

Storia del calcolo infinitesimale, I

Il problema delle quadrature dall'Antichità al Rinascimento

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

Il problema delle quadrature

Uno dei primi problemi matematici dell'Antichità legati allo sviluppo del calcolo infinitesimale consiste nel calcolo delle aree di figure piane, o del volume di figure solide. Il classico problema della *quadratura* ha le sue origini nell'antica Grecia, e in generale esso consisteva nel determinare, con il solo uso della riga e del compasso, un quadrato equivalente ad una figura piana assegnata; uno si può anche porre il problema della *cubatura*, ovvero della determinazione, sempre con riga e compasso, di un cubo con lo stesso volume di una figura spaziale assegnata. La necessità di poter effettuare la costruzione limitandosi all'uso esclusivo di riga e compasso riflette il fatto che per gli antichi greci la geometria era un sapere costruttivo, oltre che teorico. La teoria della quadratura delle figure piane notevoli si può inquadrare come applicazione di varie proposizioni contenute negli *Elementi* di Euclide (300 a.C. circa), opera monumentale composta tra il IV e il III sec. a.C. Ad esempio, è facile decomporre un triangolo in un rettangolo ad esso equivalente, ed ancora un rettangolo in un quadrato ad esso equivalente.

Avendo quindi compreso come trasformare un triangolo in un quadrato equivalente, risultava allora semplice la trattazione di un poligono generale: prima va suddiviso in triangoli, ogni triangolo viene quindi trasformato in quadrato, e alla fine basta “sommare” i quadrati così ottenuti applicando, in modo opportuno, il teorema di Pitagora. Tutto questo meccanismo funziona fino a che uno si limita alle figure poligonali, ma i problemi cominciano a diventare più seri di fronte alle figure curve, ad esempio il cerchio. È ormai entrato nel linguaggio comune l'uso dell'espressione *quadrare il cerchio* per caratterizzare l'impossibilità di una prova. Infatti, la costruzione di un quadrato equivalente ad un cerchio assegnato, con uso esclusivo di riga e compasso, è impossibile, anche se questo fatto è stato rigorosamente dimostrato molti anni più tardi rispetto alla civiltà greca antica, ed anzi è una conquista della matematica moderna.

Per i greci quindi problemi come la quadratura del cerchio con riga e compasso, o la rettificazione della circonferenza, restarono senza soluzione, e per questo motivo la teoria della quadratura delle figure piane nel senso costruttivo del termine fu abbandonata, limitandosi a fornire semplicemente un modo che consentisse perlomeno il *calcolo* dell'area di una figura piana, o del volume di un solido. Tuttavia, anche il problema, apparentemente più facile, di trovare formule per il calcolo di aree o volumi presenta delle insidie, soprattutto quando uno affronta le figure curve: il calcolo dell'area del cerchio, la figura curva più semplice che uno possa tracciare nel piano, presenta già notevoli difficoltà. Bisogna quindi ideare un metodo che va oltre l'applicazione immediata degli assiomi più elementari della geometria euclidea.

Il metodo di esaustione

Allo scopo di dimostrare la validità di una formula che consentisse il calcolo dell'area di un cerchio, i greci idearono un opportuno strumento di approssimazione che rientra nella teoria delle grandezze *omogenee*, *misurabili e continue*. L'idea parte dallo studio della nozione di lunghezza di un segmento; è infatti possibile un criterio di confronto tra segmenti, un'operazione di addizione tra segmenti, una proprietà di divisibilità, ovvero un segmento si può dividere in un numero arbitrario di parti uguali tra loro, e la cosiddetta proprietà di *Eudosso-Archimede*, individuata da Eudosso di Cnido (400 a.C. circa), e che si può trovare anche negli *Elementi*: se le due lunghezze A e B sono tali per cui, ad esempio,

$$0 < A < B$$

allora esiste un naturale n tale che

$$nA > B.$$

Ci sono altri esempi di grandezze per le quali valgono queste proprietà: la misura degli angoli nel piano, l'area delle figure piane, o ancora il volume delle figure solide. Il *metodo di esaustione* è una significativa applicazione della proprietà di Eudosso-Archimede, ed è fondato sul seguente teorema:

