Sistemi simmetrici

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

TEORIA ELEMENTARE

Teoria elementare

Cominciamo con una definizione, molto semplice.

Teoria elementare

Cominciamo con una definizione, molto semplice.

Definizione

Teoria elementare

Cominciamo con una definizione, molto semplice.

Definizione

Un sistema si dice *simmetrico* se scambiando due qualunque delle sue incognite non cambia forma.

Teoria elementare

Cominciamo con una definizione, molto semplice.

Definizione

Un sistema si dice *simmetrico* se scambiando due qualunque delle sue incognite non cambia forma.

Per esempio, nel caso di sistemi in due incognite, scambiando la x e la y non si deve cambiare il sistema.

Teoria elementare

Cominciamo con una definizione, molto semplice.

Definizione

Un sistema si dice *simmetrico* se scambiando due qualunque delle sue incognite non cambia forma.

Per esempio, nel caso di sistemi in due incognite, scambiando la x e la y non si deve cambiare il sistema.
La definizione si applica però anche a sistemi con più incognite.

Sempre per esempio, il sistema

Sempre per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Sempre per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

è simmetrico, perché se scambiamo x e y, viene il sistema

Sempre per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

è simmetrico, perché se scambiamo x e y, viene il sistema

$$\begin{cases} y^2 + yx + x^2 = 9 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

Sempre per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

è simmetrico, perché se scambiamo x e y, viene il sistema

$$\begin{cases} y^2 + yx + x^2 = 9 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

che, per la proprietà commutativa di addizione e moltiplicazione, è lo stesso di quello di prima.

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.
Non ci sono sistemi simmetrici interessanti di *primo* grado.

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.
Non ci sono sistemi simmetrici interessanti di *primo* grado. Infatti l'unica espressione simmetrica di primo grado in x e y è $x + y$,

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.
Non ci sono sistemi simmetrici interessanti di *primo* grado. Infatti l'unica espressione simmetrica di primo grado in x e y è $x + y$, e quindi un sistema simmetrico di primo grado sarebbe della forma

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.
Non ci sono sistemi simmetrici interessanti di *primo* grado. Infatti l'unica espressione simmetrica di primo grado in x e y è $x + y$, e quindi un sistema simmetrico di primo grado sarebbe della forma

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.
Non ci sono sistemi simmetrici interessanti di *primo* grado. Infatti l'unica espressione simmetrica di primo grado in x e y è $x + y$, e quindi un sistema simmetrico di primo grado sarebbe della forma

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Ora, se $a = b$ il sistema è indeterminato, come sappiamo da quanto abbiamo studiato (v. la lezione *Sistemi di primo grado*),

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.
Non ci sono sistemi simmetrici interessanti di *primo* grado. Infatti l'unica espressione simmetrica di primo grado in x e y è $x+y$, e quindi un sistema simmetrico di primo grado sarebbe della forma

$$\begin{cases} x+y=a \\ x+y=b \end{cases}$$

Ora, se $a=b$ il sistema è indeterminato, come sappiamo da quanto abbiamo studiato (v. la lezione *Sistemi di primo grado*), mentre se $a \neq b$ è impossibile.

Ci limiteremo a sistemi simmetrici in due incognite.
Non ci sono sistemi simmetrici interessanti di *primo* grado. Infatti l'unica espressione simmetrica di primo grado in x e y è $x+y$, e quindi un sistema simmetrico di primo grado sarebbe della forma

$$\begin{cases} x+y=a \\ x+y=b \end{cases}$$

Ora, se $a=b$ il sistema è indeterminato, come sappiamo da quanto abbiamo studiato (v. la lezione *Sistemi di primo grado*), mentre se $a \neq b$ è impossibile.
Il primo tipo di sistema simmetrico interessante è quindi quello di secondo grado.

Sistemi simmetrici semplici di secondo grado

Col secondo grado esistono, oltre a $x + y$, più espressioni simmetriche, come $xy, x^2 + y^2$ e loro composizioni.

Sistemi simmetrici semplici di secondo grado

Col secondo grado esistono, oltre a $x + y$, più espressioni simmetriche, come $xy, x^2 + y^2$ e loro composizioni.
Ricordiamo ora che il grado di un sistema è definito come il *prodotto* dei gradi delle singole espressioni,

Sistemi simmetrici semplici di secondo grado

Col secondo grado esistono, oltre a $x + y$, più espressioni simmetriche, come $xy, x^2 + y^2$ e loro composizioni.
Ricordiamo ora che il grado di un sistema è definito come il *prodotto* dei gradi delle singole espressioni, per cui se vogliamo un sistema di secondo grado, una delle due espressioni deve essere di primo grado, cioè ancora $x + y$,

Sistemi simmetrici semplici di secondo grado

Col secondo grado esistono, oltre a $x + y$, più espressioni simmetriche, come $xy, x^2 + y^2$ e loro composizioni.
Ricordiamo ora che il grado di un sistema è definito come il *prodotto* dei gradi delle singole espressioni, per cui se vogliamo un sistema di secondo grado, una delle due espressioni deve essere di primo grado, cioè ancora $x + y$, mentre l'altra è di secondo grado.

