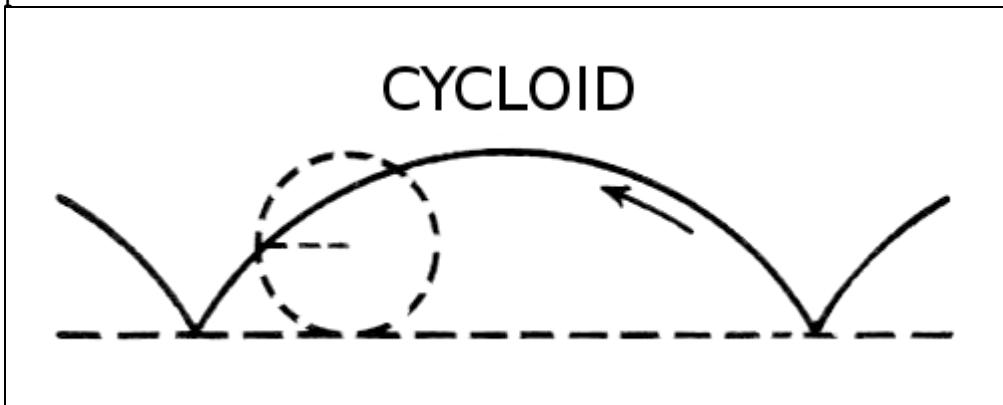


SISTEMI DI RIFERIMENTO

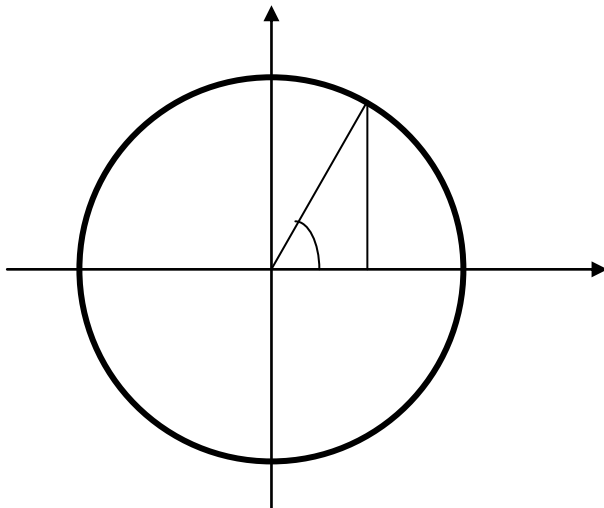
Ledo Stefanini

1. LA RUOTA DELLA BICICLETTA

Nello studio di un moto scegliamo istintivamente il sistema di riferimento rispetto al quale tale moto è più semplice da descrivere. Per esempio, se chiediamo a chiunque quale sia la traiettoria descritta da un punto del bordo della ruota di una bicicletta che corre sulla strada, risponderà che è una circonferenza. E' facile rendersi conto che la risposta è sbagliata. O meglio che la domanda era imprecisa: sarebbe stato necessario specificare il sistema al quale riferire il moto del punto. Se tale sistema è una coppia di assi cartesiani, uno orizzontale e uno verticale, con l'origine solidale con il mozzo della ruota, la risposta sarebbe corretta. Se, invece, il sistema di riferimento è solidale con la strada, la traiettoria è ben diversa dall'essere circolare. Ha l'andamento indicato nella figura, che prende il nome di *cicloide*.



Possiamo facilmente ricavare la sua equazione nel modo seguente.
Mettiamoci dapprima nel sistema di riferimento del mozzo della ruota.



In questo sistema la traiettoria è una circonferenza di raggio R e le equazioni cartesiane saranno

$$x = R \cos \omega t$$

$$y = R \sin \omega t \quad 1$$

dove ω indica la velocità angolare e t il tempo. ωt è l'ampiezza dell'angolo indicato in figura. Se spostiamo l'origine nella posizione in cui la ruota tocca il terreno, le equazioni mutano di poco:

