

Storia del calcolo infinitesimale, II

Il problema delle tangenti dall'Antichità al Rinascimento

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

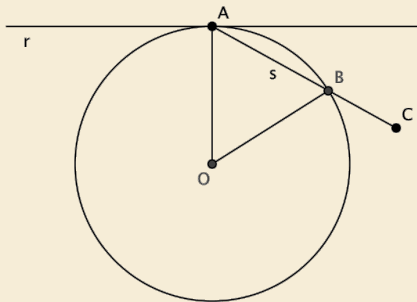
Le tangenti nell'antica Grecia: Euclide

Non troviamo molto nell'antichità su questo problema: probabilmente ciò è dovuto al fatto che per i classici le sole curve di interesse erano le curve dichiarate con tanto di nome, mentre curve generiche erano pressoché inutili. La parola tangente non venne utilizzata dai Greci: essa è infatti il participio presente del verbo di origine latina *tàngere*, che vuol dire toccare. In effetti, pare che sia Euclide sia Apollonio usassero proprio il termine toccare per denotare la proprietà che una retta tangente ha rispetto alla curva per la quale è tangente. Euclide, nei suoi *Elementi*, limita la sua trattazione al caso della circonferenza, ma illustra con profondità la caratteristica della tangente ad una circonferenza. Nella prossima proposizione è anzitutto racchiusa la definizione di tangente ad una circonferenza: è la retta ortogonale al diametro nel punto di tangenza. Euclide è ben consapevole che questo fatto è più profondo di quanto sembri, e per caratterizzare la tangenza dimostra che il cosiddetto *angolo di contingenza* è nullo: non esiste un'altra retta che si possa mettere tra la tangente e la circonferenza e che continui a incontrare la circonferenza in un solo punto.

Teorema

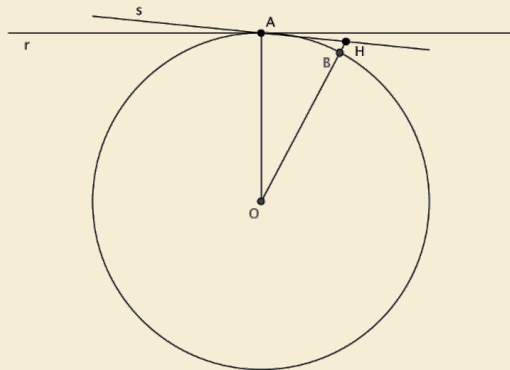
(Proposizione XVI, Libro III degli Elementi) *Quella retta che, dalle estremità del diametro di un cerchio viene condotta ad angolo retto, cadrà al di fuori del cerchio stesso; nello spazio compreso tra la stessa linea retta e la periferia non cadrà altra retta; e invero l'angolo del semicerchio è maggiore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo, il rimanente è minore.*

Dimostrazione. Mostriamo prima di tutto che ogni altra retta diversa dall'ortogonale al diametro deve incontrare la circonferenza in un altro punto diverso dal punto di tangenza: ci riferiamo alla seguente figura.



Supponiamo, per assurdo, che la retta s per A ortogonale al raggio OA in A incontri la circonferenza anche nel punto B diverso da A . Essendo il triangolo OAB isoscele sulla base AB , deve essere $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Ma l'angolo $\widehat{OAB}$ è retto e un triangolo non può avere più di un angolo retto, e dunque si ha una contraddizione.

Supponiamo ora che ci sia un'altra retta s che si infila nella regione compresa tra la circonferenza e r , ovvero che forma un angolo di contingenza $\hat{r}s \neq 0$; si veda la prossima figura.



Tracciamo il segmento OH perpendicolare a s in H . Allora deve essere $|OA| > |OH|$ dal momento che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è sempre maggiore di ciascuno dei due cateti. Ma $|OA| = |OB|$ da cui $|OB| > |OH|$ che è assurdo.