Sistemi simmetrici semplici di secondo grado

Col secondo grado esistono, oltre a $x + y$, più espressioni simmetriche, come $xy, x^2 + y^2$ e loro composizioni.
Ricordiamo ora che il grado di un sistema è definito come il *prodotto* dei gradi delle singole espressioni, per cui se vogliamo un sistema di secondo grado, una delle due espressioni deve essere di primo grado, cioè ancora $x + y$, mentre l'altra è di secondo grado.
Sono quindi sistemi simmetrici di secondo grado, per esempio,

Sistemi simmetrici semplici di secondo grado

Col secondo grado esistono, oltre a $x + y$, più espressioni simmetriche, come $xy, x^2 + y^2$ e loro composizioni.
Ricordiamo ora che il grado di un sistema è definito come il *prodotto* dei gradi delle singole espressioni, per cui se vogliamo un sistema di secondo grado, una delle due espressioni deve essere di primo grado, cioè ancora $x + y$, mentre l'altra è di secondo grado.
Sono quindi sistemi simmetrici di secondo grado, per esempio,

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Chiameremo sistema simmetrico di secondo grado *semplice* un sistema del tipo

Chiameremo sistema simmetrico di secondo grado *semplice* un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

Chiameremo sistema simmetrico di secondo grado *semplice* un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

Per esempio, il sistema

Chiameremo sistema simmetrico di secondo grado *semplice* un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

Chiameremo sistema simmetrico di secondo grado *semplice* un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

è semplice.

Chiameremo sistema simmetrico di secondo grado *semplice* un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

è semplice. Le lettere s e p si riferiscono, ovviamente, a "somma" e "prodotto".

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione.

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che z_1, z_2 siano le due soluzioni dell'equazione

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che z_1, z_2 siano le due soluzioni dell'equazione

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che z_1, z_2 siano le due soluzioni dell'equazione

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Per quanto abbiamo imparato a proposito delle equazioni di secondo grado (v. la lezione *Equazioni di secondo grado*)

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che z_1, z_2 siano le due soluzioni dell'equazione

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Per quanto abbiamo imparato a proposito delle equazioni di secondo grado (v. la lezione *Equazioni di secondo grado*) sappiamo che la somma e il prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che z_1, z_2 siano le due soluzioni dell'equazione

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Per quanto abbiamo imparato a proposito delle equazioni di secondo grado (v. la lezione *Equazioni di secondo grado*) sappiamo che la somma e il prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$ sono rispettivamente

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che z_1, z_2 siano le due soluzioni dell'equazione

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Per quanto abbiamo imparato a proposito delle equazioni di secondo grado (v. la lezione *Equazioni di secondo grado*) sappiamo che la somma e il prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$ sono rispettivamente

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ (nel nostro caso } s),$$

Vediamo la principale proprietà dei sistemi semplici.

Teorema

Le soluzioni x e y di un sistema simmetrico semplice di secondo grado verificano la stessa equazione di secondo grado

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che z_1, z_2 siano le due soluzioni dell'equazione

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Per quanto abbiamo imparato a proposito delle equazioni di secondo grado (v. la lezione *Equazioni di secondo grado*) sappiamo che la somma e il prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$ sono rispettivamente

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ (nel nostro caso } s\text{)}, \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ (nel nostro caso } p\text{)}.$$

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$$

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$$

ricaviamo ad esempio x dalla prima equazione e troviamo

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$$

ricaviamo ad esempio x dalla prima equazione e troviamo

$$x = s - y$$

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$$

ricaviamo ad esempio x dalla prima equazione e troviamo

$$x = s - y$$

e sostituendo nella seconda troviamo

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$$

ricaviamo ad esempio x dalla prima equazione e troviamo

$$x = s - y$$

e sostituendo nella seconda troviamo

$$(s - y)y = p$$

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$$

ricaviamo ad esempio x dalla prima equazione e troviamo

$$x = s - y$$

e sostituendo nella seconda troviamo

$$(s - y)y = p$$

ossia

Pertanto z_1, z_2 verificano il sistema

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

e quindi z_1, z_2 risolvono il sistema semplice dato.
Viceversa, se (x, y) verificano il sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$$

ricaviamo ad esempio x dalla prima equazione e troviamo

$$x = s - y$$

e sostituendo nella seconda troviamo

$$(s - y)y = p$$

ossia

$$y^2 - sy + p = 0.$$

Ricavando invece $y = s - x$ e sostituendo nella seconda troviamo

Ricavando invece $y = s - x$ e sostituendo nella seconda troviamo

$$x(s - x) = p$$

Ricavando invece $y = s - x$ e sostituendo nella seconda troviamo

$$x(s - x) = p$$

ossia

Ricavando invece $y = s - x$ e sostituendo nella seconda troviamo

$$x(s - x) = p$$

ossia

$$x^2 - sx + p = 0$$

Ricavando invece $y = s - x$ e sostituendo nella seconda troviamo

$$x(s - x) = p$$

ossia

$$x^2 - sx + p = 0$$

che è la stessa equazione trovata per y. ■

Ricavando invece $y = s - x$ e sostituendo nella seconda troviamo

$$x(s - x) = p$$

ossia

$$x^2 - sx + p = 0$$

che è la stessa equazione trovata per y. ■
L'equazione $z^2 - sz + p = 0$ si chiama anche equazione *risolvente* del sistema.