Teorema

(Proposizione I, Libro X degli Elementi) *Se A e B sono due grandezze omogenee, misurabili e continue tali che $0 < A < B$, se da B viene sottratta una grandezza maggiore della sua metà, se da ciò che resta viene sottratta ancora una quantità maggiore della sua metà, e ripetendo continuamente questo procedimento, allora prima o poi resta una quantità minore di A .*

Il metodo di esaustione rappresenta, in un certo senso, il primo metodo di integrazione della storia: diciamo subito che il rigore assoluto che tale metodo possiede si rivedrà solo nel XIX secolo con l'integrale di Cauchy. Nonostante ciò, è troppo difficile da applicare, e soprattutto possiede un grosso svantaggio, rispetto al moderno calcolo integrale; non si tratta infatti di uno strumento di calcolo, bensì di un metodo puramente dimostrativo: esso dimostra in modo rigoroso la validità di certe uguaglianze tra aree o volumi, dedotte per altra via. Tipicamente, il metodo di esaustione procede, come dice il nome stesso, *esaurendo* una figura con una successione di figure all'interno di essa: da una figura si sottrae una parte maggiore della sua metà, dalla figura restante si sottrae ancora una parte maggiore della sua metà e così via, e si arriva quindi ad una figura più "piccola" di ogni figura arbitrariamente fissata. Il rigore dei greci sfiora per un attimo la definizione di limite, nozione che troveremo formalizzata ben duemila anni più tardi. In modo completamente rigoroso, dunque, lo sfruttamento dell'*infinito potenziale* (una grandezza non è mai infinita, ma può diventare arbitrariamente piccola o arbitrariamente grande) permise ai greci di determinare aree e volumi di figure curve.

La più classica applicazione del metodo di esaustione è la determinazione dell'area del cerchio. La procedura si avvale del seguente teorema:

Teorema

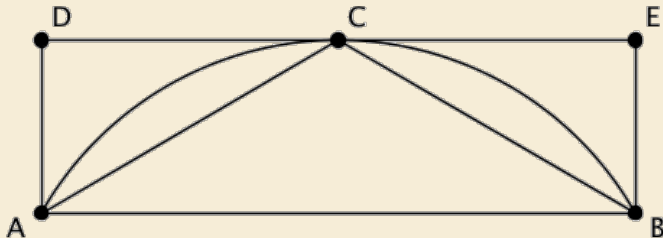
(Proposizione I, Libro XII degli Elementi) *Le aree di due poligoni simili inscritti in due distinte circonferenze stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi raggi.*

Tale teorema permette di dedurre il seguente fatto definitivo:

Teorema

(Proposizione II, Libro XII degli Elementi) *Le aree di due cerchi stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi diametri.*

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema Euclide mette in atto il metodo di esaustione. Prima di tutto facciamo un'osservazione che sarà utile strada facendo, e precisamente, riferendoci alla seguente figura:



Consideriamo una corda AB di una data circonferenza, e il punto C sulla circonferenza di modo tale che il triangolo ABC sia isoscele sulla base AB . Allora è facile verificare che l'area di ABC è maggiore della metà dell'area del settore circolare circoscritto ad ABC : infatti, se uno costruisce il rettangolo $ABED$ come in figura si ha che l'area S del settore circolare ABC è minore dell'area di tale rettangolo, che vale il doppio dell'area del triangolo ABC .

Siano dati ora due cerchi C_1 e C_2 di raggi R_1 e R_2 e siano A_1 e A_2 le rispettive aree. Va mostrato che

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Sia

$$A = \frac{A_1 R_2^2}{R_1^2}.$$

Supponiamo, per assurdo, che sia $A < A_2$. Cominciamo a inscrivere nel cerchio C_1 un quadrato. Si vede subito che l'area di tale quadrato, che vale $2R_1^2$, è maggiore di

$$\frac{A_1}{2}.$$

Infatti, il lato del quadrato circoscritto a C_1 vale $2R_1$, per cui si ha $A_1 < 4R_1^2$ da cui

$$2R_1^2 > \frac{A_1}{2}.$$

Mettiamo ora quindi in atto l'idea osservata precedentemente, e costruiamo l'ottagono regolare che ha quattro vertici pari a quelli del quadrato e gli altri quattro nei punti medi degli archi di C_1 sottesi dai lati del quadrato. Iterando questo ragionamento si arriva dunque ad un poligono inscritto in C_1 di 2^n lati, di area che denotiamo con $P_n^{(1)}$. Ripetiamo la stessa costruzione sul cerchio C_2 e denotiamo con $P_n^{(2)}$ le aree dei corrispondenti poligoni inscritti in C_2 . Avendo poligoni simili per ogni scelta di n si ha allora, grazie al teorema precedentemente dimostrato, che

$$\frac{P_n^{(1)}}{P_n^{(2)}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{A_1}{A}.$$