$$x = R \cos \omega t$$

$$y = R \sin \omega t + R \quad 2$$

Ammettiamo ora che il centro della circonferenza si sposti con velocità

$$v = \omega R \quad 3$$

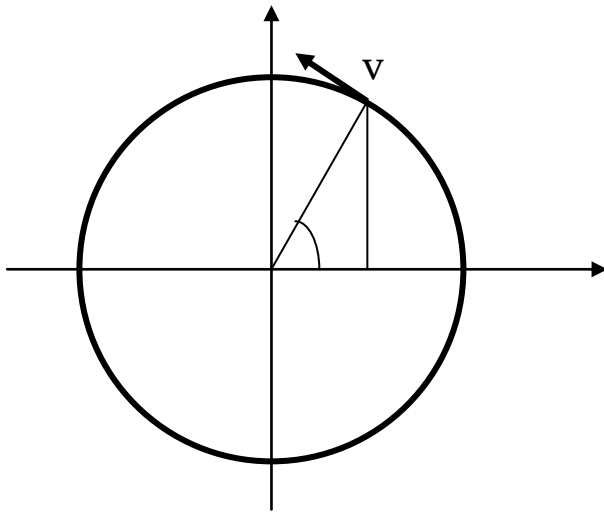
L'ordinata non subisce mutamenti in conseguenza di questo moto; mentre all'ascissa si aggiunge il termine $vt = \omega R t$. In conclusione, le equazioni della traiettoria diventano

$$x = R \cos \omega t + \omega R t$$

$$y = R \sin \omega t + R \quad 4$$

che rappresentano una *cicloide*.

In modo analogo avremmo potuto ricavare le equazioni della velocità.



Nel riferimento del perno sono

$$v_x = -\omega R \sin \omega t$$

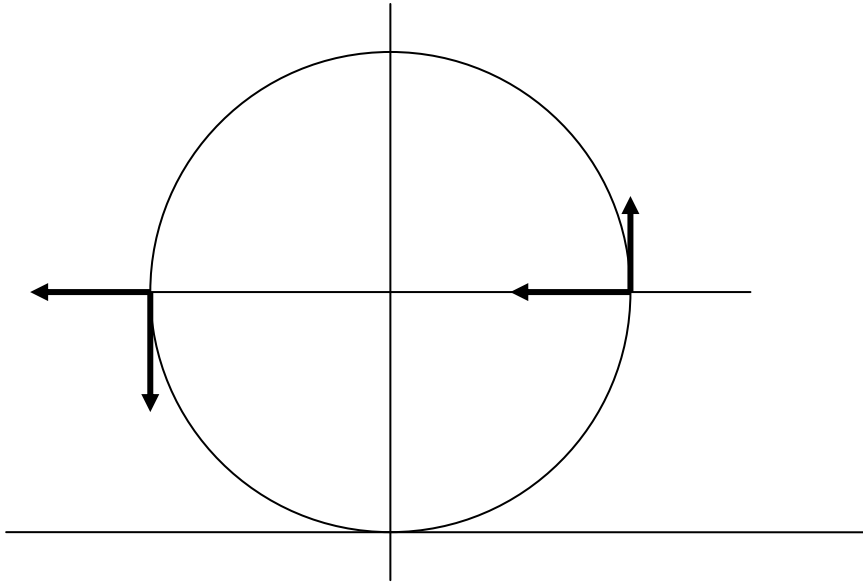
$$v_y = \omega R \cos \omega t \quad 5$$

Per ricavare le equazioni nel riferimento solidale con la strada basta sommare alla componente orizzontale la velocità del mozzo che è ωR . Con ciò si arriva a

$$v_x = -\omega R \sin \omega t - \omega R$$

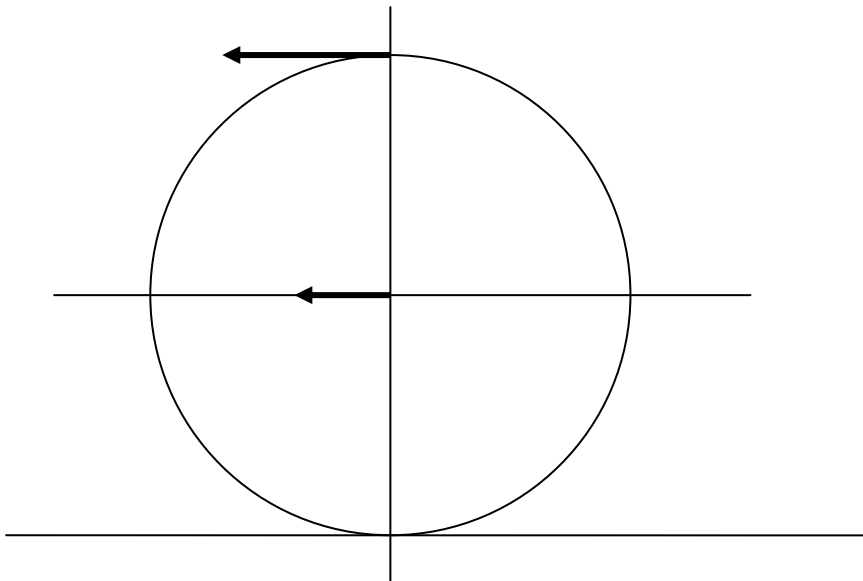
$$v_y = \omega R \cos \omega t \quad 6$$