Ricavando invece $y = s - x$ e sostituendo nella seconda troviamo

$$x(s - x) = p$$

ossia

$$x^2 - sx + p = 0$$

che è la stessa equazione trovata per y. ■
L'equazione $z^2 - sz + p = 0$ si chiama anche equazione *risolvente* del sistema.
Per quanto abbiamo visto, per risolvere un sistema simmetrico semplice dobbiamo

1. Scrivere l'equazione risolvente

1. Scrivere l'equazione risolvente

$$z^2 - sz + p = 0;$$

1. Scrivere l'equazione risolvente

$$z^2 - sz + p = 0;$$

2. risolvere l'equazione calcolando le soluzioni z_1, z_2;

1. Scrivere l'equazione risolvente

$$z^2 - sz + p = 0;$$

2. risolvere l'equazione calcolando le soluzioni z_1, z_2;
3. a questo punto le soluzioni del sistema sono

1. Scrivere l'equazione risolvente

$$z^2 - sz + p = 0;$$

2. risolvere l'equazione calcolando le soluzioni z_1, z_2;
3. a questo punto le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_2, \end{cases}$$

1. Scrivere l'equazione risolvente

$$z^2 - sz + p = 0;$$

2. risolvere l'equazione calcolando le soluzioni z_1, z_2;
3. a questo punto le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z_2 \\ y = z_1. \end{cases}$$

1. Scrivere l'equazione risolvente

$$z^2 - sz + p = 0;$$

2. risolvere l'equazione calcolando le soluzioni z_1, z_2;
3. a questo punto le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z_2 \\ y = z_1. \end{cases}$$

L'ultima proprietà viene dal fatto che x e y sono intercambiabili,

1. Scrivere l'equazione risolvente
$$z^2 - sz + p = 0;$$
2. risolvere l'equazione calcolando le soluzioni z_1, z_2;
3. a questo punto le soluzioni del sistema sono
$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z_2 \\ y = z_1. \end{cases}$$

L'ultima proprietà viene dal fatto che x e y sono intercambiabili, quindi scambiando x e y in una coppia di soluzioni si ottiene ancora una coppia di soluzioni.

1. Scrivere l'equazione risolvente

$$z^2 - sz + p = 0;$$

2. risolvere l'equazione calcolando le soluzioni z_1, z_2;
3. a questo punto le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z_2 \\ y = z_1. \end{cases}$$

L'ultima proprietà viene dal fatto che x e y sono intercambiabili, quindi scambiando x e y in una coppia di soluzioni si ottiene ancora una coppia di soluzioni.
Vediamo subito un esempio di come funziona.

Esempio

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

L'equazione risolvente è

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

L'equazione risolvente è

$$z^2 - 2z + \frac{3}{4} = 0$$

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

L'equazione risolvente è

$$z^2 - 2z + \frac{3}{4} = 0$$

cioè

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

L'equazione risolvente è

$$z^2 - 2z + \frac{3}{4} = 0$$

cioè

$$4z^2 - 8z + 3 = 0.$$

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

L'equazione risolvente è

$$z^2 - 2z + \frac{3}{4} = 0$$

cioè

$$4z^2 - 8z + 3 = 0.$$

Risolvendo questa equazione troviamo

Esempio

Risolviamo il sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

L'equazione risolvente è

$$z^2 - 2z + \frac{3}{4} = 0$$

cioè

$$4z^2 - 8z + 3 = 0.$$

Risolvendo questa equazione troviamo

$$z_1 = \frac{1}{2}, \qquad z_2 = \frac{3}{2}.$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale.

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Vediamo un paio di esempi.

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Vediamo un paio di esempi.
Il polinomio $x^2 + y^2$ è simmetrico di secondo grado.

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Vediamo un paio di esempi.
Il polinomio $x^2 + y^2$ è simmetrico di secondo grado. Ora

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Vediamo un paio di esempi.
Il polinomio $x^2 + y^2$ è simmetrico di secondo grado. Ora

$$x^2 + y^2 =$$

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Vediamo un paio di esempi.
Il polinomio $x^2 + y^2$ è simmetrico di secondo grado. Ora

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy =$$

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Vediamo un paio di esempi.
Il polinomio $x^2 + y^2$ è simmetrico di secondo grado. Ora

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p$$

Sistemi simmetrici di secondo grado

Vediamo come risolvere un sistema simmetrico più generale. L'idea è ricondursi a un sistema semplice e si basa su un teorema che non dimostriamo qui ma nell'approfondimento alla fine (non è facile).

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Vediamo un paio di esempi.
Il polinomio $x^2 + y^2$ è simmetrico di secondo grado. Ora

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p$$

dove $s = x + y$ e $p = xy$.

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado.

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado. Ora

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado. Ora

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 =$$

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado. Ora

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 =$$

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado. Ora

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - p^2 =$$

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado. Ora

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - p^2 = s^4 - 4s^2p + 3p^2.$$

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado. Ora

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - p^2 = s^4 - 4s^2p + 3p^2.$$

L'affermazione del teorema è che queste trasformazioni si possono sempre fare.

Il polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ è simmetrico di quarto grado. Ora

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - p^2 = s^4 - 4s^2p + 3p^2.$$

L'affermazione del teorema è che queste trasformazioni si possono sempre fare.
Pertanto un sistema simmetrico qualunque in due incognite si risolve trasformando il sistema in un sistema (non necessariamente simmetrico) nelle incognite s, p e, una volta risolto, si risolvono i sistemi semplici che si trovano dalle varie soluzioni per s, p.