Essendo

$$P_n^{(1)} < A_1,$$

deve quindi essere

$$P_n^{(2)} < A. \quad (1)$$

Ma, per esaustione

$$A_2 - P_n^{(2)}$$

risulta minore di ogni area arbitrariamente fissata, a patto di prendere n abbastanza grande, e dunque esiste un intero positivo $\bar{n}$ tale che

$$A_2 - P_{\bar{n}}^{(2)} < A_2 - A$$

ovvero

$$P_{\bar{n}}^{(2)} > A$$

che contraddice la (1).

Invertendo i ruoli tra C_1 e C_2 e ponendo ora

$$B = \frac{A_2 R_1^2}{R_2^2}$$

segue che non può essere

$$B < A_1.$$

Supponiamo quindi che sia

$$A > A_2.$$

Allora si avrebbe subito

$$B = \frac{A_2 R_1^2}{R_2^2} = \frac{A_1 A_2}{A} < A_1$$

che abbiamo mostrato non sussistere. Ne segue che deve essere

$$A = A_2$$

che conclude la verifica.

Grazie a questo teorema è possibile il calcolo dell'area del cerchio di raggio R : infatti, basta considerare l'area c del cerchio di raggio 1, per avere che l'area A del cerchio di raggio R soddisfa

$$\frac{A}{c} = R^2$$

da cui

$$A = cR^2.$$

La costante c è quella che fu poi denotata con il simbolo π , di valore 3.14 circa, calcolato con considerazioni empiriche; ne segue la formula oggi nota per l'area del cerchio di raggio R , ovvero

$$A = \pi R^2.$$

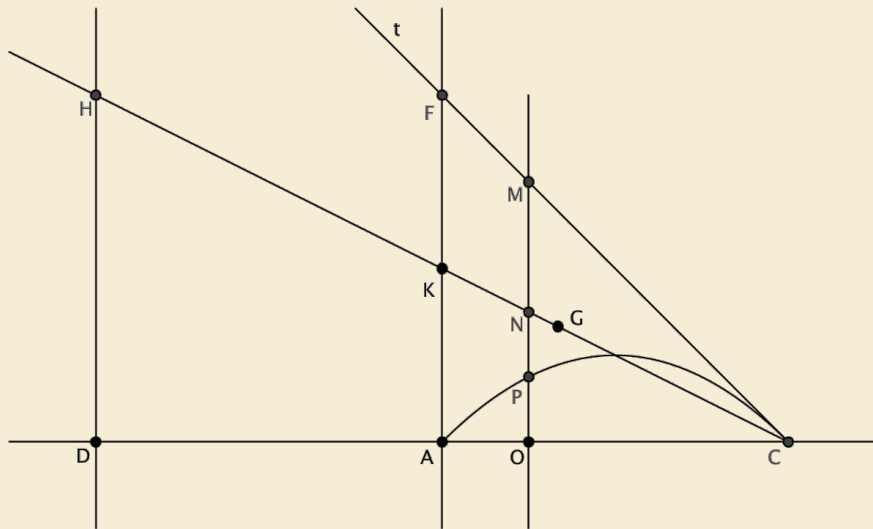
Archimede: rigore e ingegno

Per quanto riguarda la determinazione dell'area del cerchio ce la siamo cavata appoggiandoci a teoremi intuitivi, dal momento che il cerchio è la figura curva più semplice, ma per curve più complesse? Come intuire le formule corrette per le quadrature da dimostrare poi per esaustione?

