per quanto riguarda le flussioni, Berkeley osserva che il fatto di considerare il rapporto

$$\frac{f(x + \dot{x}o) - f(x)}{o}$$

quando $o \neq 0$, rimaneggiarlo in modo opportuno e alla fine porre $o = 0$, è un procedimento non valido.

Berkeley, tuttavia, è conscio del fatto che il calcolo infinitesimale risolve molti problemi in modo relativamente facile ma impossibili da trattare usando tecniche classiche, e quindi cerca di dare una spiegazione di questo. Secondo lui, infatti, si tratta di un processo di *compensazione degli errori*: le varie approssimazioni che si ripetono durante i ragionamenti del calcolo infinitesimale si compensano l'una con l'altra e il risultato finale è quindi corretto; citando lo stesso Berkeley, *si arriva se non alla scienza, almeno alla verità*. Di questo stesso parere è l'ingegnere francese Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832) che è uno dei primi scienziati che cerca di rispondere in modo altrettanto critico alle obiezioni di Berkeley. Le critiche mosse dal vescovo, per inciso perfettamente legittime, danno un'ulteriore scossa negativa alla matematica inglese, che quindi, risentendo di ciò, arresta il suo sviluppo; esiste qualche debole tentativo di porre dei fondamenti rigorosi al calcolo newtoniano, ad esempio Maclaurin nel 1742 pubblica il *Treatise of fluxions* nel quale riconduce l'intero calcolo delle flussioni a pura geometria, ma accettando come primitiva la nozione di velocità istantanea, per cui non compie alcun passo significativo nella direzione della sistemazione definitiva dei fondamenti del calcolo.

Lagrange e le derivate

Mentre in Inghilterra lo sviluppo del calcolo infinitesimale e delle applicazioni è sostanzialmente fermo a causa della limitata capacità dei metodi newtoniani da una parte e delle critiche di Berkeley dall'altra, nel restante continente europeo le applicazioni del calcolo differenziale e integrale di Leibniz diventano sempre più numerose e per certi versi spettacolari. Ma pian piano qualcosa comincia ad andare storto e si avverte più che mai la necessità di dare una teoria fondazionale rigorosa al calcolo infinitesimale. Siamo in pieno illuminismo, e quindi anche vari esponenti del mondo culturale, oltre agli addetti ai lavori, si preoccupano di dare una risposta a questi grandi interrogativi. In questi anni appare, per la prima volta, l'idea che la nozione, ancora imprecisata, di limite, possa essere la chiave: infatti, alla voce "limite" nell'*Encyclopédie* di d'Alambert si legge: *La teoria dei limiti è la base della vera metafisica del calcolo differenziale*. Nonostante questo fatto sia di per sé corretto, come sappiamo bene oggi, si tratta solo di un'indicazione, e bisogna aspettare Cauchy prima di registrare il passo decisivo.

Prima dell'arrivo della definizione di limite però vi è un tentativo pregevole di fondazione del calcolo: il matematico italiano Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) mangia la foglia ribaltando il punto di vista di Newton e considera come punto di partenza la teoria degli sviluppi in serie di Taylor, pubblicando, nel 1797, l'opera *Théorie des fonctions analytiques*, che raccoglie il più importante contributo pre-Cauchy. Lagrange, dopo aver mostrato che ogni funzione, localmente, è lo sviluppo della sue serie di Taylor, considera appunto lo sviluppo locale di f attorno a x_0 , che scrive come

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Chiama dunque *derivata prima di f in x_0* , e la denota con $f'(x_0)$, il coefficiente di $(x - x_0)$, ovvero a_1 ; chiama poi *derivata seconda di f in x_0* , e la denota con $f''(x_0)$, il coefficiente di $(x - x_0)^2$, ovvero a_2 , e così via; infine, chiama f anche *funzione primitiva*, rispetto allo sviluppo in serie di potenze dato.

Osserva quindi che se h è piccolo allora

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots - a_0}{h} = a_1 + a_2 h + \cdots$$

da cui $f'(x_0) = a_1$ è proprio ciò che si attribuisce al rapporto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quando $h = 0$. Così facendo, Lagrange recupera quindi il calcolo dei rapporti tra i differenziali di Leibniz, che appunto chiama *calcolo delle derivate*. Il problema dei fondamenti è però solo apparentemente risolto, dal momento che, seguendo l'approccio di Lagrange, tutto si sposta sulla dimostrazione del fatto che ogni funzione si sviluppa localmente in serie di potenze.