Per $\omega t = 0$, la componente verticale della velocità ha il valore massimo ωR , rivolta verso l'alto, e la componente orizzontale ha lo stesso valore. Significa che per i due punti della ruota che sono alla stessa altezza del mozzo, la velocità è diretta a 45° rispetto alla strada e vale $\omega R\sqrt{2}$



Per $\omega t = \frac{\pi}{2}$ la componente verticale si annulla e quella orizzontale prende il valore $-2\omega R$. Il punto più in alto della ruota ha una velocità doppia rispetto al mozzo.

Per $\omega t = 3\frac{\pi}{2}$ si annullano sia la componente verticale che quella orizzontale: il punto della ruota a contatto col pavimento, com'è ovvio, è fermo.



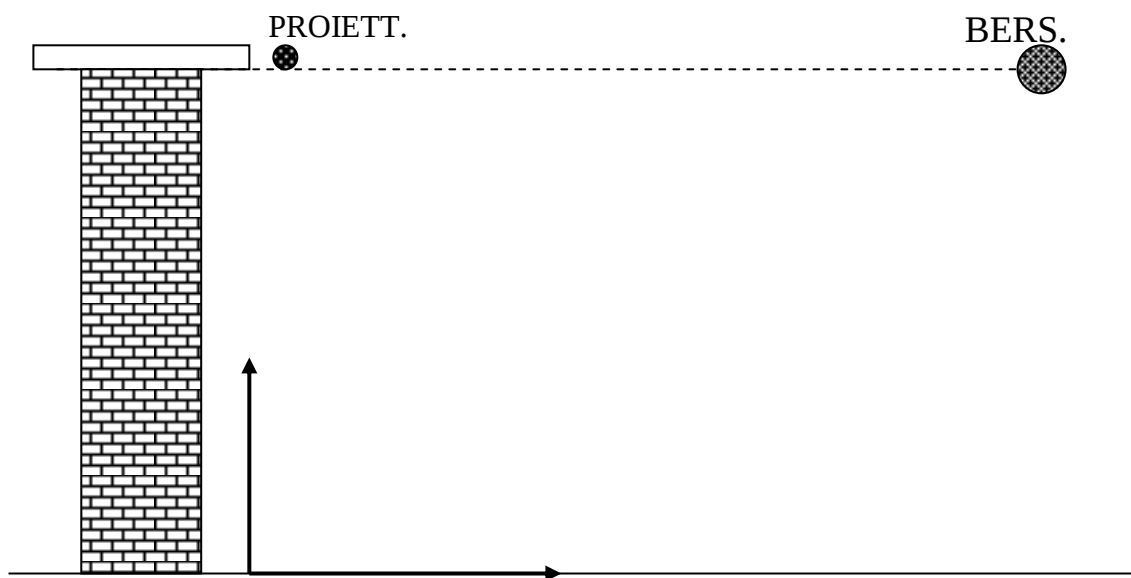
Pertanto, nel sistema di riferimento della strada, ogni punto del bordo della ruota passa dalla velocità nulla (quando è a contatto con la strada) alla velocità massima (il doppio della velocità della bicicletta) e poi diminuisce fino ad annullarsi di nuovo. La sua velocità cambia continuamente di intensità e anche di direzione. Quindi è soggetto ad un'accelerazione. Le caratteristiche di quest'accelerazione si determinano facilmente.

Torniamo ancora al riferimento ancorato al mozzo. Il punto della ruota descrive una circonferenza con velocità angolare costante e quindi è soggetto ad un'accelerazione diretta verso il centro di intensità $\omega^2 R$. Nel passaggio da questo riferimento ad un altro in moto uniforme rispetto a questo,

l'accelerazione non subisce variazioni. Conserva quindi il valore detto ed è, in ogni punto, diretta verso il mozzo della ruota.

