

Storia del calcolo infinitesimale, III

Isaac Newton: il calcolo delle flussioni

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

Breve biografia

Isaac Newton nasce a Woolsthorpe, in Inghilterra, il 25 dicembre 1642, giorno che corrisponde al 4 gennaio 1643 secondo l'attuale calendario gregoriano, a quel tempo non ancora entrato in vigore in Inghilterra. Nel 1653 comincia gli studi alla King's School nella città di Grantham e durante questo periodo mostra già particolari doti di inventore, costruendo orologi e modelli funzionanti di mulini. Nel 1661 Newton entra nel prestigioso Trinity College di Cambridge: qui studia principalmente Aristotele, ma ben presto sposta la sua attenzione verso letture più moderne, ovvero Cartesio, Galileo, Copernico e Keplero. Attorno a 23 anni di vita interrompe gli studi al college a causa di un'epidemia di peste originatasi a Londra: in questo periodo, che trascorre a casa in campagna, inizia l'invenzione del calcolo infinitesimale e la scoperta della teoria della gravitazione universale. Diventa dunque professore di matematica a Cambridge nel 1669. Nel 1670 inizia l'attività di ricerca vera e propria di Newton, e fino al 1672 lo studio dell'ottica lo tiene impegnato: sono ormai celebri i suoi studi sulla rifrazione della luce e sulla scomposizione della luce bianca; a tal proposito, nel 1704 pubblica l'*Opticks*.

Negli stessi anni porta a compimento la teoria della gravitazione universale e dietro consiglio di Edmund Halley, nel 1684 pubblica la sua prima opera su tale argomento, il *De Motu Corporum*, mentre tre anni più tardi pubblica i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, comunemente chiamati *Principia*: questo capolavoro è considerato un pilastro della storia della scienza, con esso Newton stabilisce le tre leggi universali della dinamica, che ancora oggi si studiano in un corso di fisica generale, e tratta nel dettaglio la teoria della gravitazione universale dimostrando, in particolare, che le orbite dei pianeti soggetti alla sola forza di gravità sono necessariamente ellittiche, con il sole in uno dei due fuochi. Con la pubblicazione dei *Principia*, Newton entra nella storia, inizia una profonda amicizia con vari scienziati importanti dell'epoca e arrivano successivamente i riconoscimenti ufficiali: Newton diviene, nel 1699, direttore della Zecca Reale, nel 1703 diventa quindi presidente della Royal Society di Londra e due anni dopo viene investito del titolo di cavaliere dalla Regina Anna. Isaac Newton muore a Londra il 20 marzo 1727 e viene sepolto nell'Abbazia di Westminster.

Il calcolo infinitesimale

Newton, come abbiamo accennato nella sua breve biografia, comincia i suoi studi di calcolo infinitesimale durante gli anni in cui fugge dalla peste scoppiata a Londra, quindi tra il 1665 e il 1666. Il calcolo infinitesimale, o *calcolo delle flussioni* seguendo la terminologia che Newton utilizza, ha quindi inizio molto prima del fatidico 1684, anno in cui appare la prima opera di Leibniz sul calcolo differenziale. Non abbiamo in verità prove inconfutabili che Newton effettivamente era a conoscenza del suo calcolo delle flussioni già negli anni 1665/66, dal momento che egli non pubblicherà mai nulla di tutto ciò: il lavoro *The Method of Fluxions and Infinite Series*, che presenta gli studi di calcolo infinitesimale di Newton, viene infatti composto nel 1671 ma edito a Londra solo nel 1736, quindi postumo. Nonostante questo, tanti risultati, ad esempio presenti nei *Principia*, potevano essere trovati solamente ricorrendo al calcolo infinitesimale, per cui questo suggerisce che Newton doveva in effetti essere in possesso del calcolo almeno al momento della stesura dei *Principia*.