La definizione di limite

La definizione rigorosa di limite, nel caso delle successioni, appare per la prima volta nel 1659 nell'opera *Geometria speciosa* di Pietro Mengoli (1626-1686), quindi addirittura prima delle prime opere di Newton e Leibniz. Tuttavia, le idee di Mengoli non hanno avuto risonanza, poiché all'epoca il concetto di successione sembrava molto lontano da quello di funzione, molto più di quanto non sembri a noi, abituati al linguaggio unificante della teoria degli insiemi. Nel 1817 il matematico cecoslovacco Bernard Bolzano (1781-1848) pubblica la dimostrazione corretta del teorema degli zeri e per far questo si serve di varie nozioni che introduce in modo rigoroso, come la nozione di continuità delle funzioni e di convergenza di serie e successioni. Tuttavia, i suoi risultati per vari motivi restano per lo più sconosciuti, e negli stessi anni in Francia invece l'ingegnere civile Augustin Louis Cauchy (1789-1857) pubblica le note del suo *Cours d'analyse* tenuto all'École Polytechnique.

In questo corso, Cauchy pone a fondamento del calcolo infinitesimale la nozione di limite e da questo concetto deduce la nozione di convergenza di successioni e di serie e di derivata come limite del rapporto incrementale. L'idea viene infatti dalla necessità di rendere rigoroso il concetto di derivata come limite del rapporto incrementale: dire quindi che la quantità

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - m$$

deve essere infinitesima per ogni h infinitesimo e non nullo viene rimpiazzata con un gioco di quantificatori, ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che ogni volta che $0 < |h| < \delta$

$$\text{si ha } \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - m \right| < \varepsilon$$

Ecco quindi che da queste intuizioni si può estrarre la definizione di limite. Cauchy dice che: *“Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, in modo da finire per differirne di poco quanto si vorrà, quest'ultimo è chiamato limite di tutti gli altri.”*

Cauchy aggiunge dunque che per verificare che il limite di una funzione f per x che tende a x_0 vale ℓ bisogna prendere un numero $\varepsilon > 0$ e da esso si deve sempre trovare un numero $\delta > 0$ tale che per ogni x con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulti $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Si scrive, grazie all'unicità del limite, che vale sotto opportune ipotesi su x_0 ,

$$\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

La definizione di limite è vicina anche a quella di continuità data sempre dallo stesso Cauchy: per verificare che una funzione f è continua in x_0 bisogna prendere un numero $\varepsilon > 0$ e da esso si deve sempre trovare un numero $\delta > 0$ tale che per ogni x con $|x - x_0| < \delta$ risulti $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Viene ripreso infine il problema della derivata di Lagrange ponendo, per una data funzione f ,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Con l'approccio fondazionale di Cauchy le grandezze infinitesime fanno la loro definitiva scomparsa dal calcolo infinitesimale classico e la teoria dei limiti è ancora oggi alla base dell'insegnamento dell'analisi.

L'integrazione

Se il problema dei fondamenti del calcolo poteva dirsi risolto dalla teoria dei limiti di Cauchy, e con esso anche il calcolo differenziale, ovvero il calcolo delle derivate, per il calcolo integrale c'erano ancora parecchie considerazioni da fare. Sempre Cauchy infatti decide di definire l'integrale che noi oggi chiamiamo *definito* come l'area sottesa dal grafico della funzione, e quindi di dimostrare poi la relazione fondamentale tra integrazione e derivazione. L'idea di Cauchy, per integrare una funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$ è quella di suddividere l'intervallo dato in intervalli

$$[a, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \dots \quad [x_h, b].$$

Si calcola quindi la somma

$$S = (x_1 - a)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (b - x_h)f(x_h)$$

che rappresenta la somma delle aree dei rettangoli di basi $x_{i+1} - x_i$ e altezza rispettiva $f(x_i)$.

Cauchy dimostra dunque l'esistenza di una quantità limite che le somme S raggiungono quando la partizione dell'intervallo $[a, b]$ si infittisce sempre di più, e inoltre dimostra che tale quantità dipende unicamente dalla forma della funzione f e non dalla scelta delle partizioni: è da sottolineare il fatto che Cauchy usa pesantemente la continuità di f . Diversamente rispetto alla teoria dei limiti e delle derivate, sull'integrazione delle funzioni la teoria Cauchy non appare del tutto soddisfacente. Infatti, ad esempio la mancanza di una teoria rigorosa dei numeri reali fa sì che Cauchy non possa dimostrare in modo rigoroso l'esistenza dell'integrale come limite. Inoltre, la continuità della funzione integranda non sembrerebbe strettamente necessaria, soprattutto in vista di una delle applicazioni più concrete del calcolo integrale a quel tempo, ovvero la teoria delle serie trigonometriche, o serie di Fourier: la necessità di poter sviluppare in serie trigonometrica funzioni sempre più generali portava alla necessità di poter integrare funzioni sempre più generali e meno regolari.