2. LA SCIMMIA E IL CACCIATORE

Si tratta di un classico problema di cinematica. Poniamo di disporre di una cerbottana, ovvero di un pezzo di tubo rettilineo, mediante il quale possiamo sparare proiettili con diverse velocità. Mettiamo di trovarci su una torre e di mirare ad un bersaglio che si trova esattamente alla nostra altezza. Con la parola “mirare” intendiamo che la direzione della cerbottana è esattamente quella del bersaglio.



Il bersaglio, tuttavia, ha una particolarità: nell'istante in cui la palla esce dalla canna, si lascia cadere. La domanda è: il proiettile colpirà il bersaglio o lo mancherà? O lo colpirà solo per particolari valori della velocità di sparo?

La trattazione classica del problema è la seguente. Posto zero l'istante in cui il proiettile esce dalla canna, in un riferimento ancorato al terreno, le equazioni del moto del bersaglio sono

$$x_B = D$$

$$y_B = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad 7$$

dove D è la distanza tra l'arma e il bersaglio ed H l'altezza.

Le equazioni che descrivono il moto del proiettile sono invece

$$x_P = vt$$

$$y_P = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad 8$$

dove v è la velocità di lancio. La traiettoria descritta dalla palla è una parabola. Le equazioni mettono in evidenza che il bersaglio e il proiettile rimangono sempre a quote uguali. Il proiettile raggiunge la distanza D dopo un tempo

$$t = \frac{D}{v} \quad 9$$

In quell'istante il proiettile e il bersaglio si trovano alla quota

$$y = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{D}{v}\right)^2 \quad 10$$

dove, qualunque sia la velocità di lancio, si incontrano.

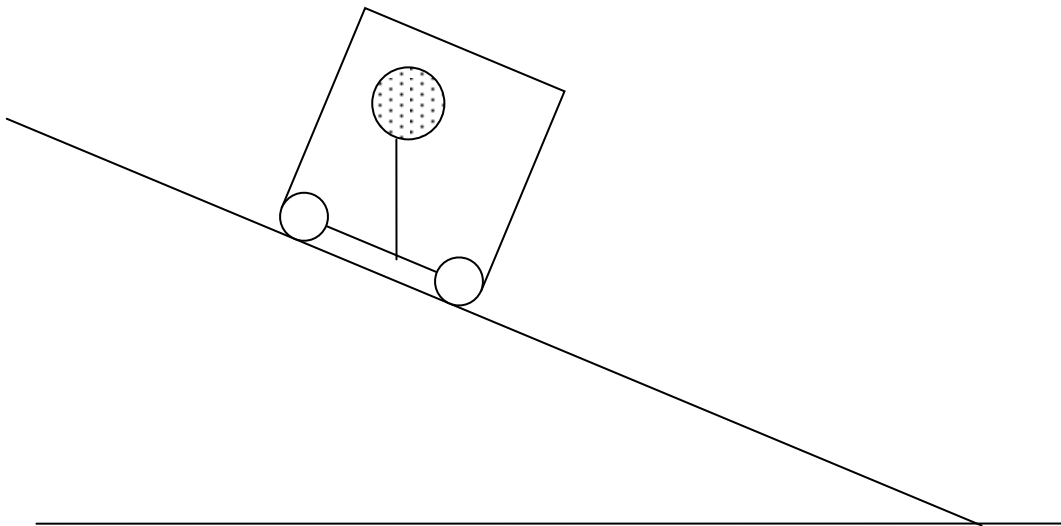
Molto più rapido e fecondo è risolvere il problema mettendosi nel sistema di riferimento che cade liberamente insieme alla palla e al bersaglio.

In questo sistema di riferimento il campo gravitazionale scompare: si tratta di un sistema inerziale, nel quale le traiettorie dei corpi sono sempre rettilinee. Ciò che osserva l'osservatore nel sistema in caduta è il bersaglio immobile e il proiettile che si muove di moto rettilineo uniforme, diretto verso il bersaglio. L'urto avviene dopo un tempo dato dalla (9), indipendentemente dalla velocità con cui il proiettile percorre la distanza che lo separa dal bersaglio.

Nulla cambia anche se la cerbottana è a terra e il bersaglio in alto. In sistema di riferimento in caduta libera, il bersaglio è immobile e il proiettile si muove di moto rettilineo uniforme verso di lui.