Archimede di Siracusa (250 a.C. circa) ci mostra dei bellissimi esempi di come dedurre formule da dimostrare da considerazioni di tipo *meccanico*: questo trucco di Archimede è stato scoperto solo ai primi del Novecento quando il filologo danese Heiberg scoprì in un palinsesto conservato a Costantinopoli un'opera di Archimede fino a quel momento sconosciuta, battezzata poi come *Metodo*. Archimede quindi, nel *Metodo*, mostrerà come ha dedotto la validità di certe formule geometriche, che dimostrò con il metodo di esaustione: sono ad esempio trattate la quadratura del segmento parabolico e la determinazione del volume della sfera.

Osserveremo in particolare l'uso combinato di metodi meccanici, come l'equilibrio delle leve, e di metodi che molto assomigliano a ciò che 1700 anni più tardi saranno gli indivisibili di Cavalieri.

Analizziamo, per esempio, come Archimede riuscì a giungere alla formula corretta che fornisce l'area di un segmento parabolico, la cui dimostrazione per esaustione si trova nell'opera *Quadratura della parabola*. Consideriamo la seguente figura di riferimento per tutto quello che segue:



Sia dato quindi l'arco di parabola AC : Archimede intendeva scoprire la formula che fornisce l'area del segmento parabolico determinato da tale arco, ovvero l'area della regione sottesa da tale arco di base il segmento AC ; useremo un linguaggio matematico moderno, ma le stesse idee e le stesse costruzioni di Archimede. L'equazione della parabola è data da

$$|OP| = m|AO|(|AC| - |AO|)$$

per un certo coefficiente $m > 0$. Sia t la tangente all'arco di parabola nel punto C ; allora l'equazione di t è data, utilizzando le notazioni in figura, da

$$|OM| = m|AC|(|AC| - |AO|).$$

Archimede sapeva tracciare le tangenti alla parabola, problema risolto da Apollonio, limitatamente alle coniche, alla fine del III secolo a.C., sul quale ritorneremo in seguito. Ne segue che

$$|OP| |AC| = |OM| |AO| \tag{2}$$

e questa relazione vale per ogni punto P dell'arco di parabola.

Precisamente in questo punto arriva il colpo di genio: Archimede nella relazione (2) non vide solo della geometria, bensì la condizione di equilibrio di una leva. Infatti, la (2) esprime la condizione di equilibrio di una leva con peso $|OP|$ in un estremo e braccio $|AC|$, e peso $|OM|$ nell'altro estremo, con braccio $|AO|$. Il genio siracusano piazzò questa ipotetica leva nel modo più furbo tra tutti, secondo il seguente ragionamento: se F è il punto di intersezione tra la tangente t e la retta ortogonale ad AO e K è il punto medio di AF , allora K è il fulcro della leva che si trova lungo il segmento NH , essendo

$$|AD| = |AC|.$$

Il punto N sarà dunque il punto medio di OM , e rappresenta l'estremo della leva dove è applicato il peso materializzato dal segmento OM . Allo stesso modo, il punto H è l'altro estremo dell'asta dove viene applicata la materializzazione del segmento OP . Si osservi ora che il segmento OM può essere pensato concentrato in N , suo punto medio.

Dunque, la totalità dei segmenti OM viene ad essere concentrata lungo il segmento CK . Così facendo, la totalità di questi pesi può essere pensata come applicata nel baricentro G del triangolo AFC . Quindi la leva HKG , con la totalità dei segmenti parabolici in H e la totalità dei segmenti OM in G , è in equilibrio. Essendo

$$|AF| = m|AC|^2$$

si ha

$$A_{AFC} = \frac{m}{2}|AC|^3$$

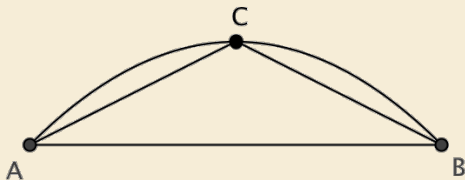
e quindi, se denotiamo con S l'area del segmento parabolico, l'equilibrio della leva fornisce

$$S|AC| = \frac{m}{2}|AC|^3 \frac{|AC|}{3} = \frac{m}{6}|AC|^4.$$

In definitiva, la formula trovata da Archimede dice che l'area S del segmento parabolico vale

$$S = \frac{m}{6}|AC|^3.$$

Archimede osservò che la formula trovata si può scrivere in modo più semplice, in termini del triangolo isoscele ABC inscritto nel segmento parabolico assegnato, come nella figura seguente:



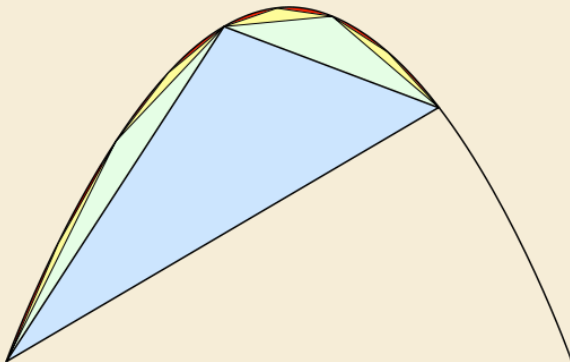
Infatti, si ha

$$T = A_{ABC} = \frac{1}{2}|AC|\frac{m}{4}|AC|^2 = \frac{m}{8}|AC|^3$$

da cui la più semplice formula:

$$S = \frac{4}{3}T.$$

È stata trovata una formula candidata ad essere l'area del segmento parabolico dato. Archimede ora procederà dimostrando per esaustione il risultato ottenuto per via empirica; non entriamo nel dettaglio della dimostrazione di Archimede, ma illustriamo solamente a grandi linee la procedura utilizzata. Anzitutto, va costruita un'opportuna esaustione del segmento parabolico, come nella figura che segue:



Si può verificare che la successione delle aree così determinate vale

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \cdots$$

Archimede a questo punto sfruttò l'identità, da lui dimostrata rigorosamente, data da

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3 \cdot 4^n} = \frac{4}{3} \quad (3)$$

per concludere che

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3} T$$

che è la tesi.

La ripresa del XVI secolo

La ripresa lenta e faticosa della matematica nel tardo medioevo è principalmente dovuta all'invenzione della stampa a caratteri mobili: tale scoperta impresso un'accelerazione spaventosa alla diffusione della conoscenza in generale. Una delle prime opere matematiche ad essere messa a stampa fu ovviamente data dagli *Elementi* di Euclide. La stampa delle opere di Archimede avvenne invece solo verso la fine del XVI secolo, a Basilea, e questo contribuì al rifiorire dell'interesse verso i problemi lasciati aperti; ricordiamo però che il *Metodo*, nel quale Archimede spiega le considerazioni sulle leve e sui baricentri, verrà scoperto solo nel Novecento, per cui i matematici del XVI secolo dovettero riscoprire gli strumenti che fossero in grado di arrivare ai risultati descritti da Archimede. Va ricordato l'italiano Francesco Maurolico (1494-1575) che riuscì a ricostruire la teoria dei centri di gravità dei solidi corredando il tutto con numerose dimostrazioni per esaurimento, metodo che resisteva ancora a quel tempo, non avendo i matematici alternative.

Tra gli scritti dell'italiano Luca Valerio (1552-1618) troviamo una prima importante novità: per la prima volta infatti vengono trattate classi generali di figure, invece che curve o solidi particolari. Questo fatto rappresenta il primo tentativo di abbandono della matematica classica, che aveva sempre distinto tra figure geometriche dichiarate, con tanto di nome, da altre figure geometriche di scarso interesse. Valerio infatti, nel suo trattato *De centro gravitas solidorum* oltre a riprendere solidi ben noti, fornì una trattazione anche per una classe generale di figure, le *figure decrescenti*, mostrando che gli stessi strumenti si applicano molto più in generale. Queste considerazioni sono l'inizio di una serie di ricerche sulle quadrature e sul calcolo dei volumi che, per la prima volta, abbandoneranno il metodo di esaustione, per andare alla ricerca di metodi di calcolo.

Gli indivisibili di Cavalieri

La direzione di ricerca intrapresa sfocerà nell'ultimo vano tentativo: la *teoria degli indivisibili geometrici* chiude la ricerca sulle quadrature prima che il calcolo degli integrali, molti anni più tardi, possa essere sviluppato. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), allievo di Galileo, cercò di considerare in che rapporto stanno i volumi dei solidi di rotazione a partire dal rapporto tra le figure piane che li generano, ma trovò subito delle incongruenze: ad esempio, il cilindro è il triplo del cono inscritto, ma è generato, per rotazione, da un rettangolo che è il doppio del triangolo che genera il cono. Cavalieri si accorse che l'apparente errore viene aggirato cambiando il punto di vista: mettendo cioè i due solidi con la stessa altezza uno accanto all'altro, con le basi su uno stesso piano, e affettandoli con una famiglia di piani paralleli alla base.

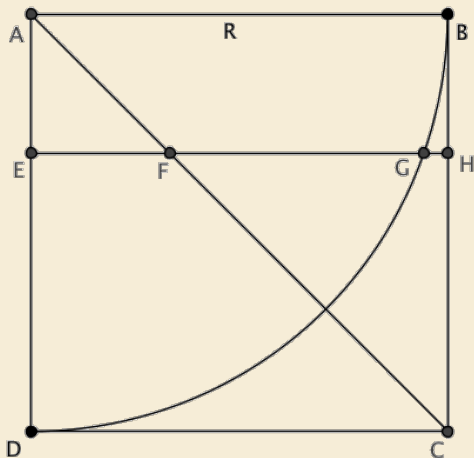
Nella sua opera *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, pubblicata nel 1635, Cavalieri espose il seguente teorema, oggi noto anche come *Principio di Cavalieri*:

Teorema

(Teorema IV, Libro II della Geometria indivisibilibus) *Se due superfici piane disgiunte intercettate dallo stesso fascio di rette parallele formano corde tra loro proporzionali a due a due con lo stesso fattore di proporzionalità, allora le due superfici stanno in quello stesso rapporto. Analogamente, se due solidi disgiunti intercettati dallo stesso fascio di piani paralleli formano superfici proporzionali a due a due con lo stesso fattore di proporzionalità, allora i due solidi stanno in quello stesso rapporto.*

Stando alle attuali conoscenze matematiche, è da osservare che il Principio di Cavalieri è una semplice conseguenza del teorema di Fubini-Tonelli per gli integrali multipli. Il principio di Cavalieri è tuttavia fondato sul concetto poco chiaro e non classico di *indivisibile geometrico* e si contrappone al metodo di esaustione: è teoricamente più debole, ma è più versatile, perlomeno si tratta quasi di uno strumento di calcolo. C'è quindi un ritorno all'*infinito attuale*, bandito dai greci perché fonte inesorabile di guai, ma è comunque un passo in avanti; nonostante ciò, il problema delle quadrature non può essere trattato meglio di così ormai, e per fare il passo decisivo bisogna aspettare Newton e Leibniz.

Consideriamo, come unico esempio di applicazione del Principio di Cavalieri, il problema della determinazione del volume della sfera di raggio R . Allo scopo, osserviamo la costruzione della seguente figura, dove l'arco di curva rappresenta un quarto di circonferenza:



Una rotazione completa attorno al segmento AD dell'arco BD genera quindi una superficie semisferica. Immaginiamo ora di prendere un piano ortogonale al segmento AD che scorra da A verso D . Esso interseca la semisfera generata dalla rotazione del settore ABD lungo EG , interseca il cilindro generato dalla rotazione del quadrato $ABCD$ lungo EH ed interseca il cono generato dalla rotazione del triangolo ACD lungo il segmento EF . Applicando il teorema di Pitagora si ha

$$|EH|^2 = |AG|^2 = |AE|^2 + |EG|^2 = |EF|^2 + |EG|^2.$$

Quindi il fascio di piani paralleli interseca i tre solidi ottenuti, cilindro $\mathcal{C}$, semisfera $\mathcal{S}$ e cono $\mathcal{Q}$, lungo tre superfici le cui aree stanno in una certa relazione. Un'applicazione un po' spinta del principio di Cavalieri spaziale dice allora che deve essere

$$V_{\mathcal{C}} = V_{\mathcal{Q}} + V_{\mathcal{S}}$$

da cui

$$V_{\mathcal{S}} = V_{\mathcal{C}} - V_{\mathcal{Q}} = \pi R^3 - \frac{\pi}{3}R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Ne segue che il volume della sfera di raggio R vale

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$