Nel 1829 il matematico tedesco Lejeune Dirichlet (1805-1859) studia l'integrabilità delle funzioni discontinue e arriva, tra le altre cose, a fornire un esempio di funzione discontinua in ogni punto che secondo lui non poteva in nessun modo essere integrata, funzione che ancora oggi porta il suo nome: la *funzione di Dirichlet* è data da

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases}$$

Al di là delle questioni di integrabilità, il puro fatto di considerare una funzione come quella di Dirichlet dà prova dell'ormai piena maturazione del concetto di funzione: da questo momento in avanti una funzione viene concepita unicamente come una qualunque applicazione tra insiemi. La necessità di liberarsi dalle discontinuità nella teoria dell'integrazione è alla base degli studi del matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866). Egli ribalta il punto di vista di Cauchy.

Infatti, prima di tutto introduce una generalizzazione delle somme di Cauchy prendendo in ogni intervallo il valore della funzione in un punto qualunque dell'intervallo e non necessariamente negli estremi; successivamente, e qui sta la vera innovazione rispetto a Cauchy, usa l'esistenza di un limite delle somme così ridefinite, come *definizione* di integrale, che è la nozione di integrabilità che usiamo ancora oggi, ed ecco perché lo chiamiamo *integrale di Riemann*. L'integrazione alla Riemann si adatta bene anche a molte funzioni discontinue, ad esempio se il numero di discontinuità è finito o al più numerabile. La funzione di Dirichlet resta *non integrabile* anche secondo Riemann: infatti l'estremo superiore delle somme per difetto vale 0, mentre l'estremo inferiore delle somme per eccesso vale 1; per aggiustare il tiro in questa direzione sarà necessaria un'ulteriore generalizzazione del concetto di integrale, che avverrà solo ai primi del Novecento per opera di Henri Lebesgue (1875-1941).

L'aritmetizzazione dell'analisi

La teoria dei limiti di Cauchy messa a fondamento dell'analisi per funzionare correttamente richiede una definizione precisa di numero reale: infatti, ad esempio, la nozione stessa di funzione continua fonda la sua essenza sulla continuità dei numeri reali, o ancora l'integrabilità alla Riemann richiede delicate proprietà dei numeri reali. Per completare il programma manca quindi una teoria rigorosa dei numeri reali. Osserviamo che il concetto di numero reale è presente praticamente da sempre, anche i greci sapevano che i numeri reali sono in corrispondenza al continuo geometrico della retta, e dunque le proprietà dei reali, compresa la *completezza*, vengono da sempre utilizzate anche se non vi è una teoria rigorosa sotto. Il matematico che più tra tutti sente l'esigenza di più rigore è il tedesco Karl Weierstrass (1815-1897), ma prima che possa rendere note le sue ricerche in questa direzione, altri matematici pubblicano valide teorie dei numeri reali; vediamo di analizzare i due più importanti tentativi, quello di Cantor e quello di Dedekind.

Nel 1872 il tedesco Georg Cantor (1845-1918) espone, nel lavoro *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* apparso su *Mathematische Annalen*, una teoria dei numeri reali che è fondata sull'uso delle cosiddette *successioni di Cauchy*, e che oggi costituisce una procedura che chiameremmo *completamento dei razionali*. L'idea di Cantor è un ribaltamento del punto di vista di Cauchy. Infatti, nella teoria delle successioni convergenti, Cauchy dice che se una successione di numeri x_h è tale per cui per ogni scelta di $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che per ogni $h, k > \nu$ si ha $|x_h - x_k| < \varepsilon$ allora la successione sta convergendo ad un limite, che è ancora un numero. Questo fatto, che è la completezza dei reali, non è dimostrato, e non può essere dimostrato se non si pone una definizione rigorosa di numero reale. Cantor decide di prendere questa proprietà di completezza come definizione di numero reale: i numeri reali sono dunque i limiti delle successioni di Cauchy.

Formalmente quindi Cantor propone di chiamare numero reale una successione di Cauchy, ma c'è una piccola complicazione però, che non gli sfugge: infatti, diverse successioni di Cauchy possono dare origine allo stesso numero reale, basti pensare a tutte le successioni convergenti a 0, che identificano il solo reale 0. Per questo motivo, Cantor identifica tra loro due successioni di Cauchy se la loro differenza è una successione che converge a 0. Con questa operazione di quoziente si ha un buon modello per i numeri reali, e si possono dimostrare tutte le proprietà che oggi conosciamo per l'insieme $\mathbb{R}$. La stessa costruzione basata sul completamento dei razionali viene proposta nello stesso anno dal francese Charles Meray (1835-1911) e anche dal tedesco Eduard Heine (1821-1881). Lo svantaggio principale di questo approccio è che prima di definire i numeri reali uno ha già bisogno della teoria dei limiti e delle successioni, oltre ovviamente all'insieme dei numeri razionali.

Ben diverso è invece l'approccio del tedesco Richard Dedekind (1831-1916), il quale, sempre nel 1872, pubblica il lavoro *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, sempre a proposito di una teoria dei reali. L'idea di Dedekind è quella di costruire i reali sfruttando alcune proprietà dei razionali. Ad esempio i razionali soddisfano alla proprietà di *sezione*: se a è razionale, tutti gli altri razionali si ripartiscono in due classi, l'una fatta da tutti i razionali minori di a e l'altra fatta dai razionali maggiori di a . Dedekind ha ovviamente in mente il modello del continuo geometrico, e osserva, a proposito della proprietà di sezione dei razionali, il seguente fatto vero per la retta: se uno considera due classi di punti sulla retta, A e B , tali che esse formano una partizione della retta e tali per cui ogni punto di A precede ogni punto di B (A e B sono dette in tal caso contigue), allora esiste uno ed un solo punto che sta tra le due classi A e B . Dedekind prende questa proprietà come *definizione* di numero reale: un numero reale diventerà l'elemento di separazione tra due classi contigue di razionali.

Ad esempio, il numero irrazionale $\sqrt{2}$ può essere pensato come elemento di separazione tra le classi contigue

$$A := \{x \text{ razionale} : x^2 < 2\}, \quad B := \{x \text{ razionale} : x^2 > 2\}.$$

Tecnicamente, quindi, un numero reale per Dedekind è una *sezione dei razionali*, ovvero è una coppia di classi contigue (A, B) di razionali. Questo approccio non necessita di nessuna nozione di analisi o di teoria dei limiti, ma necessita delle proprietà dell'insieme dei numeri razionali e di proprietà generali di teoria degli insiemi, ed è la costruzione dei reali che viene tutt'ora utilizzata più frequentemente nell'insegnamento dell'analisi.

Per completare il quadro dunque basta essere in grado di proporre una costruzione dei razionali, ed è molto semplice costruire l'insieme dei numeri razionali all'interno della teoria degli insiemi a partire dai numeri naturali; l'ultimo scoglio è quindi la costruzione dei naturali. Ci sono vari tentativi di costruzione dei numeri naturali. Gottlob Frege (1848-1925), nel 1884, presenta una teoria insiemistica basata sul concetto di equipotenza: due insiemi sono equipotenti se possono essere messi in corrispondenza uno a uno tra di loro; il *numero* di un insieme è quindi l'insieme che ha come elementi tutti gli insiemi equipotenti ad esso. La definizione di Frege è più profonda di quanto sembri in quanto include, in un colpo solo, anche la nozione di *numero cardinale transfinito*, ovvero la nozione di numero associato ad un insieme infinito, ma non entriamo nel dettaglio di questo. Anche lo stesso Dedekind, nel 1888, presenta una teoria dei naturali, sempre fondata, come quella di Frege, sulla teoria degli insiemi.

Ricordiamo invece più nel dettaglio la definizione assiomatica di numero naturale proposta dal matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932), che appare la più semplice e che non necessita della teoria degli insiemi. Peano dice che:

- 1) 0 è un numero;
- 2) il successore di un numero è ancora un numero;
- 3) 0 non è successore di nessun numero;
- 4) se due numeri hanno lo stesso successore allora sono uguali;
- 5) se un insieme A di numeri contiene 0 e il successore di ogni suo elemento allora A è l'insieme di tutti i numeri.

Le prime quattro proprietà sono molto intuitive. L'ultima proprietà è altrettanto intuitiva e formalizza, in un certo senso, la nozione primitiva del *contare*; inoltre, essa sta alla base del principio di induzione, tecnica dimostrativa di enorme utilità in matematica.

Più in basso di così non possiamo andare, abbiamo toccato le fondamenta della matematica: la nozione di numero non può essere ricondotta, a meno di sofisticate considerazioni di teoria assiomatica degli insiemi, a nozioni più elementari e primitive. A questo punto possiamo solo chiederci: quanto queste fondamenta sono solide? Purtroppo dobbiamo rassegnarci al fatto che non possiamo garantire la solidità delle fondamenta della matematica: questo fatto può essere formalizzato e dimostrato, ed è stato fatto nel 1931 da un giovane matematico austriaco di nome Kurt Gödel (1906-1978), ma questa è un'altra storia.