In effetti, è vero che nei *Principia* non si trova traccia del calcolo delle flussioni, ma Newton vi espone invece una teoria sulla quadratura delle regioni piane attraverso un procedimento di approssimazione per eccesso e per difetto che è sostanzialmente l'idea che usiamo ancora oggi per definire l'integrale di Riemann. Egli chiama questo modo di ragionare come *metodo delle prime e ultime ragioni*, e così si esprime in proposito: *“Queste ultime ragioni con cui le quantità divengono evanescenti non sono realmente le ragioni di quantità ultime, bensì limiti verso cui le ragioni delle quantità, decrescendo oltre ogni limite, sempre convergono, e ai quali si avvicinano più di ogni differenza data, senza mai oltrepassarle, né mai raggiungerle effettivamente prima che le quantità siano diminuite all'infinito.”* In altre parole, Newton ha afferrato il concetto di passaggio al limite ma non è pienamente consapevole del fatto che proprio su esso si possa fondare in modo rigoroso il calcolo infinitesimale.

Esiste in ogni caso anche un motivo ben preciso per il quale Newton decide di non pubblicare i suoi risultati di calcolo infinitesimale. Infatti, egli è ancora molto legato al mondo classico, ed in particolare alla geometria greca: in un certo senso è l'ultimo dei classici, dal momento che Leibniz invece avrà il coraggio di esporre le sue idee non classiche e di abbandonare dunque definitivamente il punto di vista classico, ormai destinato a tramontare. Newton è quindi dell'idea che una dimostrazione corretta e rigorosa di un fatto matematico debba necessariamente essere condotta utilizzando gli strumenti classici.

Il calcolo delle flussioni

Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo: Newton ha infatti una concezione *cinematica* del calcolo infinitesimale. Per questo motivo, egli considera le variabili geometriche come variabili *fluenti*, cioè che variano nel tempo, e le indica con le lettere $x, y, z, v, \dots$, e considera poi le velocità con cui le variabili fluenti variano nel tempo, e chiama queste velocità *flussioni*, indicate rispettivamente con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{v}, \dots$, notazione ancora oggi in uso in meccanica razionale; infine vengono anche usate le lettere $a, b, c, \dots$ per denotare quantità fisse, ovvero le costanti. Newton fissa quindi un incremento infinitesimo temporale, che indica con o , e chiama *momento* della variabile x la quantità $\dot{x}o$, che corrisponde ad un incremento infinitesimo della variabile x . Tutto è pronto per impostare il primo problema che Newton si pone: da una relazione tra variabili fluenti, trovare la relazione tra le flussioni.

Supponiamo quindi che sia data una relazione

$$P(x, y, z, \dots) = 0$$

tra variabili fluenti $x, y, z, \dots$. Seguendo Newton, si legge che siccome i momenti di $x, y, z, \dots$, dati rispettivamente da $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$ sono molto piccoli rispetto a $x, y, z, \dots$, allora deve valere anche

$$P(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o, z + \dot{z}o, \dots) = 0.$$

Dopo aver rimaneggiato la relazione precedente, Newton conclude dicendo che siccome o è infinitamente piccolo, allora si può considerare nullo e quindi deduce così la relazione tra le flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Notiamo che quindi i ragionamenti di Newton non si allontanano molto dai ragionamenti dei matematici che lo hanno preceduto, ad esempio dal metodo delle adeguazioni di Fermat.

Consideriamo ad esempio l'equazione

$$x^2 - axy = 0. \quad (1)$$

Operando come detto si ha

$$(x + \dot{x}o)^2 - a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) = 0$$

che diventa

$$x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2 - axy - ax\dot{y}o - ay\dot{x}o - a\dot{x}\dot{y}o^2 = 0$$

ovvero, siccome per il momento $o \neq 0$,

$$2x\dot{x} + \dot{x}^2o - ax\dot{y} - ay\dot{x} - a\dot{x}\dot{y}o = 0.$$

Ponendo ora $o = 0$ si trova la relazione voluta tra le flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$:

$$2x\dot{x} - ax\dot{y} - ay\dot{x} = 0 \quad (2)$$

che effettivamente coincide con la derivazione rispetto al tempo della (1).

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica, e precisamente afferma, nel caso in cui si abbiano espressioni polinomiali, di procedere come segue:

- 1) Ordinare la relazione assegnata secondo le potenze decrescenti di una variabile fluente, ad esempio x .
- 2) Moltiplicare i termini così ordinati uno per volta per il relativo esponente di x .
- 3) Moltiplicare quindi tutti i termini per $\dot{x}/x$ e semplificare.
- 4) Rifare tutto il procedimento per tutte le altre variabili.
- 5) Sommare tutte le relazioni trovate e uguagliare a 0 la somma così ottenuta.