3. DISCESA LIBERA

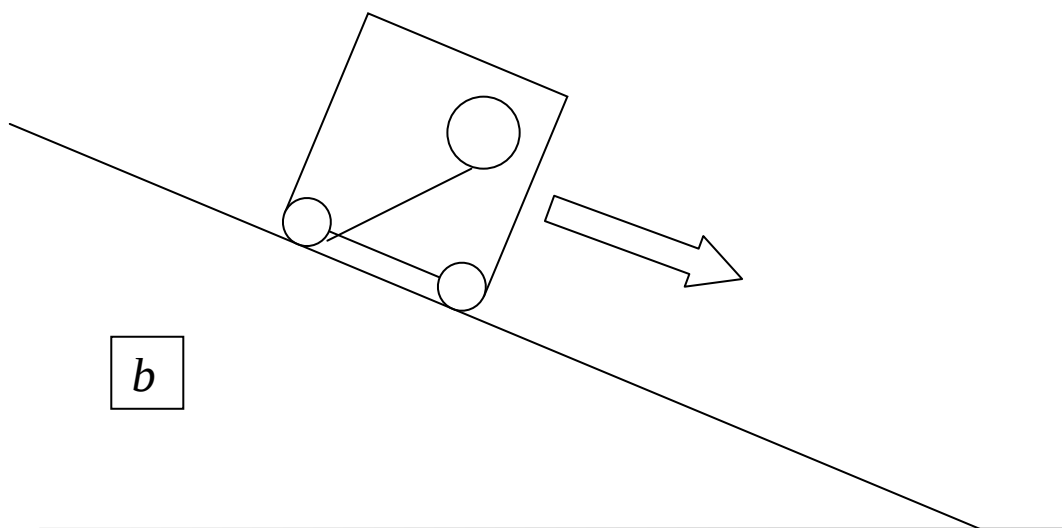
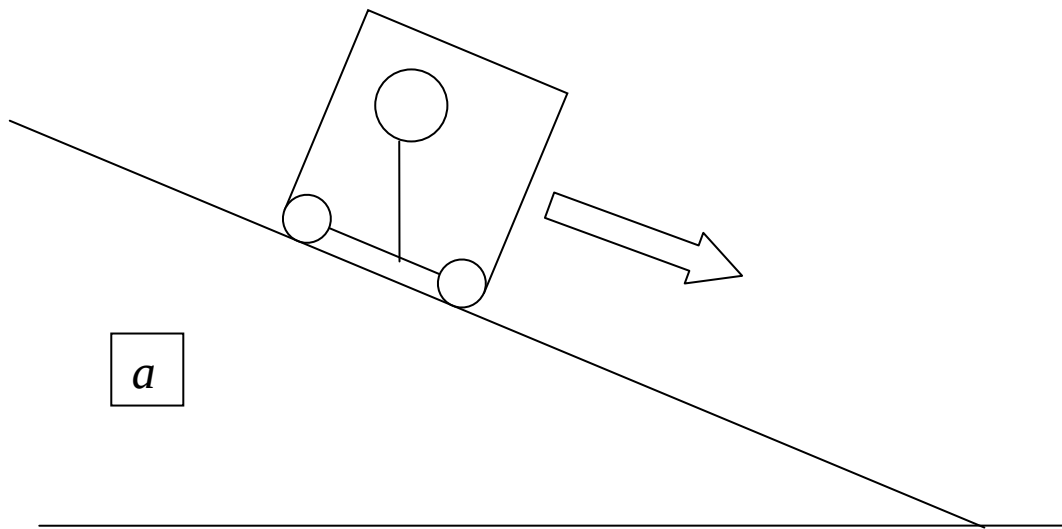
La figura rappresenta un carrello che scende senza frenare lungo un pendio che forma un angolo α rispetto all'orizzontale.