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Usando l'identità vista prima, detta *formula di Waring*,

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Usando l'identità vista prima, detta *formula di Waring*,

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Usando l'identità vista prima, detta *formula di Waring*,

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

troviamo

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Usando l'identità vista prima, detta *formula di Waring*,

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

troviamo

$$\begin{cases} s = -1 \\ s^2 - 2p = 13 \end{cases}$$

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Usando l'identità vista prima, detta *formula di Waring*,

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

troviamo

$$\begin{cases} s = -1 \\ s^2 - 2p = 13 \end{cases}$$

da cui, sostituendo $s = -1$ nella seconda, troviamo subito

Esempio

Vediamo di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Usando l'identità vista prima, detta *formula di Waring*,

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

troviamo

$$\begin{cases} s = -1 \\ s^2 - 2p = 13 \end{cases}$$

da cui, sostituendo $s = -1$ nella seconda, troviamo subito

$$\begin{cases} s = -1 \\ p = -6 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

$$z^2 + z - 6 = 0$$

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

$$z^2 + z - 6 = 0$$

e risolviamola;

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

$$z^2+z-6=0$$

e risolviamola; le sue soluzioni sono

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

$$z^2 + z - 6 = 0$$

e risolviamola; le sue soluzioni sono

$$z_1 = 2,\ z_2 = -3.$$

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

$$z^2 + z - 6 = 0$$

e risolviamola; le sue soluzioni sono

$$z_1 = 2,\ z_2 = -3.$$

Dunque le soluzioni del sistema di partenza sono

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

$$z^2 + z - 6 = 0$$

e risolviamola; le sue soluzioni sono

$$z_1 = 2,\ z_2 = -3.$$

Dunque le soluzioni del sistema di partenza sono

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3, \end{cases}$$

Ora ci siamo ricondotti al sistema simmetrico semplice

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente

$$z^2 + z - 6 = 0$$

e risolviamola; le sue soluzioni sono

$$z_1 = 2, \; z_2 = -3.$$

Dunque le soluzioni del sistema di partenza sono

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

La stessa tecnica si usa per risolvere sistemi simmetrici di grado più alto.

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

La stessa tecnica si usa per risolvere sistemi simmetrici di grado più alto. Vediamo un altro esempio.

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

La stessa tecnica si usa per risolvere sistemi simmetrici di grado più alto. Vediamo un altro esempio.

Esempio

Risolviamo il sistema

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

La stessa tecnica si usa per risolvere sistemi simmetrici di grado più alto. Vediamo un altro esempio.

Esempio

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

La stessa tecnica si usa per risolvere sistemi simmetrici di grado più alto. Vediamo un altro esempio.

Esempio

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Usando la formula di Waring troviamo

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

La stessa tecnica si usa per risolvere sistemi simmetrici di grado più alto. Vediamo un altro esempio.

Esempio

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Usando la formula di Waring troviamo

$$\begin{cases} s^2 - 2p = 10 \\ p = 4. \end{cases}$$

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

La stessa tecnica si usa per risolvere sistemi simmetrici di grado più alto. Vediamo un altro esempio.

Esempio

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Usando la formula di Waring troviamo

$$\begin{cases} s^2 - 2p = 10 \\ p = 4. \end{cases}$$

Sostituendo nella prima giungiamo a

$$\begin{cases} s^2 = 18 \\ p = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 = 18 \\ p = 4. \end{cases}$$

Adesso la prima equazione ha due soluzioni: $s = 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} s^2 = 18 \\ p = 4. \end{cases}$$

Adesso la prima equazione ha due soluzioni: $s = 3\sqrt{2}$ e $s = -3\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} s^2 = 18 \\ p = 4. \end{cases}$$

Adesso la prima equazione ha due soluzioni: $s = 3\sqrt{2}$ e $s = -3\sqrt{2}$.
Quindi ci sono due possibili sistemi soluzione:

$$\begin{cases} s^2 = 18 \\ p = 4. \end{cases}$$

Adesso la prima equazione ha due soluzioni: $s = 3\sqrt{2}$ e $s = -3\sqrt{2}$. Quindi ci sono due possibili sistemi soluzione:

$$\begin{cases} s = 3\sqrt{2} \\ p = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} s = -3\sqrt{2} \\ p = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 = 18 \\ p = 4. \end{cases}$$

Adesso la prima equazione ha due soluzioni: $s = 3\sqrt{2}$ e $s = -3\sqrt{2}$. Quindi ci sono due possibili sistemi soluzione:

$$\begin{cases} s = 3\sqrt{2} \\ p = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} s = -3\sqrt{2} \\ p = 4 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x + y = 3\sqrt{2} \\ xy = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -3\sqrt{2} \\ xy = 4. \end{cases}$$

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado).

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

$$z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0$$

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

$$z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = \sqrt{2},\ z_2 = 2\sqrt{2}$$

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

$$z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = \sqrt{2},\ z_2 = 2\sqrt{2}$$

e la seconda è

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

$$z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = \sqrt{2},\ z_2 = 2\sqrt{2}$$

e la seconda è

$$z^2 + 3\sqrt{2}z + 4 = 0$$

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

$$z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = \sqrt{2},\ z_2 = 2\sqrt{2}$$

e la seconda è

$$z^2 + 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = -2\sqrt{2},\ z_2 = -\sqrt{2}.$$

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

$$z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = \sqrt{2},\ z_2 = 2\sqrt{2}$$

e la seconda è

$$z^2 + 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = -2\sqrt{2},\ z_2 = -\sqrt{2}.$$

Quindi le soluzioni del sistema di partenza sono

Ora basta risolvere ciascun sistema simmetrico semplice separatamente per trovare tutte le soluzioni (che sono quattro coppie perché il sistema è di quarto grado). La prima equazione risolvente è

$$z^2 - 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = \sqrt{2},\ z_2 = 2\sqrt{2}$$

e la seconda è

$$z^2 + 3\sqrt{2}z + 4 = 0 \qquad \text{che ha soluzioni} \quad z_1 = -2\sqrt{2},\ z_2 = -\sqrt{2}.$$

Quindi le soluzioni del sistema di partenza sono

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Sistemi riconducibili a sistemi simmetrici

Certi sistemi sono riconducibili, più o meno facilmente, a sistemi simmetrici, anche se essi non sono simmetrici.

Sistemi riconducibili a sistemi simmetrici

Certi sistemi sono riconducibili, più o meno facilmente, a sistemi simmetrici, anche se essi non sono simmetrici. Vediamo un esempio.

Sistemi riconducibili a sistemi simmetrici

Certi sistemi sono riconducibili, più o meno facilmente, a sistemi simmetrici, anche se essi non sono simmetrici. Vediamo un esempio. Risolviamo il sistema

Sistemi riconducibili a sistemi simmetrici

Certi sistemi sono riconducibili, più o meno facilmente, a sistemi simmetrici, anche se essi non sono simmetrici. Vediamo un esempio. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2 y = 4. \end{cases}$$

Sistemi riconducibili a sistemi simmetrici

Certi sistemi sono riconducibili, più o meno facilmente, a sistemi simmetrici, anche se essi non sono simmetrici. Vediamo un esempio. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2 y = 4. \end{cases}$$

Ponendo $x^2 = u$, il sistema si trasforma in

Sistemi riconducibili a sistemi simmetrici

Certi sistemi sono riconducibili, più o meno facilmente, a sistemi simmetrici, anche se essi non sono simmetrici. Vediamo un esempio. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2 y = 4. \end{cases}$$

Ponendo $x^2 = u$, il sistema si trasforma in

$$\begin{cases} u + y = 5 \\ uy = 4. \end{cases}$$

Questo sistema è simmetrico.

Questo sistema è simmetrico. Risolvendolo con i metodi appena visti troviamo le soluzioni

Questo sistema è simmetrico. Risolvendo lo con i metodi appena visti troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} u = 4 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Questo sistema è simmetrico. Risolvendo con i metodi appena visti troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} u = 4 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Pertanto, siccome $x^2 = u$, troviamo le quattro coppie di soluzioni

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 4. \end{cases}$$

TEORIA APPROFONDITA

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado)

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

$$(t - a)(t - b)(t - c) = 0.$$

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

$$(t-a)(t-b)(t-c)=0.$$

Se sviluppiamo i calcoli, l'equazione diviene

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

$$(t-a)(t-b)(t-c)=0.$$

Se sviluppiamo i calcoli, l'equazione diviene

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ac)t-abc=0.$$

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

$$(t-a)(t-b)(t-c)=0.$$

Se sviluppiamo i calcoli, l'equazione diviene

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ac)t-abc=0.$$

Confrontiamo questa equazione con l'equazione nella forma originaria

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

$$(t-a)(t-b)(t-c)=0.$$

Se sviluppiamo i calcoli, l'equazione diviene

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ac)t-abc=0.$$

Confrontiamo questa equazione con l'equazione nella forma originaria

$$t^3-st^2+qt-p=0$$

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

$$(t-a)(t-b)(t-c)=0.$$

Se sviluppiamo i calcoli, l'equazione diviene

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ac)t-abc=0.$$

Confrontiamo questa equazione con l'equazione nella forma originaria

$$t^3-st^2+qt-p=0$$

e troviamo subito, confrontando i coefficienti

Espressioni simmetriche elementari

Supponiamo di avere un'equazione di grado n nella variabile t (per semplificare il discorso, supponiamo che sia di terzo grado) che ammetta (sempre per semplificare) tutte soluzioni *reali*.
Per il teorema di Ruffini, l'equazione si può scrivere

$$(t-a)(t-b)(t-c)=0.$$

Se sviluppiamo i calcoli, l'equazione diviene

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ac)t-abc=0.$$

Confrontiamo questa equazione con l'equazione nella forma originaria

$$t^3-st^2+qt-p=0$$

e troviamo subito, confrontando i coefficienti

$$a+b+c=s, \qquad ab+bc+ac=q, \qquad abc=p.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

risolvono il sistema

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = s \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = p. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = s \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = p. \end{cases}$$

Definizione

Chiamiamo *espressione simmetrica elementare* in n variabili un'espressione catalogabile in uno dei seguenti tipi:

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = s \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = p. \end{cases}$$

Definizione

Chiamiamo *espressione simmetrica elementare* in n variabili un'espressione catalogabile in uno dei seguenti tipi:

- la somma delle variabili;

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = s \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = p. \end{cases}$$

Definizione

Chiamiamo *espressione simmetrica elementare* in n variabili un'espressione catalogabile in uno dei seguenti tipi:

- la somma delle variabili;
- la somma dei prodotti delle variabili a due a due;

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = s \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = p. \end{cases}$$

Definizione

Chiamiamo *espressione simmetrica elementare* in n variabili un'espressione catalogabile in uno dei seguenti tipi:

- la somma delle variabili;
- la somma dei prodotti delle variabili a due a due;
- la somma dei prodotti delle variabili a tre a tre;

Quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$t^3 - st^2 + qt - p = 0$$

risolvono il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = s \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = p. \end{cases}$$

Definizione

Chiamiamo *espressione simmetrica elementare* in n variabili un'espressione catalogabile in uno dei seguenti tipi:

- la somma delle variabili;
- la somma dei prodotti delle variabili a due a due;
- la somma dei prodotti delle variabili a tre a tre;
- ecc.
- il prodotto di tutte le variabili.

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici)

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici) e l'equazione risolvente è l'equazione avente le espressioni elementari, prese con segno alternato.

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici) e l'equazione risolvente è l'equazione avente le espressioni elementari, prese con segno alternato. Per esempio, per risolvere il sistema

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici) e l'equazione risolvente è l'equazione avente le espressioni elementari, prese con segno alternato. Per esempio, per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + xz = 11 \\ xyz = 6. \end{cases}$$

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici) e l'equazione risolvente è l'equazione avente le espressioni elementari, prese con segno alternato. Per esempio, per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=11 \\ xyz=6. \end{cases}$$

si scrive l'equazione risolvente

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici) e l'equazione risolvente è l'equazione avente le espressioni elementari, prese con segno alternato. Per esempio, per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + xz = 11 \\ xyz = 6. \end{cases}$$

si scrive l'equazione risolvente

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici) e l'equazione risolvente è l'equazione avente le espressioni elementari, prese con segno alternato. Per esempio, per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=11 \\ xyz=6. \end{cases}$$

si scrive l'equazione risolvente

$$t^3-6t^2+11t-6=0$$

e si cerca di risolvere.

Quindi il corrispondente di un sistema semplice di secondo grado è un sistema con le espressioni simmetriche elementari (questo spiega perché somma e prodotto generano i sistemi semplici) e l'equazione risolvente è l'equazione avente le espressioni elementari, prese con segno alternato. Per esempio, per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=11 \\ xyz=6. \end{cases}$$

si scrive l'equazione risolvente

$$t^3-6t^2+11t-6=0$$

e si cerca di risolvere. Tentando la soluzione $t=1$ si vede che funziona, e scomponendo con la regola di Ruffini si vede che le tre soluzioni sono $t_1=1, t_2=2, t_3=3$.

A questo punto, le espressioni simmetriche elementari sono simmetriche rispetto ad *ogni* scambio di due variabili.

A questo punto, le espressioni simmetriche elementari sono simmetriche rispetto ad *ogni* scambio di due variabili. Ma quanti sono i possibili scambi?

A questo punto, le espressioni simmetriche elementari sono simmetriche rispetto ad *ogni* scambio di due variabili. Ma quanti sono i possibili scambi? Se ci pensiamo un attimo, in tutto sono sei:

A questo punto, le espressioni simmetriche elementari sono simmetriche rispetto ad *ogni* scambio di due variabili. Ma quanti sono i possibili scambi? Se ci pensiamo un attimo, in tutto sono sei:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1. \end{cases}$$

A questo punto, le espressioni simmetriche elementari sono simmetriche rispetto ad *ogni* scambio di due variabili. Ma quanti sono i possibili scambi? Se ci pensiamo un attimo, in tutto sono sei:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1. \end{cases}$$

Il sistema infatti non cambia se si applica una trasformazione delle lettere x, y, z corrispondente al gruppo simmetrico S_3, che ha appunto sei elementi (v. la lezione *Introduzione all'algebra astratta*).

Il corrispondente del teorema visto prima è che *un polinomio simmetrico in n variabili è sempre anche un polinomio, dello stesso grado, nelle espressioni simmetriche elementari.*

Il corrispondente del teorema visto prima è che *un polinomio simmetrico in n variabili è sempre anche un polinomio, dello stesso grado, nelle espressioni simmetriche elementari.*
In questo modo sarebbe possibile ricondurre ogni sistema simmetrico in n variabili a un sistema simmetrico "semplice", cioè contenente solo le espressioni simmetriche elementari.

Il corrispondente del teorema visto prima è che *un polinomio simmetrico in n variabili è sempre anche un polinomio, dello stesso grado, nelle espressioni simmetriche elementari.*
In questo modo sarebbe possibile ricondurre ogni sistema simmetrico in n variabili a un sistema simmetrico "semplice", cioè contenente solo le espressioni simmetriche elementari. Ma ciò ci porterebbe troppo lontano e ci fermiamo qui.

Il corrispondente del teorema visto prima è che *un polinomio simmetrico in n variabili è sempre anche un polinomio, dello stesso grado, nelle espressioni simmetriche elementari.*
In questo modo sarebbe possibile ricondurre ogni sistema simmetrico in n variabili a un sistema simmetrico "semplice", cioè contenente solo le espressioni simmetriche elementari. Ma ciò ci porterebbe troppo lontano e ci fermiamo qui. Vediamo, come promesso, la dimostrazione del teorema sui polinomi simmetrici in due variabili.

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Dimostrazione. Siccome l'espressione è un polinomio in due variabili, prendiamo uno qualsiasi dei suoi monomi, per esempio $4x^6y^2$.

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Dimostrazione. Siccome l'espressione è un polinomio in due variabili, prendiamo uno qualsiasi dei suoi monomi, per esempio $4x^6y^2$. Siccome scambiando x e y si deve ottenere lo stesso polinomio, deve essere presente anche un monomio $4y^6x^2$.

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Dimostrazione. Siccome l'espressione è un polinomio in due variabili, prendiamo uno qualsiasi dei suoi monomi, per esempio $4x^6y^2$. Siccome scambiando x e y si deve ottenere lo stesso polinomio, deve essere presente anche un monomio $4y^6x^2$. Pertanto è possibile raccogliere e trovare

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Dimostrazione. Siccome l'espressione è un polinomio in due variabili, prendiamo uno qualsiasi dei suoi monomi, per esempio $4x^6y^2$. Siccome scambiando x e y si deve ottenere lo stesso polinomio, deve essere presente anche un monomio $4y^6x^2$. Pertanto è possibile raccogliere e trovare

$$4x^6y^2 + 4x^2y^6 = 4x^2y^2(x^4 + y^4).$$

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Dimostrazione. Siccome l'espressione è un polinomio in due variabili, prendiamo uno qualsiasi dei suoi monomi, per esempio $4x^6y^2$. Siccome scambiando x e y si deve ottenere lo stesso polinomio, deve essere presente anche un monomio $4y^6x^2$. Pertanto è possibile raccogliere e trovare

$$4x^6y^2 + 4x^2y^6 = 4x^2y^2(x^4 + y^4).$$

Siccome x^2y^2 è il quadrato del prodotto, basta vedere che $x^4 + y^4$ si esprime come polinomio nella somma e nel prodotto.

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Dimostrazione. Siccome l'espressione è un polinomio in due variabili, prendiamo uno qualsiasi dei suoi monomi, per esempio $4x^6y^2$. Siccome scambiando x e y si deve ottenere lo stesso polinomio, deve essere presente anche un monomio $4y^6x^2$. Pertanto è possibile raccogliere e trovare

$$4x^6y^2 + 4x^2y^6 = 4x^2y^2(x^4 + y^4).$$

Siccome x^2y^2 è il quadrato del prodotto, basta vedere che $x^4 + y^4$ si esprime come polinomio nella somma e nel prodotto.
Consideriamo allora $(x + y)^4$.

Teorema

Un polinomio simmetrico in x, y è esprimibile come un polinomio (diverso) dello stesso grado in $s = x + y$ e $p = xy$.

Dimostrazione. Siccome l'espressione è un polinomio in due variabili, prendiamo uno qualsiasi dei suoi monomi, per esempio $4x^6y^2$. Siccome scambiando x e y si deve ottenere lo stesso polinomio, deve essere presente anche un monomio $4y^6x^2$. Pertanto è possibile raccogliere e trovare

$$4x^6y^2 + 4x^2y^6 = 4x^2y^2(x^4 + y^4).$$

Siccome x^2y^2 è il quadrato del prodotto, basta vedere che $x^4 + y^4$ si esprime come polinomio nella somma e nel prodotto.
Consideriamo allora $(x + y)^4$. Dalla regola del triangolo di Tartaglia ci ricordiamo che

$$(x+y)^4 =$$

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 =$$

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x + y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x + y$,

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto,

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4 e infine il termine $4xy(x^2+y^2)$.

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4 e infine il termine $4xy(x^2+y^2)$.
Siccome xy è ancora il prodotto, resta da valutare x^2+y^2 che sappiamo essere $(x+y)^2-2xy$ e tutto è espresso come somma e prodotto.

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4 e infine il termine $4xy(x^2+y^2)$.
Siccome xy è ancora il prodotto, resta da valutare x^2+y^2 che sappiamo essere $(x+y)^2-2xy$ e tutto è espresso come somma e prodotto.
Nel caso generale, la cosa è solo più complessa:

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4 e infine il termine $4xy(x^2+y^2)$.
Siccome xy è ancora il prodotto, resta da valutare x^2+y^2 che sappiamo essere $(x+y)^2-2xy$ e tutto è espresso come somma e prodotto.
Nel caso generale, la cosa è solo più complessa: ci si riconduce dapprima alle sole espressioni del tipo x^m+y^m e a prodotti,

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4 e infine il termine $4xy(x^2+y^2)$.
Siccome xy è ancora il prodotto, resta da valutare x^2+y^2 che sappiamo essere $(x+y)^2-2xy$ e tutto è espresso come somma e prodotto.
Nel caso generale, la cosa è solo più complessa: ci si riconduce dapprima alle sole espressioni del tipo x^m+y^m e a prodotti, poi usando lo sviluppo del binomio ci si riconduce ad espressioni dello *stesso tipo* ma con degli esponenti *m più bassi* (nell'esempio da $m=4$ siamo passati a $m=2$) e altri prodotti;

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4 e infine il termine $4xy(x^2+y^2)$.
Siccome xy è ancora il prodotto, resta da valutare x^2+y^2 che sappiamo essere $(x+y)^2-2xy$ e tutto è espresso come somma e prodotto.
Nel caso generale, la cosa è solo più complessa: ci si riconduce dapprima alle sole espressioni del tipo x^m+y^m e a prodotti, poi usando lo sviluppo del binomio ci si riconduce ad espressioni dello *stesso tipo* ma con degli esponenti *m più bassi* (nell'esempio da $m=4$ siamo passati a $m=2$) e altri prodotti; poi si continua così fino a ricondursi a $x+y$ o x^2+y^2, che sappiamo trattare.

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2.$$

In questa espressione, $(x+y)^4$ è ovviamente espresso per mezzo della somma $x+y$, poi $6x^2y^2$ è 6 volte il quadrato del prodotto, poi c'è l'espressione cercata x^4+y^4 e infine il termine $4xy(x^2+y^2)$.
Siccome xy è ancora il prodotto, resta da valutare x^2+y^2 che sappiamo essere $(x+y)^2-2xy$ e tutto è espresso come somma e prodotto.
Nel caso generale, la cosa è solo più complessa: ci si riconduce dapprima alle sole espressioni del tipo x^m+y^m e a prodotti, poi usando lo sviluppo del binomio ci si riconduce ad espressioni dello *stesso tipo* ma con degli esponenti *m più bassi* (nell'esempio da $m=4$ siamo passati a $m=2$) e altri prodotti; poi si continua così fino a ricondursi a $x+y$ o x^2+y^2, che sappiamo trattare. (Incidentalmente, queste sono le *vere* formule di Waring).

Per esempio,

Per esempio,

$$
\begin{aligned}
&x + y = s \\
&x^2 + y^2 = s^2 - 2p \\
&x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = s^3 - 3sp \\
&x^4 + y^4 = s^4 - 4sp(x^2+y^2) - 6p^2 = s^4 - 4sp(\underbrace{s^2 - 2sp}_{x^2+y^2}) - 6p^2 \\
&x^5 + y^5 = s^5 - 5p(x^3+y^3) - 10p^2(x+y) = s^5 - 5p(\underbrace{s^3 - 3sp}_{x^3+y^3}) - 10sp^2
\end{aligned}
$$

ecc.

Questo mostra che tutto è riconducibile a un polinomio in s e p, e che i termini del tipo $x^m + y^m$ sono di grado esattamente m nella variabile s.

Questo mostra che tutto è riconducibile a un polinomio in s e p, e che i termini del tipo $x^m + y^m$ sono di grado esattamente m nella variabile s. Siccome nel polinomio di partenza ci sono i termini contenenti solo x e y, questi danno origine a un termine in $x^n + y^n$ che genera a sua volta un polinomio di grado n nella somma s.

Questo mostra che tutto è riconducibile a un polinomio in s e p, e che i termini del tipo $x^m + y^m$ sono di grado esattamente m nella variabile s.
Siccome nel polinomio di partenza ci sono i termini contenenti solo x e y, questi danno origine a un termine in $x^n + y^n$ che genera a sua volta un polinomio di grado n nella somma s.
Resta quindi da vedere che il grado degli altri termini non supera n.

Questo mostra che tutto è riconducibile a un polinomio in s e p, e che i termini del tipo $x^m + y^m$ sono di grado esattamente m nella variabile s.
Siccome nel polinomio di partenza ci sono i termini contenenti solo x e y, questi danno origine a un termine in $x^n + y^n$ che genera a sua volta un polinomio di grado n nella somma s.
Resta quindi da vedere che il grado degli altri termini non supera n.
Però ciò non accade perché in ogni altro termine, dove compare un prodotto, il grado di xy è 2, mentre il grado di p è uno, per cui il grado complessivo degli altri termini si abbassa.

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4 + y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4 - 4sp(s^2 - 2sp) - 6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p.

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4 + y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4 - 4sp(s^2 - 2sp) - 6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini $x^8 + y^8$ generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione.

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione. Nel caso di più variabili, l'idea è simile ma molto più intricata. Per esempio, fra i termini simmetrici di sesto grado in x, y, z vi sono

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione. Nel caso di più variabili, l'idea è simile ma molto più intricata. Per esempio, fra i termini simmetrici di sesto grado in x, y, z vi sono

$$x^3y^2z+y^3x^2z+z^3xy^2+x^3z^2y+z^3y^2x+z^3x^2y =$$
$$xyz(x^2y+y^2x+x^2z+z^2y+z^2y+z^2x)$$

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione. Nel caso di più variabili, l'idea è simile ma molto più intricata. Per esempio, fra i termini simmetrici di sesto grado in x, y, z vi sono

$$x^3y^2z + y^3x^2z + z^3xy^2 + x^3z^2y + z^3y^2x + z^3x^2y =$$
$$xyz(x^2y + y^2x + x^2z + z^2y + z^2y + z^2x)$$

che è pari, dopo lunghi conti, a

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione. Nel caso di più variabili, l'idea è simile ma molto più intricata. Per esempio, fra i termini simmetrici di sesto grado in x, y, z vi sono

$$x^3y^2z+y^3x^2z+z^3xy^2+x^3z^2y+z^3y^2x+z^3x^2y =$$
$$xyz(x^2y+y^2x+x^2z+z^2y+z^2y+z^2x)$$

che è pari, dopo lunghi conti, a

$$xyz[(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz] = p(sq-3p)$$

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione. Nel caso di più variabili, l'idea è simile ma molto più intricata. Per esempio, fra i termini simmetrici di sesto grado in x, y, z vi sono

$$x^3y^2z + y^3x^2z + z^3xy^2 + x^3z^2y + z^3y^2x + z^3x^2y =$$
$$xyz(x^2y + y^2x + x^2z + z^2y + z^2y + z^2x)$$

che è pari, dopo lunghi conti, a

$$xyz[(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz] = p(sq-3p)$$

che è un'espressione contenente solo le funzioni simmetriche elementari.

Per esempio. il grado di $4x^2y^2(x^4+y^4)$, di ottavo grado, genera un termine $4p^2(s^4-4sp(s^2-2sp)-6p^2)$ che è di *sesto* grado in s, p. Solo i termini x^8+y^8 generano un polinomio di ottavo grado in s.
Questo completa la dimostrazione. ■

Osservazione. Nel caso di più variabili, l'idea è simile ma molto più intricata. Per esempio, fra i termini simmetrici di sesto grado in x, y, z vi sono

$$x^3y^2z+y^3x^2z+z^3xy^2+x^3z^2y+z^3y^2x+z^3x^2y =$$
$$xyz(x^2y+y^2x+x^2z+z^2y+z^2y+z^2x)$$

che è pari, dopo lunghi conti, a

$$xyz[(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz] = p(sq-3p)$$

che è un'espressione contenente solo le funzioni simmetriche elementari. Anche qui resteranno quindi espressioni come $x^6+y^6+z^6$, ma non sono le uniche, il che complica ulteriormente la situazione.