Newton ci mostra anche come trovare la relazione tra le flussioni anche nel caso di relazioni irrazionali, e questo esempio fa vedere quanto il metodo delle flussioni sia migliore dei metodi precedenti: è finalmente un vero strumento di calcolo.

Ad esempio, consideriamo la relazione

$$x - \frac{b}{a+y} - \sqrt{y+x} = 0.$$

Basta effettuare dei cambi di variabile, ponendo

$$\frac{b}{a+y} = z, \quad \sqrt{y+x} = v$$

per avere la nuova relazione $x - z - v = 0$ dalla quale si ricava, applicando la regola, $\dot{x} - \dot{z} - \dot{v} = 0$. Dalla posizione su z si ricava invece $az + yz - b = 0$ che fornisce $a\dot{z} + \dot{y}z + y\dot{z} = 0$ mentre dalla posizione su v si ricava invece $y + x - v^2 = 0$ che fornisce $\dot{y} + \dot{x} - 2v\dot{v} = 0$. Eliminiamo ora le variabili ausiliarie $\dot{z}$ e $\dot{v}$ si trova facilmente

$$\dot{x} + \frac{b\dot{y}}{(a+y)^2} - \frac{\dot{y} + \dot{x}}{2\sqrt{y+x}} = 0$$

che è la relazione cercata.

Ovviamente la teoria non procede solo per esempi, ma Newton osserva alcune proprietà che si deducono dalla sua procedura, e che quindi forniscono delle vere regole di calcolo. Ad esempio:

$$z = x \pm y \implies \dot{z} = \dot{x} \pm \dot{y},$$

$$z = xy \implies \dot{z} = \dot{x}y + x\dot{y},$$

$$z = \frac{x}{y} \implies \dot{z} = \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{y^2},$$

$$z = x^k \implies \dot{z} = kx^{k-1}\dot{x}.$$

Siamo quindi nella direzione giusta: le difficoltà adesso sono state spezzate e sono state individuate le regole del calcolo. Il calcolo delle flussioni è quindi pronto per essere applicato.

Sui problemi di massimo e minimo

Una delle prima applicazioni del calcolo delle flussioni che Newton ci offre è rappresentata dalla risoluzione di problemi di massimo e di minimo. Più precisamente, è data la solita relazione tra fluenti,

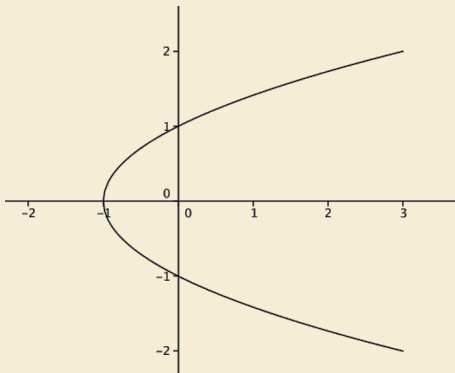
$$P(x, y, z, \dots) = 0.$$

Newton osserva che se la variabile x , per esempio, in quanto fluente, assume massimo o minimo in un certo istante temporale, in questo stesso istante essa inverte la sua flussione, per cui nell'istante di inversione deve essere $\dot{x} = 0$. Lo stesso discorso vale chiaramente per ogni altra variabile presente nella relazione. Dunque, in definitiva, se ad esempio la variabile x va massimizzata o minimizzata, basta ricavare la relazione tra le flussioni delle variabili date, porre $\dot{x} = 0$, e semplificare le eventuali altre flussioni restanti in modo da arrivare ad una relazione tra le sole fluenti, relazione che va messa in sistema con la relazione assegnata.

Ad esempio, consideriamo la relazione $x - y^2 + 1 = 0$ e ci chiediamo i valori massimi o minimi assunti dalle variabili x, y . Scriviamo subito la relazione tra le flussioni, ovvero

$$\dot{x} - 2y\dot{y} = 0. \quad (3)$$

Iniziamo dalla variabile y . Ponendo $\dot{y} = 0$ si avrebbe $\dot{x} = 0$, soluzione che Newton esclude, ed invero y è una variabile illimitata; si veda la figura che segue.



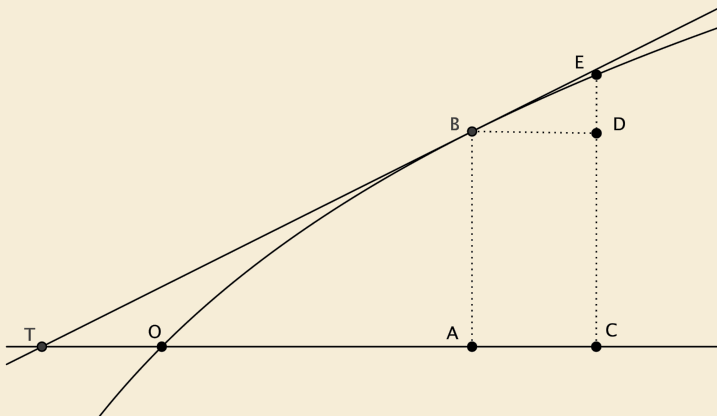
Cercando invece di estremizzare la variabile x si ha, mettendo $\dot{x} = 0$ nella (3), l'equazione $-2y\dot{y} = 0$ dalla quale, eliminando la soluzione inaccettabile $\dot{y} = 0$, si deduce che $y = 0$, e dunque stavolta si trova il sistema

$$\begin{cases} x - y^2 + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x = -1$. Riscriviamo ora che la (3) come $\dot{x} = 2y\dot{y}$ e cerchiamo di ragionare ora come avrebbe potuto ragionare Newton. Mettiamoci nel punto $(-1, 0)$: osserviamo quindi che se y parte da 0 e cresce, allora la sua flussione diventa positiva, per cui $y\dot{y} \geq 0$ da cui $\dot{x} \geq 0$ mentre se y parte da 0 e decresce, allora la sua flussione diventa negativa, e resta dunque sempre $y\dot{y} \geq 0$ da cui ancora $\dot{x} \geq 0$. In ogni caso quindi x fluisce crescendo dal valore $x = -1$, per cui $x = -1$ è il valore minimo per x .

Le tangenti

Vediamo come il metodo delle flussioni possa essere applicato per la risoluzione del problema delle tangenti. Newton considera le stesse situazioni geometriche dei suoi predecessori, quindi analizza la figura:



Sia fissata in O l'origine degli assi cartesiani e sia data la curva OBE come in figura, descritta dalla relazione tra le variabili x e y , diciamo, al solito,

$$P(x, y) = 0.$$

Allo scopo di determinare la tangente in B Newton sposta ancora graficamente la sua attenzione alla sottotangente, ma stavolta le regole del calcolo delle flussioni permettono di agevolare i conti anche su espressioni complicate. Infatti, poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$ e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$.

Essendo l'incremento temporale o molto piccolo, il punto E sarà approssimativamente sulla tangente TB e dunque Newton scrive la proporzione che esprime la similitudine tra il triangolo TAB e il “triangolo” BDE , ovvero

$$TA : AB = BD : DE$$

da cui

$$\frac{|TA|}{y} = \frac{o\dot{x}}{o\dot{y}}$$

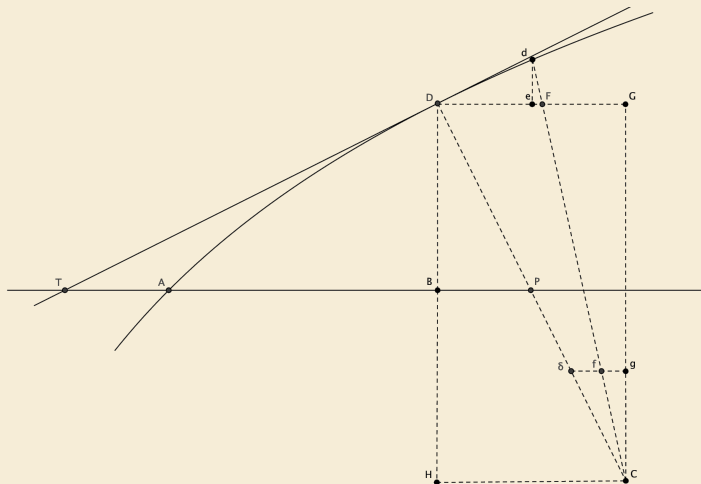
e quindi

$$|TA| = y \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \quad (4)$$

che permette di determinare il punto T , e quindi la retta tangente TB semplicemente come retta passante per due punti, T e B .

Sui centri di curvatura

Una significativa applicazione del calcolo delle flussioni è rappresentata dalla determinazione dei centri di curvatura delle curve piane. Seguiamo il ragionamento di Newton analizzando la figura che segue:



Proponiamoci quindi di determinare il centro di curvatura C della curva assegnata, nel suo punto D . Tracciamo per prima cosa la tangente TD , che sappiamo già come determinare. Il segmento DC è quindi perpendicolare a TD . Costruiamo quindi il punto G intersecando la parallela ad AB condotta da D con la parallela a BD condotta da C , e consideriamo un generico punto g sul segmento CG . Tracciamo la parallela ad AB passante per g , che interseca DC in δ . Si ha subito una prima proporzione, che discende dalla similitudine tra il triangolo $Cg\delta$ ed il triangolo TBD :

$$Cg : g\delta = TB : BD. \quad (5)$$

Muoviamo ora il punto D facendogli fare un incremento infinitesimo che lo porta nel punto d : se C è il centro di curvatura in D allora il segmento dC deve essere ortogonale a Dd in d . Tracciamo l'altezza de e sia F il punto di intersezione tra dC e DG ; sia inoltre f il punto di intersezione tra dC e $g\delta$. Ponendo $|AB| = x$ e $|BD| = y$, possiamo allora scrivere

$$|De| = \dot{x}o, \quad |de| = \dot{y}o, \quad |\delta f| = -(\dot{g}\delta)o. \quad (6)$$

Per il secondo teorema di Euclide si ha poi, essendo de altezza relativa all'ipotenusa DF ,

$$|eF| = \frac{|de|^2}{|De|}$$

da cui

$$|DF| = |De| + |eF| = |De| + \frac{|de|^2}{|De|}. \quad (7)$$

Potendo porre quindi, per arbitrarietà, $|Cg| = 1$ e ponendo $|g\delta| = z$, la (5) diventa

$$1 : z = |TB| : |BD| = |De| : |de| = \dot{x} : \dot{y},$$

cioé

$$z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Tenuto conto poi delle (6), la (7) può essere riscritta come

$$|DF| = \dot{x}o + \frac{\dot{y}^2 o}{\dot{x}}.$$

Dunque si ha che la proporzione geometrica

$$1 : |CG| = |\delta f| : |DF|$$

fornisce

$$|CG| = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}.$$

Potendo ora scegliere $\dot{x} = 1$ possiamo quindi scrivere, siccome diventa $z = \dot{y}$,

$$|CG| = -\frac{1 + z^2}{\dot{z}}.$$

Notiamo che la formula precedente ha senso dal momento che $\dot{z} < 0$. È ora semplice determinare anche il raggio di curvatura DC : infatti, ancora per similitudine si ha

$$|DG| : |g\delta| = |CG| : |Cg|$$

da cui

$$|DG| = -\frac{z(1 + z^2)}{\dot{z}}.$$

Quindi, per il teorema di Pitagora,

$$|DC| = \sqrt{|DG|^2 + |CG|^2} = \frac{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}}{|\dot{z}|}.$$

Newton a questo punto estrae una regola operativa: l'obiettivo è determinare z e $\dot{z}$ in funzione di x e y in modo tale da poter determinare poi la quantità

$$|DH| = -\frac{1 + z^2}{\dot{z}}$$

che si traccia graficamente scendendo da D lungo la perpendicolare ad AB ; basta poi condurre da H la parallela ad AB fino al punto C di modo tale che

$$|HC| = -\frac{z(1 + z^2)}{\dot{z}}$$

trovando così il centro di curvatura C . Il problema è dunque risolto se determiniamo z e $\dot{z}$ in funzione di x e y , ricordando che durante il ragionamento fatto abbiamo posto $\dot{x} = 1$ e di conseguenza $\dot{y} = z$.