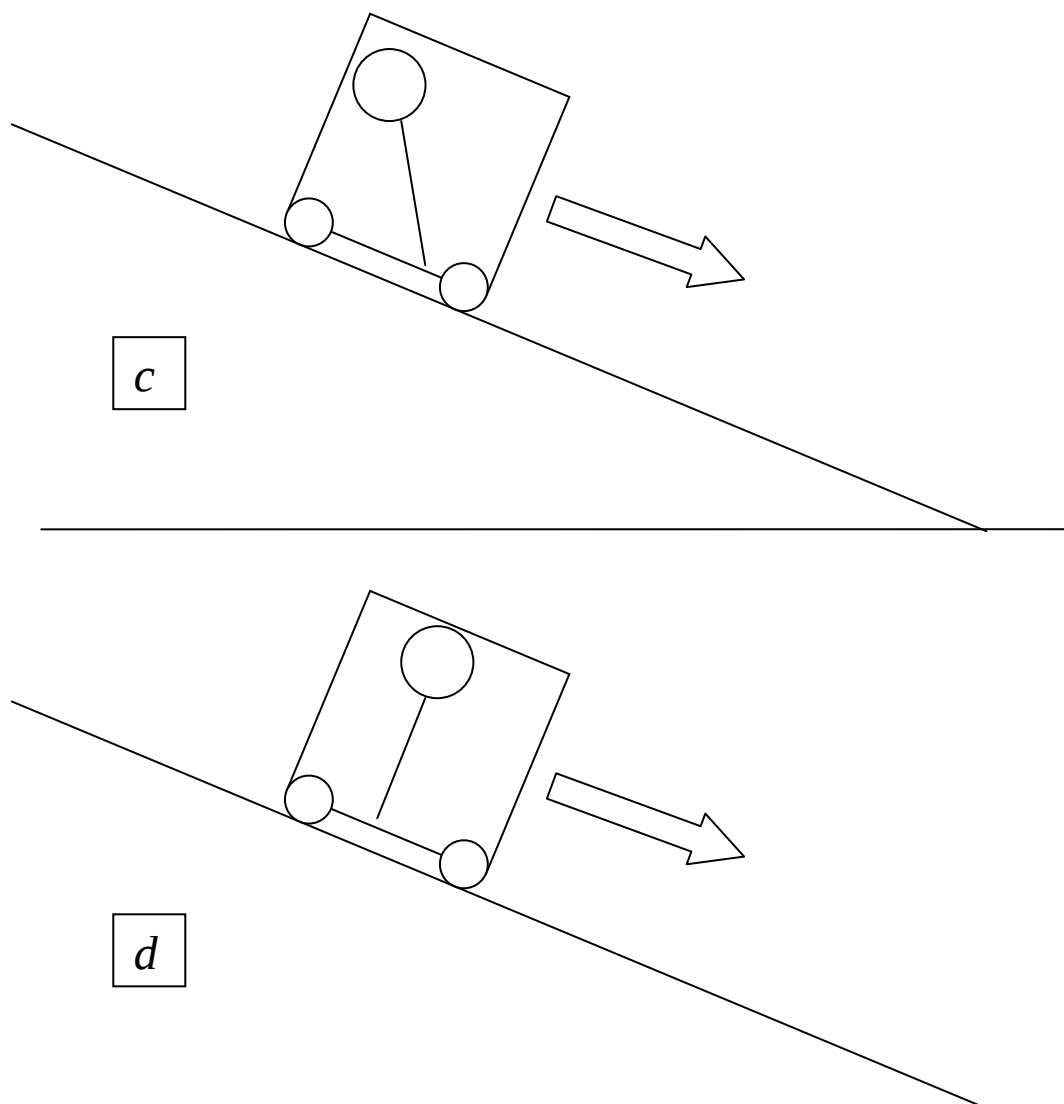


In realtà il carrello è una cabina chiusa al cui interno si trova un palloncino legato al pavimento mediante uno spago. Naturalmente, prima della partenza, la direzione dello spago è verticale.

Come sarà disposto lo spago quando il carrello scende senza frenare lungo il piano?

Le situazioni che possiamo ipotizzare sono:





Delle due componenti del campo gravitazionale (quella perpendicolare al piano e quella parallela) solo quest'ultima viene cancellata nel sistema di riferimento del carrello che scende liberamente. La componente normale al piano, di intensità