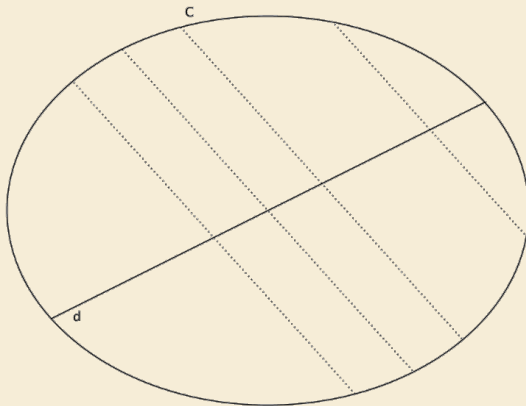
La trattazione dell'angolo di contingenza è un fatto molto importante per la matematica. Infatti, Euclide stesso rileva, attraverso la sua dimostrazione, che gli angoli di contingenza *curvilinei* non costituiscono una famiglia di oggetti per i quali le corrispondenti misure soddisfano la proprietà di Eudosso-Archimede; nella figura che segue sono rappresentati alcuni angoli contingenza curvilinei.



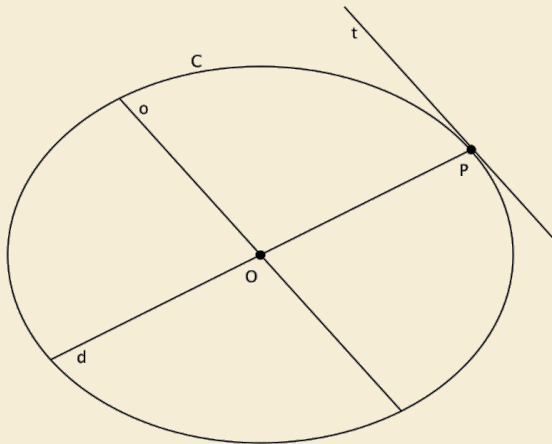
Dalla circonferenza alle coniche: Apollonio di Perga

Noi abbandoniamo ora gli *Elementi* e proseguiamo con l'evoluzione del concetto di tangente. Se infatti per una circonferenza è addirittura troppo facile parlare di tangente, visto che la nozione di tangenza si traduce in una semplice proprietà di ortogonalità tra la retta e il diametro, così non fu per curve leggermente più complicate: le coniche. Il primo trattato sistematico sulle coniche risale ad Apollonio di Perga (250 a.C. circa), ed è intitolato appunto *Le coniche*. Non entriamo nel dettaglio della teoria delle tangenti secondo Apollonio, ma accenniamo almeno alla sua costruzione nel caso di un'ellisse; considerazioni analoghe valgono per iperbole e parabola.

La nozione di tangente ad una conica viene data, da Apollonio, all'interno della teoria dei diametri: un *diametro* d di una conica C è una corda che biseca un fascio di corde parallele.



La nozione successiva è quella di *diametri coniugati*; la relazione di coniugio tra diametri oggi viene presentato usando la polarità indotta da una conica. Riferendoci alla figura che segue diciamo che il diametro d è *coniugato* al diametro o se d biseca il fascio di corde parallele a o : si dimostra che allora o biseca il fascio di corde parallele a d .



Apollonio introdusse i termini *ascissa* e *ordinata* per denotare rispettivamente il diametro d e il diametro o , passanti entrambi per il loro punto in comune, punto medio di entrambi: i termini che usiamo noi oggi per la geometria delle coordinate hanno quindi origine da opportuni riferimenti obliqui sulle coniche. Finalmente, nella stessa figura precedente appare chiaro come tracciare la tangente t alla conica C nel punto P : se P è estremo del diametro d allora si traccia per P la parallela al diametro coniugato a d . Apollonio dimostrò che t non può incontrare la conica C in un altro punto, e la dimostrazione ricalca quella data da Euclide per la circonferenza; inoltre, dimostra che anche per le coniche l'angolo di contingenza è nullo. La teoria delle tangenti è dunque squisitamente geometrica, e null'altro del resto ci si poteva aspettare dai classici. In particolare, non vi è quindi nessun riferimento al fatto che la tangente raccoglie in sé un'intersezione doppia con la curva, ma non dobbiamo sorprenderci di questo fatto: infatti, Apollonio si è limitato a studiare le sezioni coniche, e sappiamo che una retta generica ha al più due intersezioni con una conica, e quindi appare ridondante contare la molteplicità di intersezione nel caso delle coniche.

Il metodo del cerchio tangente di Cartesio

Il primo grande punto di svolta nella storia dell'intera matematica, ma anche nella storia della scienza in generale, sta nell'introduzione delle *coordinate*, ovvero nell'algebrizzazione della geometria: la geometria analitica, che oggi si studia anche a scuola, ha infatti rivoluzionato il modo di fare matematica, creando connessioni molto feconde tra algebra e geometria. Negli antichi greci la geometria era il sapere autentico, mentre l'aritmetica dei numeri razionali era discussa in chiave geometrica anch'essa. Con Cartesio (1596-1650) il punto di vista viene capovolto: l'algebra viene in aiuto della geometria, si mette come fondamento ad essa, e i problemi geometrici vengono tradotti in termini di equazioni. Lo scopo del metodo cartesiano era quindi soprattutto quello di liberare la geometria dal ricorso alle figure, mediante i procedimenti dell'algebra. Così facendo, Cartesio nella sua *Géométrie*, edita per la prima volta nel 1637, rivisitò molti problemi geometrici più o meno classici, come ad esempio un celebre problema di Pappo, aperto da mille anni circa e agevolmente risolto con l'uso del metodo delle coordinate cartesiane.

Con la scoperta della geometria analitica ritorna l'antico problema delle tangenti, risolto, come già sappiamo, limitatamente alle coniche, da Apollonio nel III secolo a.C. La situazione generale nella quale lo stesso Cartesio si mise è quella della curva espressa come luogo dei punti del piano le cui coordinate x, y risolvono un'equazione

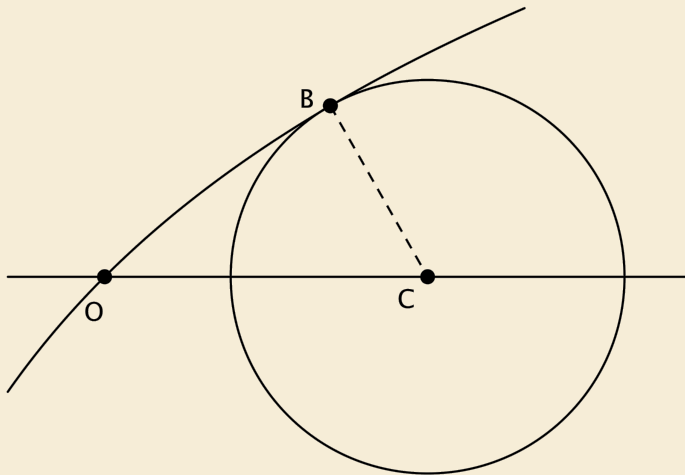
$$P(x, y) = 0.$$

Cartesio chiamò *tangente* una retta che ha intersezione almeno doppia con la curva nel punto di tangenza. Invece che cercare la tangente in un punto della curva, Cartesio si propose di cercare un cerchio tangente alla curva in quel punto; tracciando poi la retta per il punto della curva e il centro del cerchio si trova la normale alla curva, che è perpendicolare alla tangente.

Precisamente, egli scrisse:

“ Bisogna considerare che se questo punto C , il centro del cerchio cercato, è come lo desideriamo, il cerchio di cui sarà il centro e che passerà per B vi toccherà la curva senza intersecarla. Al contrario, se C è un po' più vicino o un po' più lontano di quel che deve essere, il cerchio intersecherà la curva non solo nel punto B ma necessariamente anche in qualche altro B_1 però tanto più questi due punti B e B_1 sono vicini, tanto minore sarà la differenza che sussiste tra le radici dell'equazione. Infine, se questi punti giacciono ambedue in uno, cioè se il cerchio che passa per B vi tocca la curva senza intersecarla, queste radici saranno assolutamente uguali.”

Fissata in O l'origine degli assi cartesiani, Cartesio decise di trovare il cerchio tangente alla curva in B che ha centro sull'asse x , nel punto C , come nella prossima figura: in B devono quindi essere riunite due intersezioni.



Sia $B = (x_0, y_0)$, e poniamo $OC = d$ e $BC = r$. Allora, l'equazione della circonferenza incognita sarà data da

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2.$$

Intersechiamo ora la curva con la circonferenza; abbiamo

$$\begin{cases} (x - d)^2 + y^2 = r^2 \\ P(x, y) = 0. \end{cases}$$

Eliminando y , e supponendo quindi di poterlo sempre fare in pratica, si arriva all'equazione risolvente $Q(x) = 0$ che dunque, per tangenza, deve dare il punto B contato almeno due volte, ovvero deve essere

$$Q(x) = (x - x_0)^2 R(x)$$

per un certo $R(x)$.

Vediamo ad esempio come trovare la generica tangente alla parabola di equazione $y - x^2 = 0$. Sia $B = (x_0, y_0)$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (x - d)^2 + y^2 = r^2 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

eliminando y . Si trova subito l'equazione

$$(x - d)^2 + x^4 = r^2$$

cioé

$$x^4 + x^2 - 2dx + d^2 - r^2 = 0.$$

Il polinomio risolvante, che è di quarto grado, deve quindi essere della forma

$$(x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$$

per opportuni numeri reali a, b, c . A conti fatti, deve quindi essere

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2dx + d^2 - r^2 &= ax^4 + (b - 2ax_0)x^3 + (ax_0^2 + c - 2bx_0)x^2 \\ &\quad + (bx_0^2 - 2cx_0)x + x_0^2c \end{aligned}$$

per ogni x reale.

Ne segue che

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ax_0 = 0 \\ ax_0^2 + c - 2bx_0 = 1 \\ bx_0^2 - 2cx_0 = -2d \\ x_0^2 c = d^2 - r^2. \end{cases}$$

Il precedente sistema ha la soluzione data da

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2x_0 \\ c = 1 + 3x_0^2 \\ d = x_0 + 2x_0^3 \\ r^2 = x_0^4(1 + 4x_0^2). \end{cases}$$

Ne segue che C ha coordinate $(x_0 + 2x_0^3, 0)$ e dunque la retta CB ha equazione cartesiana

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{2x_0^3}(x - x_0) = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0), \quad x_0 \neq 0.$$

L'ortogonale alla retta CB ha dunque equazione cartesiana

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$$

che dunque è l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y = x^2$ nel punto (x_0, y_0) . Il caso $x_0 = 0$ si tratta a parte e la tangente risulta avere equazione $y = 0$.

Il metodo proposto da Cartesio appare quindi abbastanza complesso anche in casi molto semplici: esso diventa infatti computazionalmente pesante quando l'equazione della curva è un polinomio di grado elevato. In particolare, osserviamo che il procedimento può funzionare praticamente solo se l'equazione che esprime la curva assegnata è polinomiale: in altre parole, il metodo di Cartesio è sostanzialmente limitato alle sole curve algebriche.

Le adeguazioni di Fermat

Cercando di risolvere il problema delle tangenti ad una curva piana, un matematico dilettante francese sfiora, almeno formalmente, la nozione di derivata come limite del rapporto incrementale. Pierre de Fermat (1601-1665) non è certo passato alla storia per questo, ma compì un passaggio importante, poiché effettuò il primo tentativo, ovviamente del tutto inconsapevole, di un passaggio al limite. L'idea di fondo su cui si basa Fermat è l'uso delle cosiddette *adequazioni*, utilizzate nell'opera *Methodus ad disquierendam maximam et minimam* del 1637 per la determinazione dei massimi e minimi di una funzione.

Fermat osservò anzitutto una cosa già ben nota a quel tempo, e cioè che se una funzione ha un massimo, o minimo, in un certo punto, allora essa è *stazionaria* nelle vicinanze di quel punto, ovvero varia poco se ci si sposta poco dal punto di massimo, o dal punto di minimo. Dunque, ad esempio, se f ha massimo in x_0 , deve essere vera l'*adequazione*

$$f(x_0 + e) \approx f(x_0)$$

per e quantità abbastanza piccola ma non nulla. Ma Fermat capì che è necessaria una maggiore precisione; siccome quindi

$$f(x_0 + e) - f(x_0)$$

deve essere già approssimativamente nullo anche per un $e \neq 0$, seguendo Fermat, deve valere anche l'adequazione

$$\frac{f(x_0 + e) - f(x_0)}{e} \approx 0$$

che è la prima apparizione di un rapporto incrementale. Si semplifica quindi l'adequazione e si pone alla fine $e = 0$: in questo modo l'adequazione finale diventa un'equazione in x_0 , dalla quale si trovano i punti che rendono f stazionaria.

Vediamo a titolo di esempio la determinazione dei punti di massimo e di minimo, locali, della funzione $f(x) = x^2(3 - x)$. Si ha

$$\begin{aligned} f(x + e) - f(x) &= (x + e)^2(3 - x - e) - x^2(3 - x) \\ &= -e^3 - 3e^2x - 3ex^2 + 3e^2 + 6xe \end{aligned}$$

per cui l'adequazione

$$\frac{f(x + e) - f(x)}{e} \approx 0$$

diventa

$$-e^2 - 3ex - 3x^2 + 3e + 6x \approx 0.$$

L'adequazione diviene equazione ponendo $e = 0$, e quindi si trova

$$-3x^2 + 6x = 0$$

da cui due soluzioni possibili, $x = 0$ e $x = 2$.

Seguendo i possibili ragionamenti di Fermat, osserviamo che

$$f(2 + e) = 4 - 3e^2 - e^3 = f(2) - 3e^2 - e^3.$$

Essendo e^3 trascurabile rispetto ad e^2 , notiamo che si avvertiva già una primordiale idea di confronto di infinitesimi, si avrà che per e molto piccolo

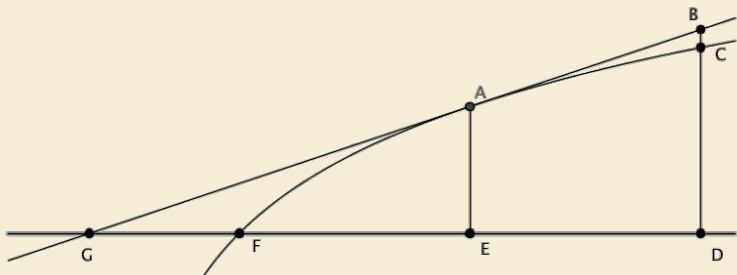
$$f(2 + e) < f(2)$$

per cui $x = 2$ è il punto di massimo locale cercato, ed il valore massimo vale $f(2) = 4$. In modo analogo, si ha

$$f(e) = 3e^2 - e^3 = f(0) + 3e^2 - e^3$$

per cui argomentando allo stesso modo si avrà che $x = 0$ è stavolta il punto di minimo locale cercato, ed il valore minimo vale 0.

Nel successivo manoscritto *De tangentibus linearum curvarum*, Fermat risolse il problema della determinazione delle tangenti come applicazione del metodo per i massimi e minimi. Illustriamo il procedimento utilizzato da Fermat per una funzione concava $y = f(x)$ facendo riferimento alla figura che segue



in cui F è l'origine degli assi; in particolare, il problema si riconduce a quello di determinare la cosiddetta *sottotangente* $t = |GE|$.

Denotiamo con $g(x)$ l'equazione della retta tangente GA e consideriamo la differenza

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Grazie alla concavità di f si ha $h \geq 0$ sempre e $h(x_0) = 0$, essendo $A = (x_0, f(x_0))$. Ne segue che h ha un minimo per $x = x_0$, e dunque deve essere vera l'adequazione

$$\frac{h(x_0 + e) - h(x_0)}{e} \approx 0 \quad (1)$$

per $e = |ED|$ piccolo, che si riduce a

$$\frac{h(x_0 + e)}{e} \approx 0.$$

Osserviamo ora che i triangoli GEA e GDB sono simili, da cui

$$AE : GE = BD : GD$$

da cui

$$|BD| = \frac{|AE| |GD|}{|GE|}.$$

Ne segue che

$$h(x_0 + e) + f(x_0 + e) = g(x_0 + e) = |BD| = \frac{|AE| |GD|}{|GE|} = \frac{f(x_0)(t + e)}{t}$$

da cui

$$\frac{h(x_0 + e) + f(x_0 + e)}{e} = \frac{f(x_0)(t + e)}{te}$$

cioé

$$\frac{h(x_0 + e)}{e} = \frac{f(x_0)(t + e)}{te} - \frac{f(x_0 + e)}{e}.$$

Dal momento che vale l'adequazione (1), deve essere

$$\frac{f(x_0)(t + e)}{te} - \frac{f(x_0 + e)}{e} \approx 0 \quad (2)$$

che è un'adequazione dalla quale si ricava t , ovvero la sottotangente.

Il caso in cui la funzione sia localmente convessa si tratta in modo analogo.

Andiamo a cercare, ad esempio, l'equazione della retta tangente alla funzione

$$y = \sqrt{x}$$

nel generico punto $A = (x_0, y_0)$, con $x_0 > 0$. Si tratta di una funzione concava, per cui si può utilizzare direttamente l'adequazione (2) che permette di trovare la sottotangente t . Precisamente, la (2) diventa

$$\frac{\sqrt{x_0}(t + e)}{te} - \frac{\sqrt{x_0 + e}}{e} \approx 0.$$

Si ha quindi

$$\frac{\sqrt{x_0}}{e} + \frac{\sqrt{x_0}}{t} - \frac{\sqrt{x_0 + e}}{e} \approx 0$$

che fornisce la soluzione

$$t \approx \frac{e\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + e} - \sqrt{x_0}} = \frac{e\sqrt{x_0}(\sqrt{x_0 + e} + \sqrt{x_0})}{e} = \sqrt{x_0}(\sqrt{x_0 + e} + \sqrt{x_0}).$$

Mettendo $e = 0$ si ha l'equazione

$$t = \sqrt{x_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}) = 2x_0.$$

Ne segue che l'equazione della retta tangente in $A = (x_0, y_0)$ è data da

$$y - y_0 = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0}(x - x_0)$$

ovvero

$$y - y_0 = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

e invero, procedendo come faremmo oggi, si ha proprio

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = y'(x_0).$$

Osserviamo che per risolvere il problema delle tangenti si potrebbe anche utilizzare direttamente la teoria delle adeguazioni, senza ricondursi ad un problema di minimo o di massimo. Infatti, se dobbiamo cercare l'equazione della retta tangente alla funzione $y = f(x)$ nel suo punto $A = (x_0, y_0)$ allora potremmo impostare direttamente l'adequazione

$$\frac{f(x_0 + e) - f(x_0)}{e} \approx m \quad (3)$$

nella variabile m , da cui la retta tangente in A di equazione

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Vediamo ad esempio come funziona la (3) per la funzione

$$y = x^k$$

con $k > 1$ intero, esempio fondamentale per gli ciò che vedremo successivamente. Dobbiamo risolvere l'adequazione

$$\frac{(x_0 + e)^k - x_0^k}{e} \approx m$$

Essendo noto che

$$(x_0 + e)^k = x_0^k + kx_0^{k-1}e + a_{k-2}x_0^{k-2}e^2 + \cdots + a_2x_0^2e^{k-2} + kx_0e^{k-1} + e^k$$

per certi coefficienti a_j , per $j = 2, \dots, k-2$, si trova l'adequazione

$$kx_0^{k-1} + a_{k-2}x_0^{k-2}e + \cdots + e^{k-1} \approx m$$

che diventa equazione ponendo $e = 0$, da cui

$$m = kx_0^{k-1}.$$

Dunque, la tangente alla curva data nel punto (x_0, y_0) ha equazione

$$y - y_0 = kx_0^{k-1}(x - x_0)$$

e invero, procedendo come faremmo oggi, si ha proprio

$$kx_0^{k-1} = y'(x_0).$$

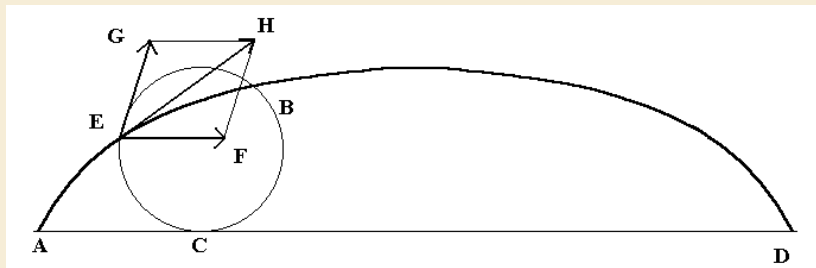
Il metodo di Fermat potenzialmente si applica anche alle curve non algebriche, ma diventa molto complesso anche solo con la presenza di parecchi radicali, e presenta ostacoli insuperabili quando l'equazione che descrive la curva è trascendente.

La costruzione cinematica delle tangenti

Accenniamo ad un ultimo metodo per la ricerca delle tangenti, che nasce dall'esigenza di considerare anche le curve descritte da movimenti meccanici. L'idea risale al matematico francese Gilles Personne de Roberval (1602-1675), e venne ripresa anche dall'italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), e consiste nello scomporre il moto del punto che descrive la curva in moti semplici per i quali sia possibile determinare la direzione della velocità, ovvero la tangente, e quindi, ricomponendo le direzioni, si ottiene la direzione della tangente alla curva assegnata. Il punto essenziale di partenza è quindi quello di capire come una curva possa venir generata in modo meccanico, e anche varie curve algebriche ben note possono essere trattate.

Infatti, ad esempio, si dimostra che la parabola è descritta da un punto mobile che si allontana da un punto fisso, il fuoco, con la stessa velocità con cui si allontana da una retta fissa, la direttrice; oppure, l'ellisse è generata da un punto mobile che si avvicina ad un fuoco con la stessa velocità con cui si allontana dall'altro fuoco; od ancora, l'iperbole è descritta dal punto che si avvicina ai fuochi, o si allontana da essi, con la stessa velocità; infine, per fare un esempio che non sia una conica, la *spirale di Archimede* è descritta da un punto mobile che ruota attorno ad un punto fisso con la stessa velocità cui si allontana dal punto stesso. Si potrebbe continuare a fare esempi di curve a quel tempo note, ve ne sono molte altre.

Esaminiamo più nel dettaglio solamente un esempio, e precisamente la *cicloide*, ovvero la curva descritta da un punto che sta sul bordo di un cerchio il quale rotola senza strisciare su una guida rettilinea: si veda la figura che segue:



Il moto di E è dato dalla composizione dei seguenti due moti:

- la circonferenza ruota attorno al suo centro;
- il centro della circonferenza si muove di moto rettilineo uniforme.

Più precisamente, siccome c'è rotolamento senza strisciamento, quando il cerchio ha fatto un giro completo, esso si è mosso di un segmento AD pari alla lunghezza della circonferenza. Ne segue che il moto di traslazione del centro del cerchio avviene con la stessa velocità, in modulo, del moto di rotazione della circonferenza attorno al suo centro. Dunque è facile costruire le due velocità, la cui somma sarà la velocità di E , generico punto della cicloide come in figura: la velocità $\vec{EF}$ è dovuta al moto di traslazione, che è orizzontale, mentre la velocità $\vec{EG}$, uguale in modulo, è dovuta alla rotazione ed è tangente alla circonferenza. Sommando i due vettori $\vec{EF}$ ed $\vec{EG}$ si ha la velocità $\vec{EH}$ che risulta essere tangente alla cicloide in E .

Considerazioni finali sul problema delle tangenti

Siamo giunti alla conclusione della prima parte della storia del calcolo. Per il problema delle tangenti abbiamo tre principali tentativi di soluzione: il metodo di Cartesio del cerchio tangente è lungo e complicato e va bene solo per le curve algebriche; il metodo delle adeguazioni di Fermat avvicina considerazioni più fini ma fallisce quando l'espressione della curva è troppo complicata; infine, il metodo cinematico richiede di conoscere perlomeno da che movimenti è composto il moto lungo la curva. Tutti i metodi fino a questo momento ideati hanno varie caratteristiche comuni: si tratta di metodi *globali*, cioè considerano la curva nella sua globalità, mentre la tangente è un concetto *locale*, e inoltre, a parte il metodo cinematico per certi aspetti, si propongono di determinare la sottotangente, che permette di risolvere il problema. La svolta decisiva si avrà solo quando si riuscirà a capire che le difficoltà del problema vanno spezzate: va ideato quindi un calcolo che permetta di separare le difficoltà.

Nonostante le difficoltà, si può comunque dire che i fondamenti concettuali del calcolo differenziale siano però stati compresi, anche se manca il passaggio decisivo che avrebbe permesso di creare un calcolo generale vero e proprio. Quello che invece manca del tutto, e che sarà invece un contributo essenziale che daranno Newton e Leibniz, è la comprensione del fatto che il problema delle quadrature è l'inverso del problema delle tangenti, che quindi, non a caso, sarà battezzato *teorema fondamentale del calcolo*, nome che si usa ancora oggi.