Osserviamo che tutto questo ragionamento vale per una configurazione come nella figura analizzata; altre configurazioni si trattano in modo analogo.

Descriviamo quindi, in modo algoritmico, qual è la procedura da seguire.
Sia quindi data la relazione $P(x, y) = 0$.

- 1) Per prima cosa troviamo la nuova relazione $R(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0$.
- 2) Poniamo $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = z$, avendo così $S(x, y, z) = R(x, y, 1, z) = 0$.
- 3) Troviamo dunque la relazione $T(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$.
- 4) Poniamo ancora $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = z$, avendo così
 $U(x, y, z, \dot{z}) = T(x, y, z, 1, z, \dot{z}) = 0$.

- 5) Il sistema

$$\begin{cases} S(x, y, z) = 0 \\ U(x, y, z, \dot{z}) = 0 \end{cases}$$

ci fornisce z e $\dot{z}$ in funzione di x e y .

- 6) Con z e $\dot{z}$ possiamo quindi determinare

$$|DH| = -\frac{1 + z^2}{\dot{z}}, \quad |HC| = -\frac{z(1 + z^2)}{\dot{z}}$$

che forniscono la posizione di C .

Prima di passare alla procedura inversa, ovvero da una relazione tra flussioni alla relazione tra le fluenti, e vederne qualche applicazione, facciamo un'importante osservazione legata proprio alla determinazione dei centri di curvatura. Come è ben noto oggi, infatti, la curvatura di una curva è una quantità legata alla derivata seconda della parametrizzazione, mentre Newton se la cava sempre e solo con una sola flussione: il trucco consiste nel passare alla variabile z , che infatti è stata posta pari a $\dot{y}$, e dunque $\dot{z}$ sarebbe $\ddot{y}$. Newton non introduce mai una *accelerazione* delle fluenti, quindi per Newton il calcolo infinitesimale è solo al primo ordine, piuttosto introduce nuove variabili fluenti, come appena visto per la determinazione dei centri di curvatura.

Il metodo delle serie infinite

Fino a questo momento, come il lettore avrà certamente osservato, abbiamo quasi sempre trattato esempi di curve descritte da equazioni algebriche; è pur vero che Newton descrive, mediante opportuni cambi di variabili, come, ad esempio, trovare la relazione tra le flussioni se la relazione tra le fluenti contiene radicali anche complicati, e inoltre illustra le regole di calcolo che permettono di analizzare una difficoltà alla volta. Nonostante questo passo in avanti però restano escluse dal discorso, ad esempio, le curve trascendenti, che rappresentavano un problema anche per tutti i predecessori di Newton. Per questo tipo di curve Newton fa un'assunzione che oggi ci appare drastica, ma che può essere compresa se pensiamo che a quel tempo il concetto generale di funzione come legge di corrispondenza tra variabili non era ancora presente: Newton assume che *tutte* le funzioni, sostanzialmente, siano esprimibili come sviluppi in serie di potenze, eventualmente anche a esponenti negativi.

Certamente per molte funzioni trascendenti, come esponenziali o funzioni circolari questa procedura è corretta, ma per altre no: l'analisi di Newton quindi non è completa se pensiamo al concetto di funzione inteso come oggi lo intendiamo, ma risulta sufficientemente esauritiva relativamente alle conoscenze dell'epoca. La teoria delle serie infinite ideata da Newton costituisce il punto di forza, secondo Newton stesso, del suo calcolo: infatti, come vedremo, Newton riesce sempre, in ogni caso, a invertire la procedura che fa passare dalla relazione tra le fluenti alla relazione tra le flussioni, che quindi è una sorta di integrazione delle relazioni tra le flussioni: per fare questo però è necessario ricondursi sempre a serie, infinite in generale, di potenze e quindi poi operare su queste, praticamente, come diremmo oggi, integrando per serie, cioè termine a termine. In questo modo Newton riuscirà a risolvere completamente i problemi che si era posto: dalle fluenti alle flussioni e viceversa dalle flussioni alle fluenti; ma il risultato di quest'ultima operazione resta solo teorico poiché Newton non è poi in grado di identificare, in generale, il risultato di un'integrazione di una relazione tra flussioni, che resta quindi solamente scritto come formale sviluppo in serie di potenze.

Per inciso, non esiste ovviamente ancora alcun concetto di convergenza delle serie, cosa che arriverà molti anni dopo. Newton mostra anche come sia possibile riscrivere varie operazioni come divisioni ed estrazioni di radici, per sviluppi in serie. Uno dei primi esempi che Newton fa è la divisione

$$\frac{a^2}{b+x}$$

che sviluppa come

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \frac{a^2x^4}{b^5} - \dots$$

In particolare, viene dedotto l'importante sviluppo in serie

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Successivamente, passa ad esaminare come sviluppare una radice quadrata, trovando, per esempio, che

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \dots$$

Non andiamo oltre questo argomento e torniamo al calcolo delle flussioni.

Dalle flussioni alle fluenti

Il passaggio da una relazione

$$P(x, y, z, \dots, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots) = 0$$

ad una relazione del tipo

$$R(x, y, z, \dots) = 0$$

è ben più problematico del passaggio opposto già analizzato: infatti, stavolta si tratta di effettuare, come diremmo oggi, un'*integrazione* di una relazione tra flussioni. Proprio per questo problema Newton sfrutta il suo metodo delle serie infinite: in questo modo, in linea teorica, Newton riesce a integrare ogni relazione tra flussioni.

Analizziamo un esempio solo nel caso più significativo che Newton tratta, ovvero il caso in cui si abbia una relazione assegnata del tipo

$$P(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0$$

che possa essere messa in una delle seguenti forme:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = Q(x, y), \quad \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = S(x, y)$$

essendo $Q(x, y), S(x, y)$ polinomiali in x e y , eventualmente anche uno sviluppo in serie infinita. Allora, in questo caso Newton trova un algoritmo che consente di ricavare la relazione $y = T(x)$, con $T(x)$ eventualmente serie infinita di potenze di x .

Sia data, ad esempio, la relazione

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

Anzitutto, va spezzata la parte che contiene solo x dal resto della relazione, ottenendo

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (1 - 3x + x^2) + (y + xy).$$

Costruiamo ora una tabella come segue:

	1	$-3x$	$+x^2$	0	...
y	*	...	...	...	...
xy	*	*	...	...	...
somma	1	...	...	...	...
$y =$	...	...	...	...	...

Compiliamo ora la tabella. Consideriamo l'1 sulla prima riga della tabella; moltiplichiamolo per x ottenendo $x = x^1$ e dividiamolo quindi per 1, il suo esponente visualizzato esplicitamente, ottenendo x . Quest'ultimo x lo mettiamo al posto di y nelle due espressioni che ci sono in colonna a sinistra, ottenendo rispettivamente x e x^2 . Mettiamo questi ultimi due termini in tabella come segue:

	1	$-3x$	$+x^2$	0	...
y	*	x	...	...	...
xy	*	*	x^2	...	...
somma	1	...	...	...	...
$y =$	...	...	...	...	...

Ora ripartiamo con lo stesso ragionamento dal termine $-3x$, secondo termine della prima riga. Questo lo sommiamo all' x sottostante, trovando $-2x$, moltiplichiamo per x , ottenendo $-2x^2$, che va diviso per l'esponente di x , cioè 2, da cui troviamo $-x^2$; infine mettiamo $-x^2$ al posto di y nelle due espressioni che ci sono in colonna a sinistra, ottenendo rispettivamente $-x^2$ e $-x^3$: mettiamo questi ultimi due termini in tabella come segue:

	1	$-3x$	$+x^2$	0	...
y	*	x	$-x^2$	...	...
xy	*	*	x^2	$-x^3$	...
somma	1	...	...	...	...
$y =$	...	...	...	...	...

Facciamo ancora un passaggio solo, quindi ripartiamo con lo stesso ragionamento dal termine $+x^2$, terzo termine della prima riga. Questo lo sommiamo ai sottostanti, trovando x^2 , moltiplichiamo per x , ottenendo x^3 , che va diviso per l'esponente di x , cioè 3, da cui troviamo $x^3/3$; infine mettiamo $x^3/3$ al posto di y nelle due espressioni che ci sono in colonna a sinistra, ottenendo rispettivamente $x^3/3$ e $x^4/3$: mettiamo questi ultimi due termini in tabella come segue:

	1	$-3x$	$+x^2$	0	...
y	*	x	$-x^2$	$x^3/3$	...
xy	*	*	x^2	$-x^3$	$x^4/3$
somma	1	...	...	...	...
$y =$	...	...	...	...	...

E così via, la procedura in generale non ha termine.

Compiliamo ora la riga della somma semplicemente sommando in colonna:

	1	$-3x$	$+x^2$	0	...
y	*	x	$-x^2$	$x^3/3$	...
xy	*	*	x^2	$-x^3$	$x^4/3$
somma	1	$-2x$	$+x^2$	$-2x^3/3$	$+ \dots$
$y =$	...	...	...	...	...

Infine, per trovare l'ultima riga è sufficiente moltiplicare ogni addendo per x e dividerlo per l'esponente relativo alla x ; abbiamo quindi finalmente

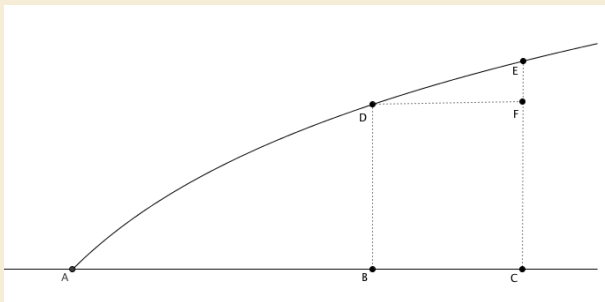
	1	$-3x$	$+x^2$	0	$\dots$
y	*	x	$-x^2$	$x^3/3$	$\dots$
xy	*	*	x^2	$-x^3$	$x^4/3$
somma	1	$-2x$	$+x^2$	$-2x^3/3$	$+\dots$
$y =$	x	$-x^2$	$+x^3/3$	$-x^4/6$	$+\dots$

da cui la soluzione

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \dots$$

La quadratura delle curve

Finalmente Newton, dopo aver analizzato il problema che consiste nel passare da una relazione assegnata tra flussioni alla corrispondente relazione tra le fluenti, applica questa procedura alla quadratura delle curve piane: concludiamo la nostra analisi sul lavoro di Newton proprio con la prima apparizione di quello che sarà noto poi come *teorema fondamentale del calcolo integrale*, ovvero la comprensione che quadratura e calcolo delle flussioni sono due problemi l'uno inverso dell'altro. Analizziamo la seguente figura.



È assegnata la curva ADE come in figura, dunque una relazione $P(x, y) = 0$ avendosi $|AB| = x$ e $|BD| = y$. Poniamo

$$z = \text{Area}(ABD).$$

Diamo quindi un incremento temporale infinitesimo o : si avrà $|BC| = \dot{x}o$ e $|FE| = \dot{y}o$. Essendo o infinitamente piccolo si ha che il momento della variabile z può essere scritto, ricordando la formula che fornisce l'area di un trapezio, come

$$\dot{z}o = \frac{(|BD| + |CE|)|DF|}{2} = \frac{(y + y + \dot{y}o)\dot{x}o}{2} = y\dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{x}o^2}{2}$$

da cui

$$\dot{z} = y\dot{x} + \frac{\dot{y}\dot{x}o}{2}$$

e dunque, ponendo $o = 0$, si giunge a

$$\dot{z} = y\dot{x}. \quad (8)$$

Potendosi scegliere $\dot{x} = 1$, la (8) diventa la fondamentale

$$\dot{z} = y \quad (9)$$

che rappresenta la versione newtoniana del teorema fondamentale del calcolo integrale. Il problema della quadratura della curva ADE si risolve dunque trovando, dalla relazione $P(x, y) = 0$ la relazione tra z e x , ottenuta “integrando” la relazione (9).