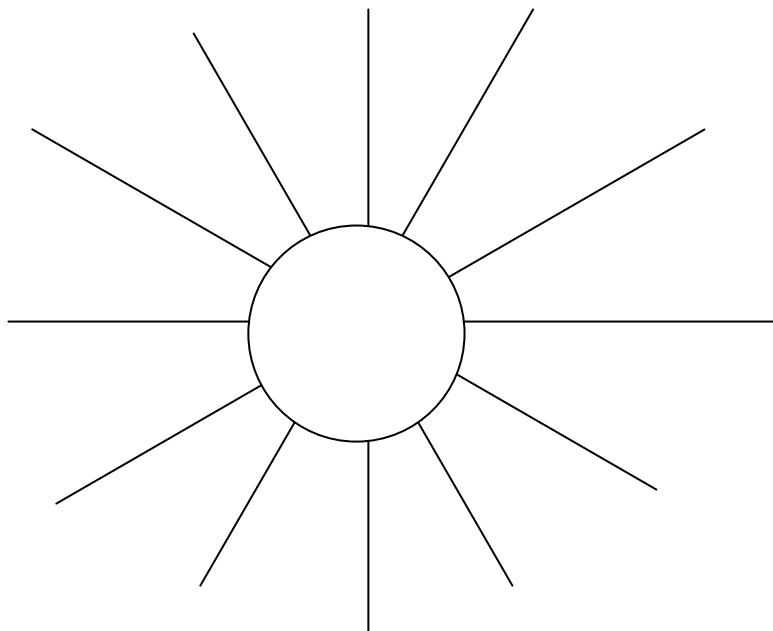
$$g_{\perp} = g \cos \alpha \quad 11$$

continua ad agire. Pertanto, all'interno del carrello, risulta percepibile un campo gravitazionale diretto perpendicolarmente al piano, la cui intensità è data dalla (11).

La conseguenza è che, per l'osservatore all'interno del carrello, la verticale è la perpendicolare al piano. La posizione assunta dallo spago che trattiene il palloncino è la (d).

4. QUANT'E' GRANDE UN SISTEMA INERZIALE?

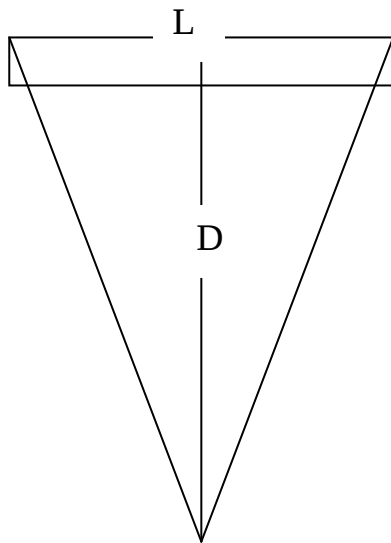
Consideriamo una navicella in caduta libera verso la Terra. Si suole dire che questo realizza un sistema perfettamente inerziale, perché il campo gravitazionale ne risulta eliminato; ma non è del tutto vero.



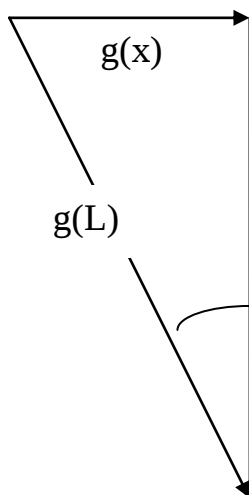
Ciò è dovuto a due fatti: che le linee del campo gravitazionale non sono parallele, ma concorrono verso il centro della Terra, l'intensità del campo aumenta con l'inverso del quadrato della distanza dal centro della Terra. Come dire

$$g_D = g_0 \left(\frac{R}{D} \right)^2 \quad 12$$

dove D indica la distanza dal centro della Terra, R in raggio terrestre, g(D) l'intensità del campo a distanza D dal centro e g₀ l'intensità del campo sulla superficie della Terra. Consideriamo un laboratorio di lunghezza L in caduta libera verso la Terra.



La caduta libera, nel sistema del laboratorio, elide la componente verticale del campo; ma non quella orizzontale. $g(x)$, dove x indica la distanza dal centro del laboratorio.



Sarà

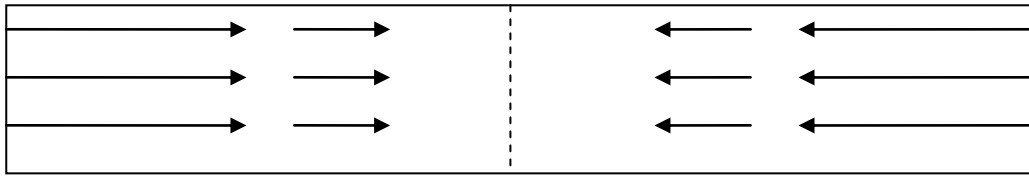
$$g_x = g_L \frac{x}{D} \quad 13$$

e quindi

$$g_x = g_0 \frac{R^2}{D^2} \frac{x}{D} \quad 14$$

I fisici che si trovano nel laboratorio sperimentano quindi un campo gravitazionale diretto verso il centro, di intensità proporzionale alla distanza. Se il laboratorio non è troppo lontano dalla superficie della terra, la relazione si riduce a

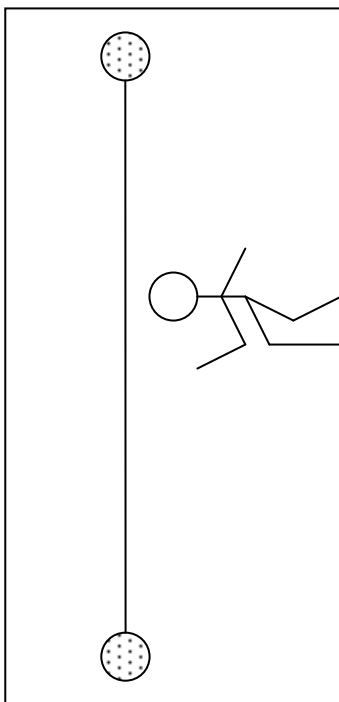
$$g_x = g_0 \frac{x}{D} \quad 15$$



Ad esempio, due bocce da 1 kg che cadono liberamente e sono alla distanza di 200 m, in prossimità della Terra, si attraggono con una forza

$$g_{100} = 9,8 \frac{10^2}{6,4 \times 10^6} = 1,5 \times 10^{-4} N. \quad 16$$

Veniamo ora alla dipendenza del campo dalla distanza dal centro della Terra, espressa dalla (12). Consideriamo il solito laboratorio che, questa volta immaginiamo lungo nel senso della caduta.



Alle estremità siano collocate due bocce di massa 1 kg (a distanza y) unite da un filo a cui il fisico ha applicato un dinamometro. Il campo nella posizione della boccia inferiore è più intenso che nella posizione della superiore:

$$g_i = g_0 \left(\frac{R}{L} \right)^2$$

$$g_s = g_0 \left(\frac{R}{L+y} \right)^2 \quad 17$$

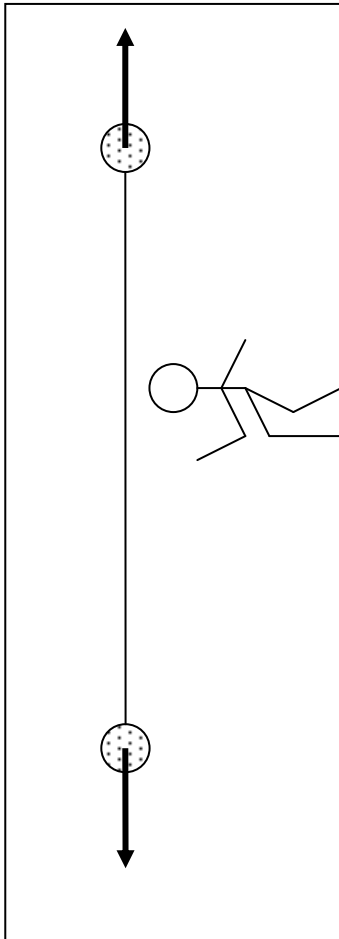
La differenza è

$$\Delta g = g_0 R^2 \left[\frac{1}{L^2} - \frac{1}{(L+y)^2} \right] \cong g_0 \frac{R^2}{L^2} 2 \frac{y}{L} \quad 18$$

Se il laboratorio precipita in prossimità della Terra, la precedente si riduce a

$$\Delta g \cong 2g_0 \frac{y}{R} \quad 19$$

Il fisico all'interno del laboratorio può interpretare il fenomeno come una forza di repulsione tra le due bocce, proporzionale alla loro distanza, registrata per altro dal dinamometro



Per due bocce distanti, come prima, 200 m, la forza di repulsione è

$$\Delta g \cong 2g_0 \frac{y}{R} \cong 2 \times 10 \times \frac{2 \times 10^2}{6,4 \times 10^6} N = 0,6 \text{ mN}.$$

La conclusione è che un laboratorio in caduta libera approssima tanto meglio un sistema inerziale quanto più le sue dimensioni sono ridotte.

Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia