

Similitudine fra triangoli

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Introduzione
- 2 Definizione
- 3 Criteri di similitudine
 - Primo criterio
 - Secondo criterio
 - Terzo criterio
- 4 Applicazioni
- 5 Approfondimento

Introduzione

Perché uno studente non si preoccupa mentre ricopia la figura di un triangolo dalla lavagna?

Introduzione

Perché uno studente non si preoccupa mentre ricopia la figura di un triangolo dalla lavagna?



Introduzione

Perché uno studente non si preoccupa mentre ricopia la figura di un triangolo dalla lavagna?



(Cioè... non si preoccupa del *triangolo*...)

In effetti, il triangolo alla lavagna e quello sul quaderno sono ben diversi,

In effetti, il triangolo alla lavagna e quello sul quaderno sono ben diversi, e in particolare non sono congruenti.

In effetti, il triangolo alla lavagna e quello sul quaderno sono ben diversi, e in particolare non sono congruenti.

E quello che lo studente cerca di fare è *riprodurre le qualità essenziali* della figura (in questo caso gli angoli).

In effetti, il triangolo alla lavagna e quello sul quaderno sono ben diversi, e in particolare non sono congruenti.

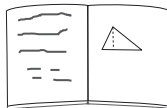
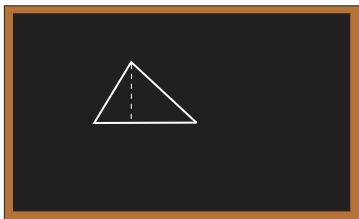
E quello che lo studente cerca di fare è *riprodurre le qualità essenziali* della figura (in questo caso gli angoli).

Pertanto, le informazioni interessanti non sono qui contenute nelle *dimensioni*, ma nella “forma”.

In effetti, il triangolo alla lavagna e quello sul quaderno sono ben diversi, e in particolare non sono congruenti.

E quello che lo studente cerca di fare è *riprodurre le qualità essenziali* della figura (in questo caso gli angoli).

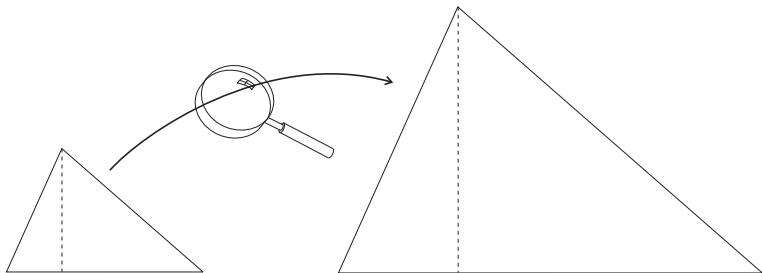
Pertanto, le informazioni interessanti non sono qui contenute nelle *dimensioni*, ma nella “forma”.



Qual è la trasformazione che lo studente “ignora”?

Qual è la trasformazione che lo studente “ignora”? Si tratta dell'*omotetia*, quella trasformazione che vediamo all'opera tutte le volte che “riduciamo in scala” o “ingrandiamo” una figura.

Qual è la trasformazione che lo studente “ignora”? Si tratta dell'*omotetia*, quella trasformazione che vediamo all'opera tutte le volte che “riduciamo in scala” o “ingrandiamo” una figura.



Definizione

Diciamo allora che

Definizione

Diciamo allora che

Definizione di similitudine

Due triangoli sono *simili* se hanno gli angoli uguali (nell'ordine) e i lati opposti agli angoli uguali in proporzione.

Definizione

Diciamo allora che

Definizione di similitudine

Due triangoli sono *simili* se hanno gli angoli uguali (nell'ordine) e i lati opposti agli angoli uguali in proporzione.

Osserviamo che “in proporzione” vuol dire che il *rapporto* delle lunghezze è lo stesso per le tre coppie di lati omologhi.

Definizione

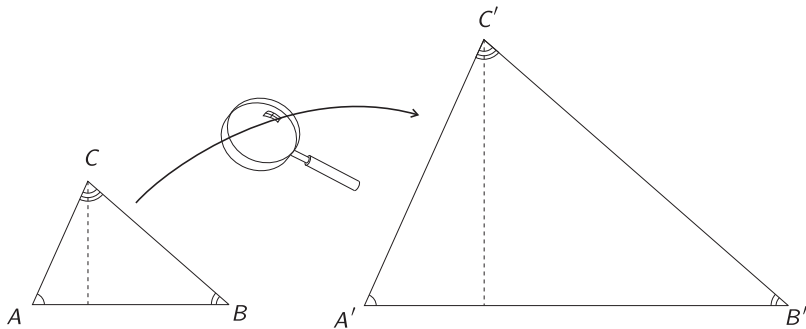
Diciamo allora che

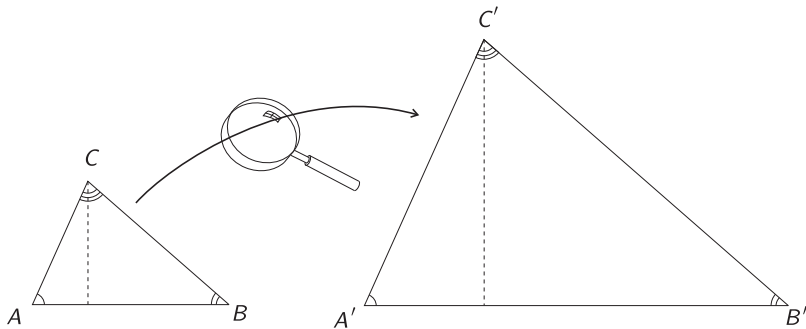
Definizione di similitudine

Due triangoli sono *simili* se hanno gli angoli uguali (nell'ordine) e i lati opposti agli angoli uguali in proporzione.

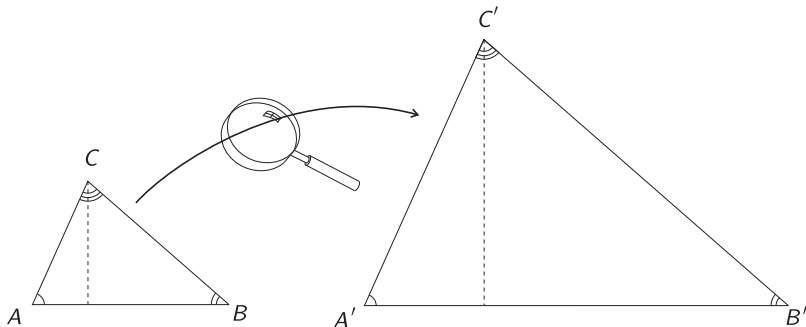
Osserviamo che “in proporzione” vuol dire che il *rapporto* delle lunghezze è lo stesso per le tre coppie di lati omologhi.

Limitiamo per ora questa definizione ai triangoli: poi la estenderemo a delle figure geometriche più (o meno) complesse.





$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Dimostriamo un primo teorema:

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Dimostriamo un primo teorema:

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Dimostriamo un primo teorema:

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno uguali (nell'ordine) due angoli.

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Dimostriamo un primo teorema:

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno uguali (nell'ordine) due angoli.

Dimostrazione. Intanto, siccome la somma degli angoli interni è pari a un angolo piatto, anche i terzi angoli dei due triangoli sono uguali.

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Dimostriamo un primo teorema:

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno uguali (nell'ordine) due angoli.

Dimostrazione. Intanto, siccome la somma degli angoli interni è pari a un angolo piatto, anche i terzi angoli dei due triangoli sono uguali. Adesso dobbiamo dimostrare che i tre lati sono in proporzione.

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Dimostriamo un primo teorema:

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno uguali (nell'ordine) due angoli.

Dimostrazione. Intanto, siccome la somma degli angoli interni è pari a un angolo piatto, anche i terzi angoli dei due triangoli sono uguali.

Adesso dobbiamo dimostrare che i tre lati sono in proporzione.

Se capita che $AC = A'C'$, allora, per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, i due triangoli sono uguali, e dunque anche simili.

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Dimostriamo un primo teorema:

Primo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno uguali (nell'ordine) due angoli.

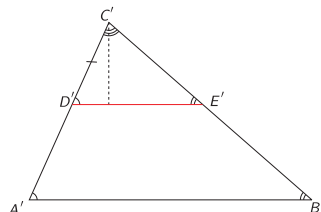
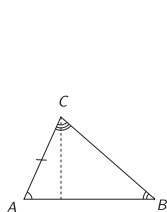
Dimostrazione. Intanto, siccome la somma degli angoli interni è pari a un angolo piatto, anche i terzi angoli dei due triangoli sono uguali.

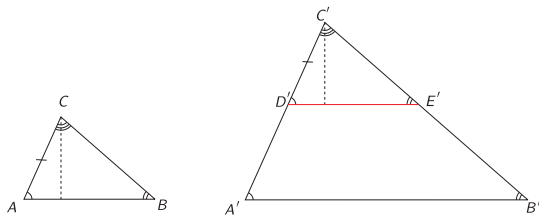
Adesso dobbiamo dimostrare che i tre lati sono in proporzione.

Se capita che $AC = A'C'$, allora, per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, i due triangoli sono uguali, e dunque anche simili.

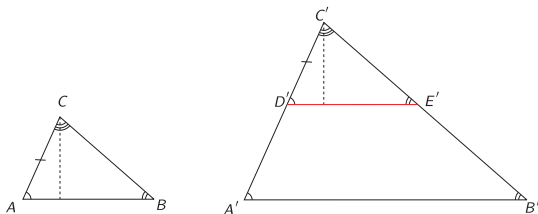
Altrimenti, uno dei due lati tra AC e $A'C'$ sarà maggiore dell'altro.

Supponiamo, come in figura, che $A'C'$ sia il maggiore.

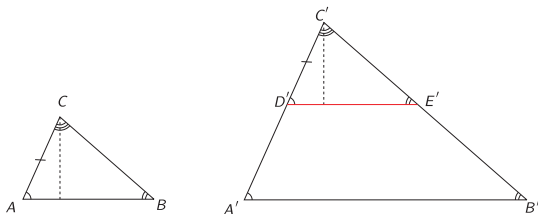




Prendiamo su $A'C'$ un punto D' tale che CA sia congruente a $C'D'$,

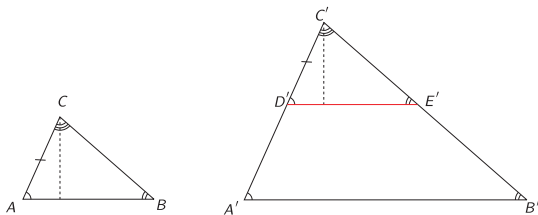


Prendiamo su $A'C'$ un punto D' tale che CA sia congruente a $C'D'$, e da D' tracciamo la parallela ad AB fino ad incontrare CB in E' .



Prendiamo su $A'C'$ un punto D' tale che CA sia congruente a $C'D'$, e da D' tracciamo la parallela ad AB fino ad incontrare CB in E' .

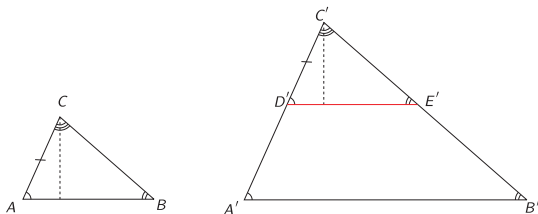
Per quanto visto a proposito della corrispondenza di Talete, abbiamo che



Prendiamo su $A'C'$ un punto D' tale che CA sia congruente a $C'D'$, e da D' tracciamo la parallela ad AB fino ad incontrare CB in E' .

Per quanto visto a proposito della corrispondenza di Talete, abbiamo che

$$\frac{A'C'}{C'D'} = \frac{C'B'}{C'E'}.$$

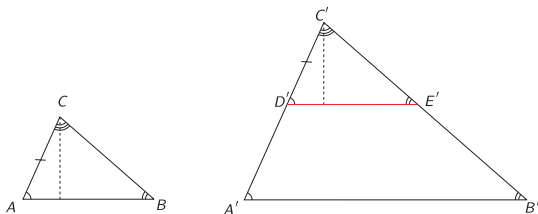


Prendiamo su $A'C'$ un punto D' tale che CA sia congruente a $C'D'$, e da D' tracciamo la parallela ad AB fino ad incontrare CB in E' .

Per quanto visto a proposito della corrispondenza di Talete, abbiamo che

$$\frac{A'C'}{C'D'} = \frac{C'B'}{C'E'}.$$

Però ora, per il secondo criterio di congruenza, i triangoli ABC e $D'C'E'$ sono congruenti



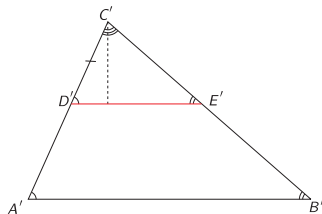
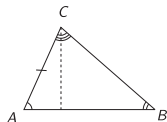
Prendiamo su $A'C'$ un punto D' tale che CA sia congruente a $C'D'$, e da D' tracciamo la parallela ad AB fino ad incontrare CB in E' .

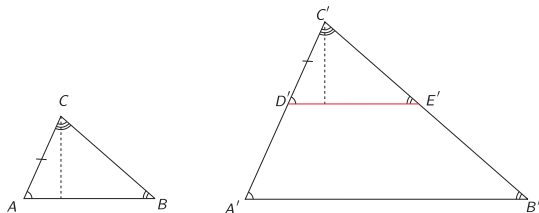
Per quanto visto a proposito della corrispondenza di Talete, abbiamo che

$$\frac{A'C'}{C'D'} = \frac{C'B'}{C'E'}.$$

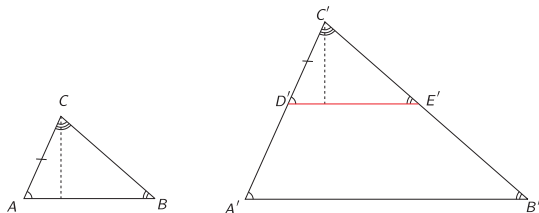
Però ora, per il secondo criterio di congruenza, i triangoli ABC e $D'C'E'$ sono congruenti e quindi $C'E' = CB$, per cui

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}.$$



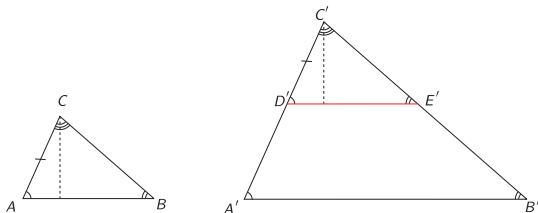


Ripetendo il ragionamento tenendo per base AC si trova ora



Ripetendo il ragionamento tenendo per base AC si trova ora

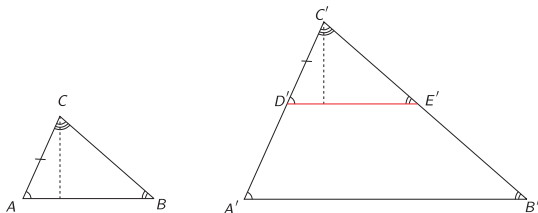
$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$$



Ripetendo il ragionamento tenendo per base AC si trova ora

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$$

e quindi i lati sono in proporzione. ■



Ripetendo il ragionamento tenendo per base AC si trova ora

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$$

e quindi i lati sono in proporzione. ■

Di conseguenza, se si “taglia” un triangolo con una retta parallela a un lato, il triangolo “tagliato” è simile a quello di partenza.

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno due coppie di lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso uguale.

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno due coppie di lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso uguale.

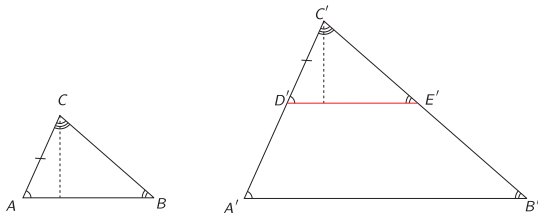
Dimostrazione. La prima parte ricalca la precedente.

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno due coppie di lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso uguale.

Dimostrazione. La prima parte ricalca la precedente.

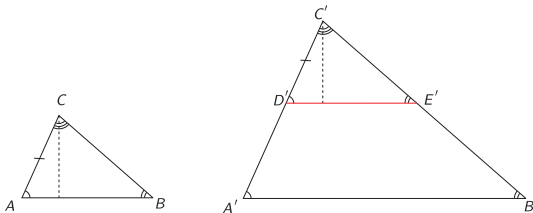


Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno due coppie di lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso uguale.

Dimostrazione. La prima parte ricalca la precedente.



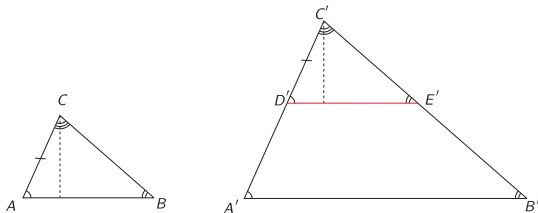
Per quanto sappiamo dalla corrispondenza di Talete, come prima avremo

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

Secondo criterio di similitudine fra triangoli

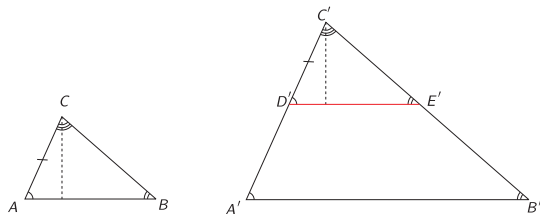
Due triangoli sono simili se hanno due coppie di lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso uguale.

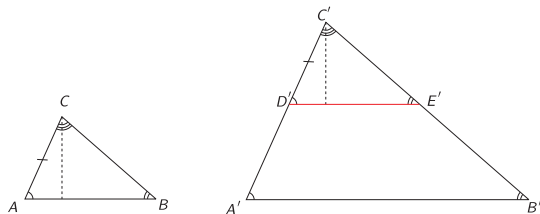
Dimostrazione. La prima parte ricalca la precedente.



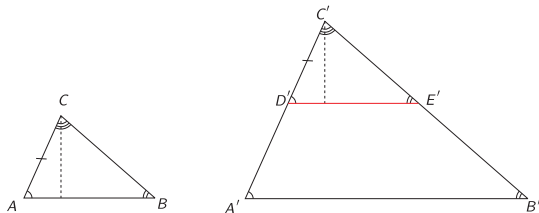
Per quanto sappiamo dalla corrispondenza di Talete, come prima avremo

$$\frac{C'A'}{C'D'} = \frac{C'B'}{C'E'}$$



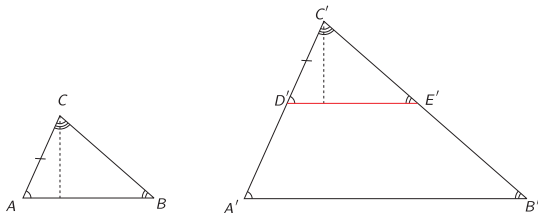


e pertanto, per le proprietà delle frazioni,



e pertanto, per le proprietà delle frazioni,

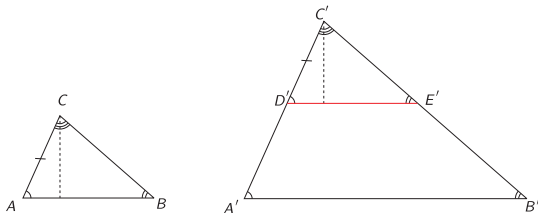
$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$



e pertanto, per le proprietà delle frazioni,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

Stavolta però *per ipotesi*

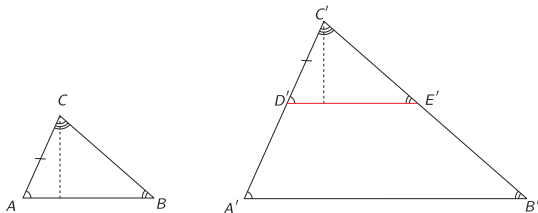


e pertanto, per le proprietà delle frazioni,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

Stavolta però *per ipotesi*

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$$



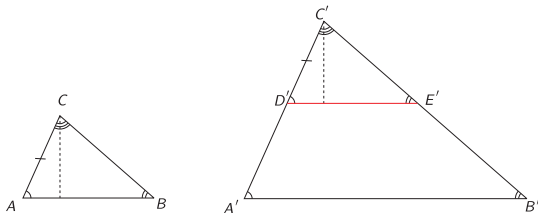
e pertanto, per le proprietà delle frazioni,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

Stavolta però *per ipotesi*

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$$

e dunque, sempre per le proprietà delle frazioni,



e pertanto, per le proprietà delle frazioni,

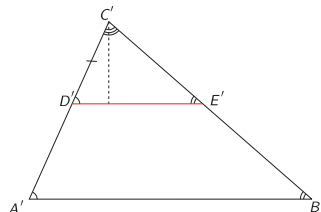
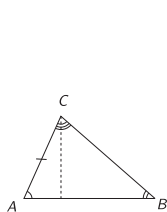
$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

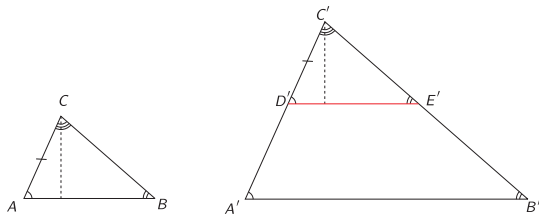
Stavolta però *per ipotesi*

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$$

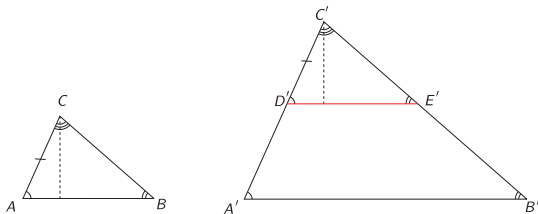
e dunque, sempre per le proprietà delle frazioni,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{CA}{CB}.$$



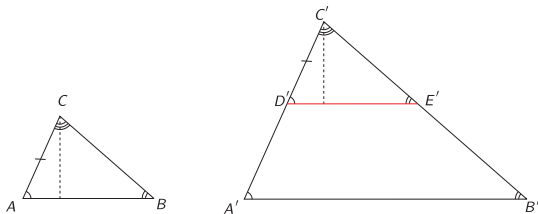


Confrontando le due ultime espressioni troviamo



Confrontando le due ultime espressioni troviamo

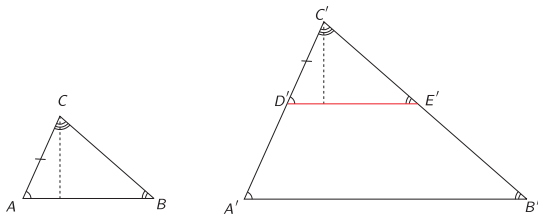
$$\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CA}{CB}.$$



Confrontando le due ultime espressioni troviamo

$$\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CA}{CB}.$$

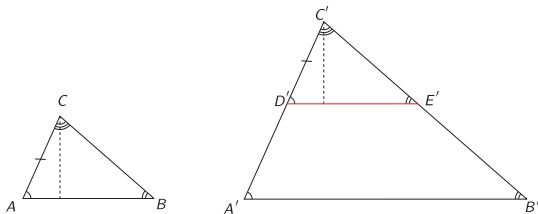
Però abbiamo $C'D' = CA$ per costruzione, quindi anche i denominatori delle due frazioni devono coincidere.



Confrontando le due ultime espressioni troviamo

$$\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CA}{CB}.$$

Però abbiamo $C'D' = CA$ per costruzione, quindi anche i denominatori delle due frazioni devono coincidere. In definitiva $CB = C'E'$.



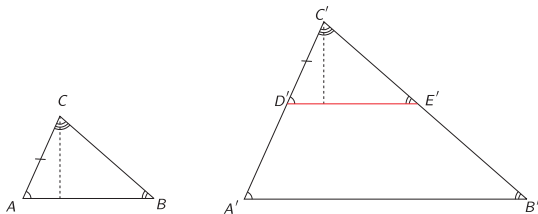
Confrontando le due ultime espressioni troviamo

$$\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CA}{CB}.$$

Però abbiamo $C'D' = CA$ per costruzione, quindi anche i denominatori delle due frazioni devono coincidere. In definitiva $CB = C'E'$.

A questo punto i triangoli ABC e $D'E'C'$ sono uguali per il primo criterio, e quindi anche gli angoli

$$\widehat{CAB} = \widehat{C'D'E'}.$$



Confrontando le due ultime espressioni troviamo

$$\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CA}{CB}.$$

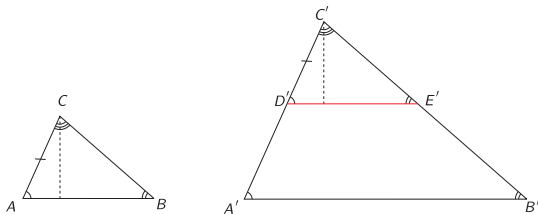
Però abbiamo $C'D' = CA$ per costruzione, quindi anche i denominatori delle due frazioni devono coincidere. In definitiva $CB = C'E'$.

A questo punto i triangoli ABC e $D'E'C'$ sono uguali per il primo criterio, e quindi anche gli angoli

$$\widehat{CAB} = \widehat{C'D'E'}.$$

Ma, essendo angoli corrispondenti di rette parallele, avremo anche

$$\widehat{C'D'E'} = \widehat{C'A'B'},$$



Confrontando le due ultime espressioni troviamo

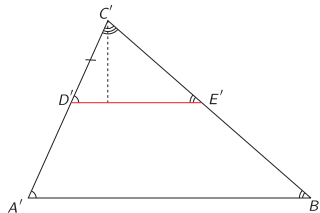
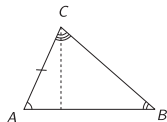
$$\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CA}{CB}.$$

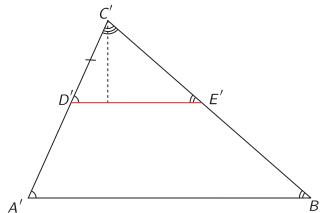
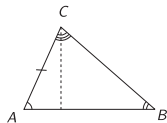
Però abbiamo $C'D' = CA$ per costruzione, quindi anche i denominatori delle due frazioni devono coincidere. In definitiva $CB = C'E'$.

A questo punto i triangoli ABC e $D'E'C'$ sono uguali per il primo criterio, e quindi anche gli angoli

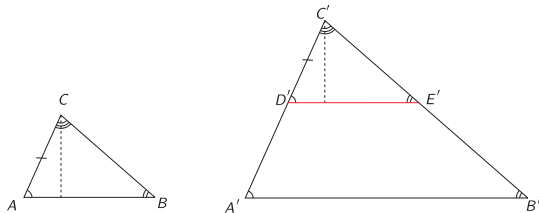
$$\widehat{CAB} = \widehat{C'D'E'}.$$

Ma, essendo angoli corrispondenti di rette parallele, avremo anche $\widehat{C'D'E'} = \widehat{C'A'B'}$, e dunque per la proprietà transitiva,





$$\hat{A} = \hat{A}'.$$



$$\widehat{A} = \widehat{A'}.$$

A questo punto, avendosi per ipotesi $\widehat{C} = \widehat{C'}$, i due triangoli sono simili per il primo criterio. ■

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno tutti i lati in proporzione.

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno tutti i lati in proporzione.

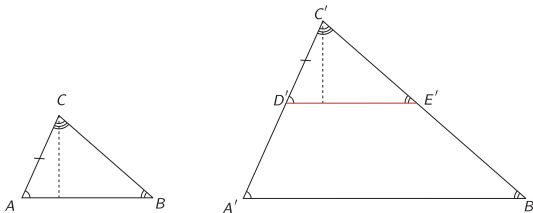
Dimostrazione. La costruzione è sempre la stessa:

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno tutti i lati in proporzione.

Dimostrazione. La costruzione è sempre la stessa:

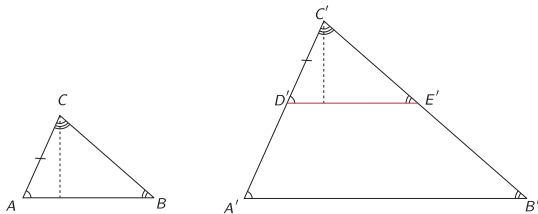


Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno tutti i lati in proporzione.

Dimostrazione. La costruzione è sempre la stessa:



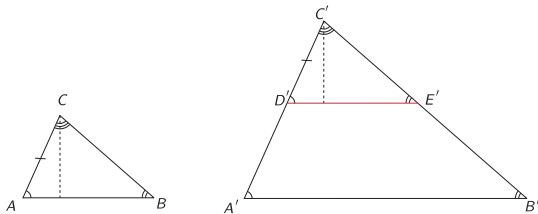
Stavolta abbiamo che, essendo $D'E'$ parallelo ad $A'B'$, il triangolo $C'D'E'$ è simile al triangolo $C'A'B'$, per quanto detto poco fa.

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Due triangoli sono simili se hanno tutti i lati in proporzione.

Dimostrazione. La costruzione è sempre la stessa:



Stavolta abbiamo che, essendo $D'E'$ parallelo ad $A'B'$, il triangolo $C'D'E'$ è simile al triangolo $C'A'B'$, per quanto detto poco fa. Dunque

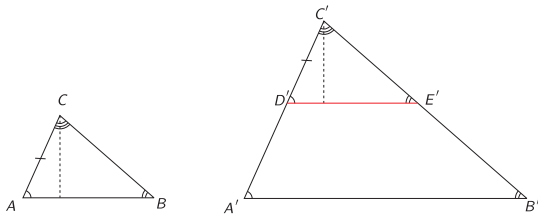
$$\frac{C'A'}{C'D'} = \frac{C'B'}{C'E'}$$

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

Terzo criterio di similitudine fra triangoli

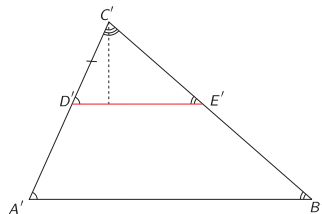
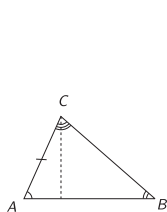
Due triangoli sono simili se hanno tutti i lati in proporzione.

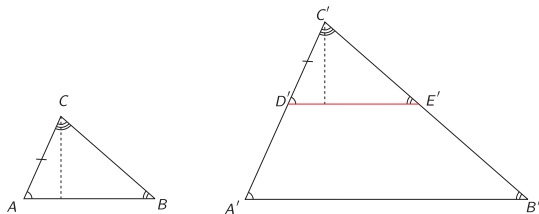
Dimostrazione. La costruzione è sempre la stessa:



Stavolta abbiamo che, essendo $D'E'$ parallelo ad $A'B'$, il triangolo $C'D'E'$ è simile al triangolo $C'A'B'$, per quanto detto poco fa. Dunque

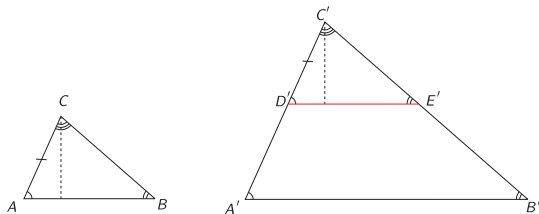
$$\frac{C'A'}{C'D'} = \frac{C'B'}{C'E'}$$





e quindi, per le proprietà delle frazioni,

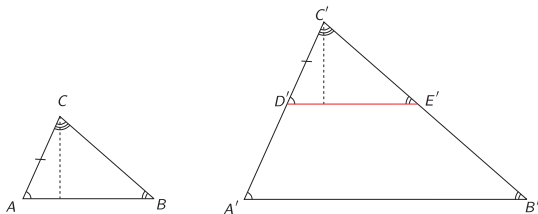
$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$



e quindi, per le proprietà delle frazioni,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

D'altro canto abbiamo per ipotesi

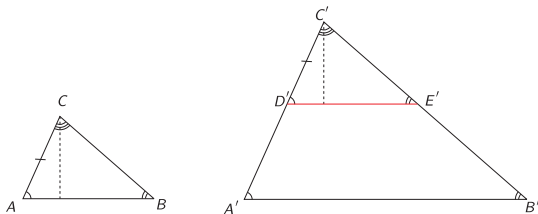


e quindi, per le proprietà delle frazioni,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

D'altro canto abbiamo per ipotesi

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$$



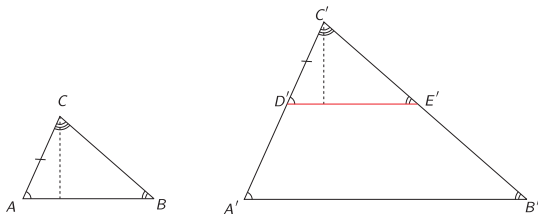
e quindi, per le proprietà delle frazioni,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

D'altro canto abbiamo per ipotesi

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$$

e dunque, sempre per le proprietà delle frazioni, la prima uguaglianza si può scrivere



e quindi, per le proprietà delle frazioni,

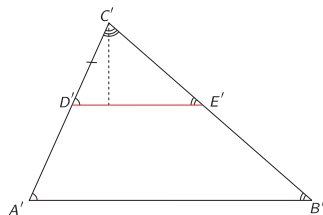
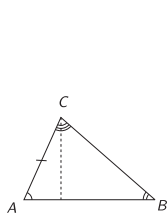
$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{C'D'}{C'E'}.$$

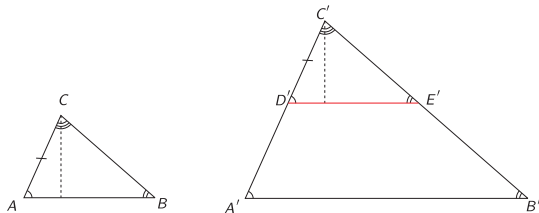
D'altro canto abbiamo per ipotesi

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$$

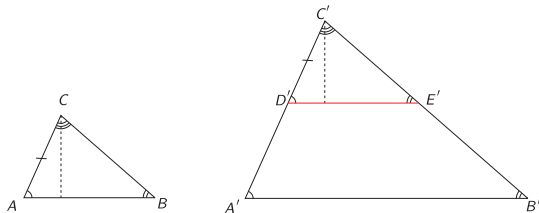
e dunque, sempre per le proprietà delle frazioni, la prima uguaglianza si può scrivere

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{CA}{CB}.$$



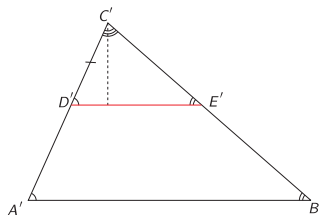
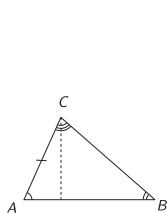


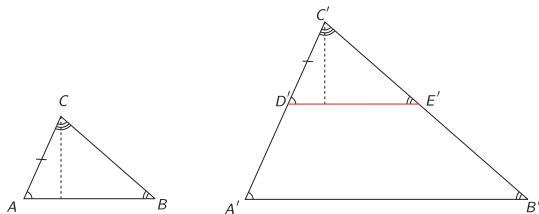
Confrontando l'ultima e la terzultima uguaglianza abbiamo



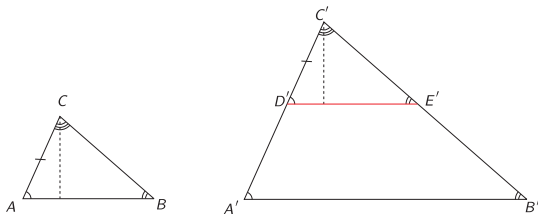
Confrontando l'ultima e la terzultima uguaglianza abbiamo

$$\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CA}{CB}$$

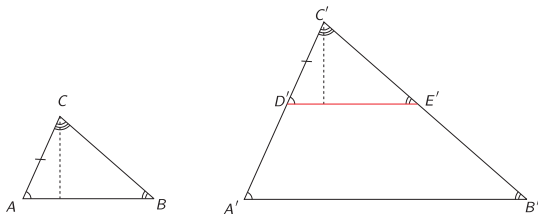




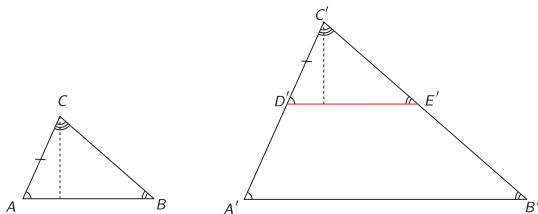
Ma siccome per costruzione abbiamo $C'D' = CA$, si deve avere $C'E' = CB$.



Ma siccome per costruzione abbiamo $C'D' = CA$, si deve avere $C'E' = CB$. "Girando" ora i triangoli sulle basi AC e $A'C'$ si trova allo stesso modo $AB = D'E'$,



Ma siccome per costruzione abbiamo $C'D' = CA$, si deve avere $C'E' = CB$. “Girando” ora i triangoli sulle basi AC e $A'C'$ si trova allo stesso modo $AB = D'E'$, per cui i due triangoli ABC e $C'D'E'$ sono congruenti per il terzo criterio di congruenza.



Ma siccome per costruzione abbiamo $C'D' = CA$, si deve avere $C'E' = CB$. “Girando” ora i triangoli sulle basi AC e $A'C'$ si trova allo stesso modo $AB = D'E'$, per cui i due triangoli ABC e $C'D'E'$ sono congruenti per il terzo criterio di congruenza. Ma allora, siccome $C'D'E'$ era simile ad $A'B'C'$, anche ABC lo sarà. ■

Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

Teorema

Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

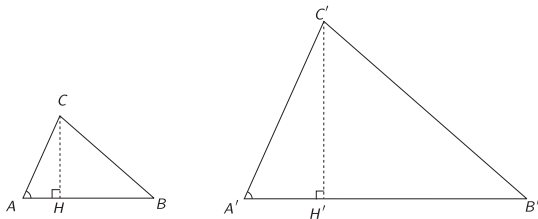
Teorema

Due triangoli simili hanno altezze e perimetri direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto che esiste fra i lati.

Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

Teorema

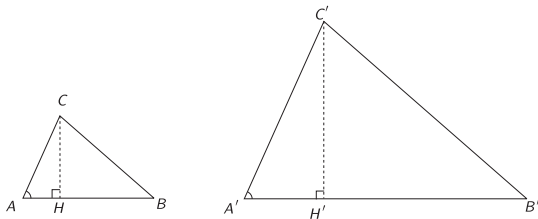
Due triangoli simili hanno altezze e perimetri direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto che esiste fra i lati.



Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

Teorema

Due triangoli simili hanno altezze e perimetri direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto che esiste fra i lati.

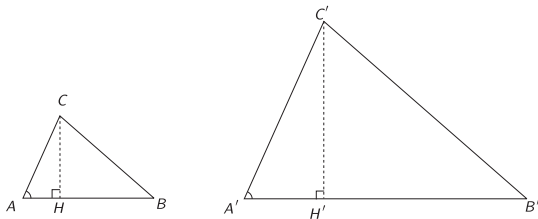


Dimostrazione.

Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

Teorema

Due triangoli simili hanno altezze e perimetri direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto che esiste fra i lati.

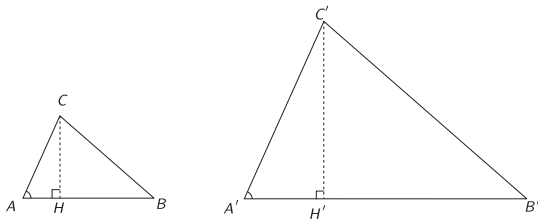


Dimostrazione. Per ipotesi, i due triangoli sono uguali e quindi hanno gli angoli rispettivamente uguali.

Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

Teorema

Due triangoli simili hanno altezze e perimetri direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto che esiste fra i lati.

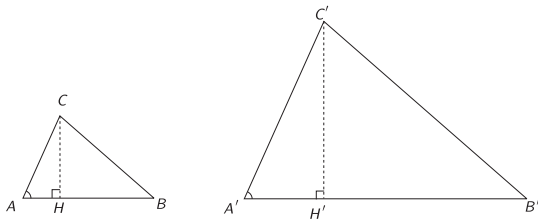


Dimostrazione. Per ipotesi, i due triangoli sono uguali e quindi hanno gli angoli rispettivamente uguali. Con riferimento alla figura, i due triangoli AHB e $A'H'B'$ sono simili, perché hanno due angoli uguali

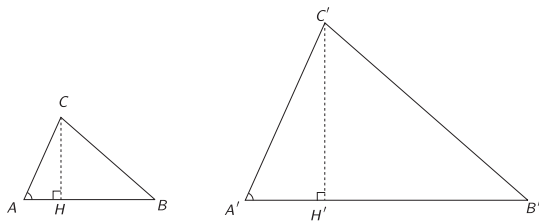
Due triangoli simili hanno numerose proprietà importanti.

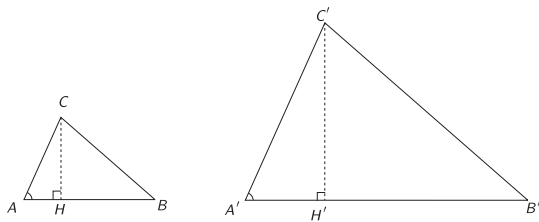
Teorema

Due triangoli simili hanno altezze e perimetri direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto che esiste fra i lati.



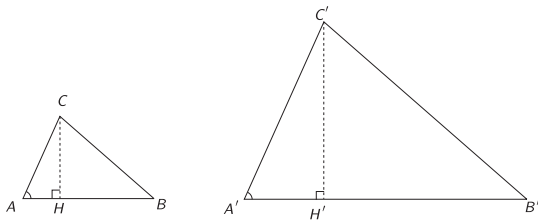
Dimostrazione. Per ipotesi, i due triangoli sono uguali e quindi hanno gli angoli rispettivamente uguali. Con riferimento alla figura, i due triangoli AHB e $A'H'B'$ sono simili, perché hanno due angoli uguali (l'angolo in A e l'angolo retto).





Dunque

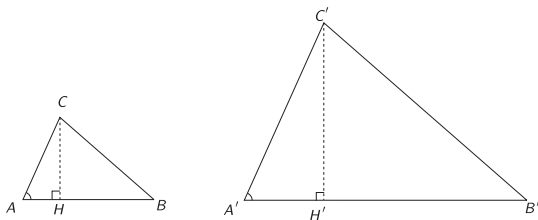
$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'H'}{CH}.$$



Dunque

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'H'}{CH}.$$

Ma allora le altezze sono direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto dei lati.

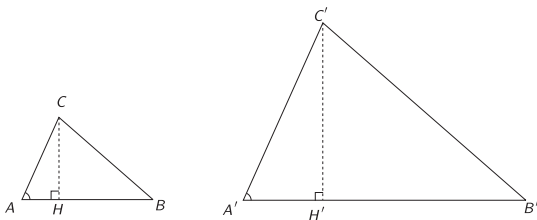


Dunque

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'H'}{CH}.$$

Ma allora le altezze sono direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto dei lati.

Se i due triangoli sono simili, allora i tre lati sono in proporzione, e quindi



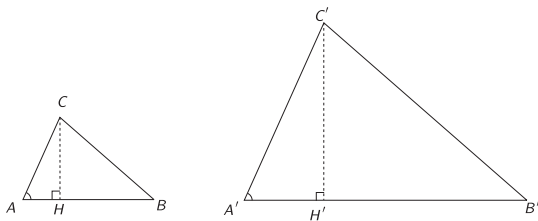
Dunque

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'H'}{CH}.$$

Ma allora le altezze sono direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto dei lati.

Se i due triangoli sono simili, allora i tre lati sono in proporzione, e quindi

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k.$$



Dunque

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'H'}{CH}.$$

Ma allora le altezze sono direttamente proporzionali, con lo stesso rapporto dei lati.

Se i due triangoli sono simili, allora i tre lati sono in proporzione, e quindi

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k.$$

Da qui segue

$$A'B' = k AB, \quad A'C' = k AC, \quad B'C' = k BC.$$

$$A'B' = k AB, \quad A'C' = k AC, \quad B'C' = k BC.$$

Pertanto, indicando con $2p$ il perimetro di ABC e $2p'$ quello di $A'B'C'$,

$$A'B' = k AB, \quad A'C' = k AC, \quad B'C' = k BC.$$

Pertanto, indicando con $2p$ il perimetro di ABC e $2p'$ quello di $A'B'C'$,

$$\frac{2p'}{2p} =$$

$$A'B' = k AB, \quad A'C' = k AC, \quad B'C' = k BC.$$

Pertanto, indicando con $2p$ il perimetro di ABC e $2p'$ quello di $A'B'C'$,

$$\frac{2p'}{2p} = \frac{A'B' + B'C' + A'C'}{AB + BC + AC} =$$

$$A'B' = k AB, \quad A'C' = k AC, \quad B'C' = k BC.$$

Pertanto, indicando con $2p$ il perimetro di ABC e $2p'$ quello di $A'B'C'$,

$$\frac{2p'}{2p} = \frac{A'B' + B'C' + A'C'}{AB + BC + AC} = \frac{k AB + k BC + k AC}{AB + BC + AC} =$$

$$A'B' = k AB, \quad A'C' = k AC, \quad B'C' = k BC.$$

Pertanto, indicando con $2p$ il perimetro di ABC e $2p'$ quello di $A'B'C'$,

$$\begin{aligned} \frac{2p'}{2p} &= \frac{A'B' + B'C' + A'C'}{AB + BC + AC} = \frac{k AB + k BC + k AC}{AB + BC + AC} = \\ &= \frac{k(AB + BC + AC)}{AB + BC + AC} = \end{aligned}$$

$$A'B' = k AB, \quad A'C' = k AC, \quad B'C' = k BC.$$

Pertanto, indicando con $2p$ il perimetro di ABC e $2p'$ quello di $A'B'C'$,

$$\begin{aligned} \frac{2p'}{2p} &= \frac{A'B' + B'C' + A'C'}{AB + BC + AC} = \frac{k AB + k BC + k AC}{AB + BC + AC} = \\ &= \frac{k(AB + BC + AC)}{AB + BC + AC} = k \end{aligned}$$

e quindi il rapporto tra i perimetri è uguale a quello fra i lati. ■

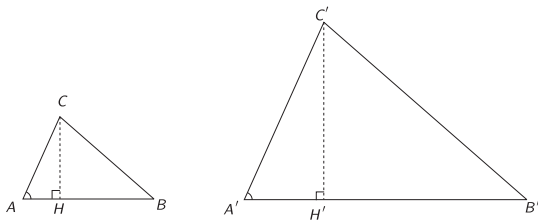
Teorema

Teorema

Due triangoli simili hanno rapporto fra le aree uguali al quadrato del rapporto che esiste fra i lati.

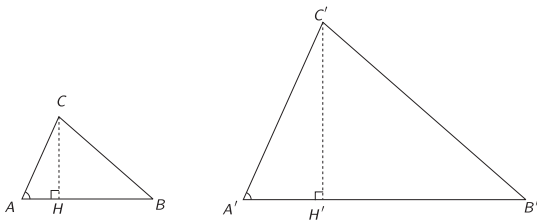
Teorema

Due triangoli simili hanno rapporto fra le aree uguale al quadrato del rapporto che esiste fra i lati.



Teorema

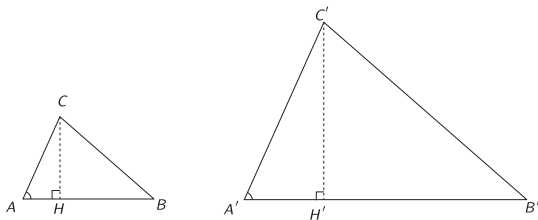
Due triangoli simili hanno rapporto fra le aree uguale al quadrato del rapporto che esiste fra i lati.



Dimostrazione.

Teorema

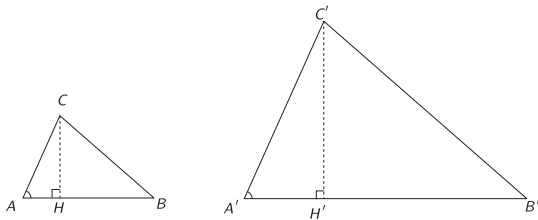
Due triangoli simili hanno rapporto fra le aree uguale al quadrato del rapporto che esiste fra i lati.



Dimostrazione. Dalla precedente dimostrazione abbiamo che

Teorema

Due triangoli simili hanno rapporto fra le aree uguali al quadrato del rapporto che esiste fra i lati.

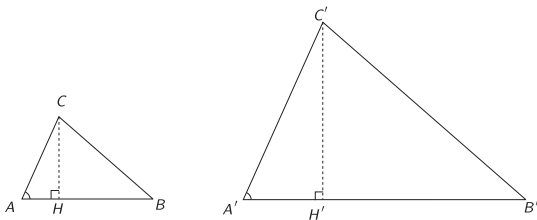


Dimostrazione. Dalla precedente dimostrazione abbiamo che

$$A'B' = k AB, \quad C'H' = k CH$$

Teorema

Due triangoli simili hanno rapporto fra le aree uguale al quadrato del rapporto che esiste fra i lati.



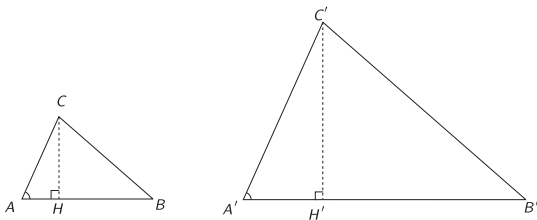
Dimostrazione. Dalla precedente dimostrazione abbiamo che

$$A'B' = k AB, \quad C'H' = k CH$$

e quindi, indicando con $\mathcal{A}$ l'area di ABC e $\mathcal{A}'$ quella di $A'B'C'$,

Teorema

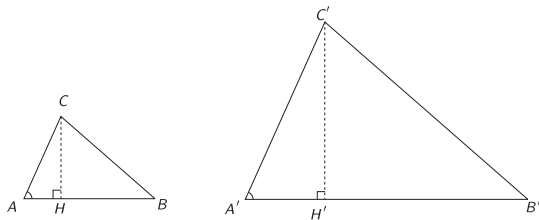
Due triangoli simili hanno rapporto fra le aree uguale al quadrato del rapporto che esiste fra i lati.

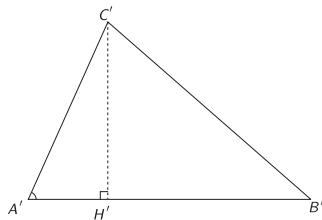
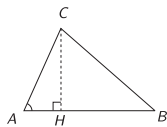


Dimostrazione. Dalla precedente dimostrazione abbiamo che

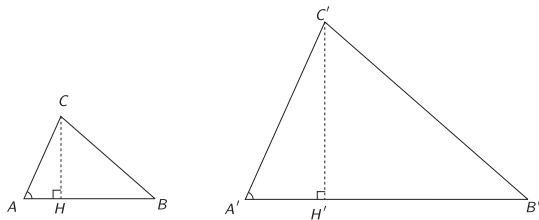
$$A'B' = k AB, \quad C'H' = k CH$$

e quindi, indicando con $\mathcal{A}$ l'area di ABC e $\mathcal{A}'$ quella di $A'B'C'$,

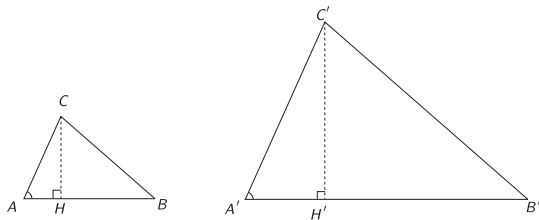




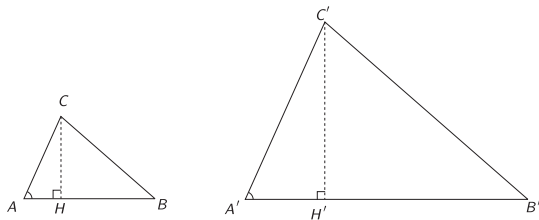
$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'H' =$$



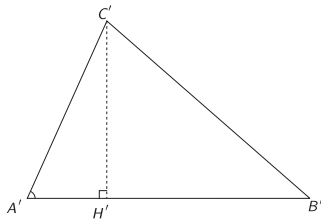
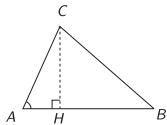
$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'H' = \frac{1}{2} k AB \cdot k CH =$$



$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'H' = \frac{1}{2} k AB \cdot k CH = \frac{1}{2} k^2 AB \cdot CH =$$



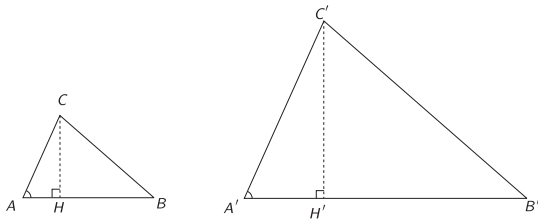
$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'H' = \frac{1}{2} k AB \cdot k CH = \frac{1}{2} k^2 AB \cdot CH = k^2 \mathcal{A}.$$



$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'H' = \frac{1}{2} k AB \cdot k CH = \frac{1}{2} k^2 AB \cdot CH = k^2 \mathcal{A}.$$

Pertanto

$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} =$$



$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'H' = \frac{1}{2} k AB \cdot k CH = \frac{1}{2} k^2 AB \cdot CH = k^2 \mathcal{A}.$$

Pertanto

$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = k^2 = \left(\frac{A'B'}{AB} \right)^2. \blacksquare$$

Con la similitudine fra triangoli è possibile ridimostrare i due teoremi di Euclide.

Con la similitudine fra triangoli è possibile ridimostrare i due teoremi di Euclide.

I teoremi di Euclide

Con la similitudine fra triangoli è possibile ridimostrare i due teoremi di Euclide.

I teoremi di Euclide

In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito su un cateto è uguale a quella del rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Con la similitudine fra triangoli è possibile ridimostrare i due teoremi di Euclide.

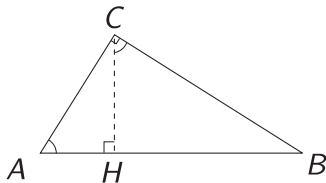
I teoremi di Euclide

In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito su un cateto è uguale a quella del rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa. Inoltre, l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è uguale all'area del rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Con la similitudine fra triangoli è possibile ridimostrare i due teoremi di Euclide.

I teoremi di Euclide

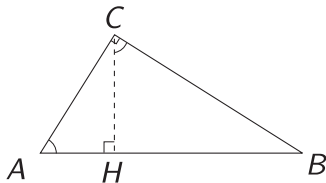
In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito su un cateto è uguale a quella del rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa. Inoltre, l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è uguale all'area del rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Con la similitudine fra triangoli è possibile ridimostrare i due teoremi di Euclide.

I teoremi di Euclide

In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito su un cateto è uguale a quella del rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa. Inoltre, l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è uguale all'area del rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

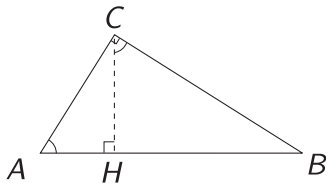


$$AC^2 = AH \cdot AB$$

Con la similitudine fra triangoli è possibile ridimostrare i due teoremi di Euclide.

I teoremi di Euclide

In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito su un cateto è uguale a quella del rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa. Inoltre, l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è uguale all'area del rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

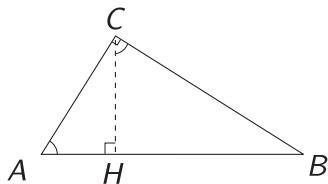


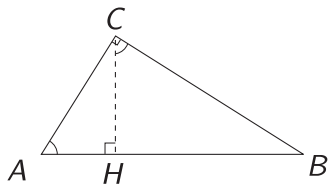
$$AC^2 = AH \cdot AB \quad CH^2 = AH \cdot HB.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio al lettore.

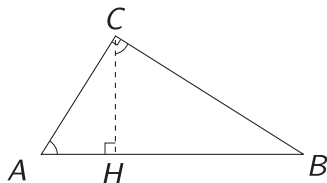
La dimostrazione è lasciata per esercizio al lettore.

È possibile comunque vederla nella prossima slide.

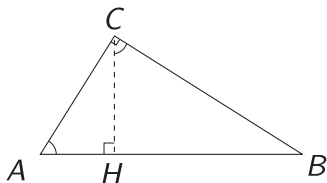




I triangoli AHC e ACB sono simili,

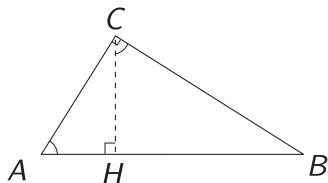


I triangoli AHC e ACB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e $\widehat{CAB}$ è in comune.



I triangoli AHC e ACB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e $\widehat{CAB}$ è in comune.

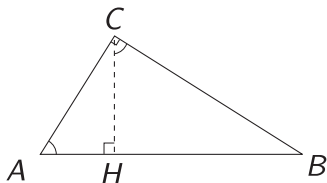
Dunque



I triangoli AHC e ACB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e $\widehat{CAB}$ è in comune.

Dunque

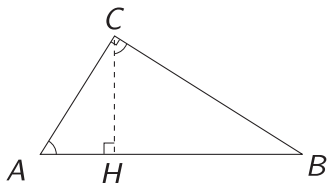
$$\frac{AB}{AC} =$$



I triangoli AHC e ACB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e $\widehat{CAB}$ è in comune.

Dunque

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$$

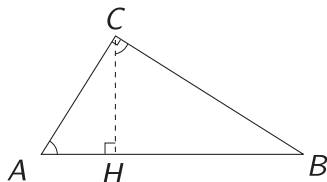


I triangoli AHC e ACB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e $\widehat{CAB}$ è in comune.

Dunque

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$$

e quindi



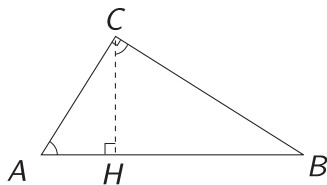
I triangoli AHC e ACB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e $\widehat{CAB}$ è in comune.

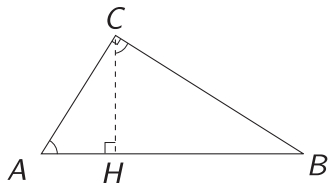
Dunque

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$$

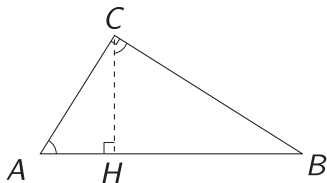
e quindi

$$AC^2 = AB \cdot AH.$$

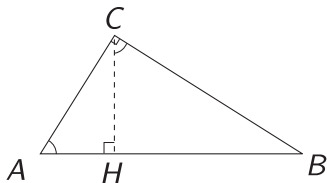




Anche i triangoli AHC e CHB sono simili,

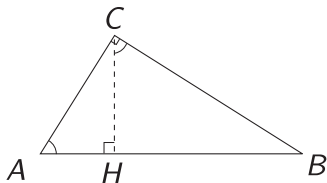


Anche i triangoli AHC e CHB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BCH}$ sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\widehat{B}$.



Anche i triangoli AHC e CHB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BCH}$ sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\widehat{B}$.

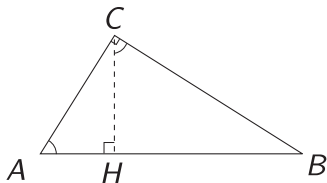
Dunque



Anche i triangoli AHC e CHB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BCH}$ sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\widehat{B}$.

Dunque

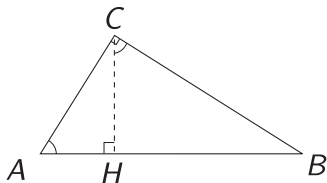
$$\frac{AH}{CH} =$$



Anche i triangoli AHC e CHB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BCH}$ sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\widehat{B}$.

Dunque

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$$

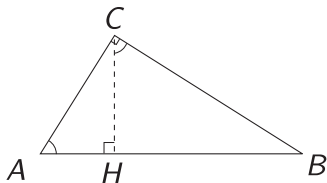


Anche i triangoli AHC e CHB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BCH}$ sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\widehat{B}$.

Dunque

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$$

e quindi



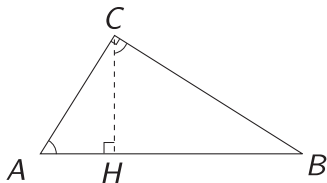
Anche i triangoli AHC e CHB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BCH}$ sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\widehat{B}$.

Dunque

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$$

e quindi

$$CH^2 = AH \cdot HB.$$



Anche i triangoli AHC e CHB sono simili, perché sono entrambi rettangoli e gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BCH}$ sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\widehat{B}$.

Dunque

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$$

e quindi

$$CH^2 = AH \cdot HB.$$

Approfondimento

Wallis nel 1663 osserva che il postulato

Approfondimento

Wallis nel 1663 osserva che il postulato

“Esiste sempre un triangolo avente gli angoli rispettivamente uguali a quelli di un altro triangolo dato, ed il cui lato compreso tra due determinati di questi angoli abbia lunghezza assegnata ad arbitrio”

Approfondimento

Wallis nel 1663 osserva che il postulato

“Esiste sempre un triangolo avente gli angoli rispettivamente uguali a quelli di un altro triangolo dato, ed il cui lato compreso tra due determinati di questi angoli abbia lunghezza assegnata ad arbitrio”

implica il quinto postulato di Euclide, ossia che

Approfondimento

Wallis nel 1663 osserva che il postulato

“Esiste sempre un triangolo avente gli angoli rispettivamente uguali a quelli di un altro triangolo dato, ed il cui lato compreso tra due determinati di questi angoli abbia lunghezza assegnata ad arbitrio”

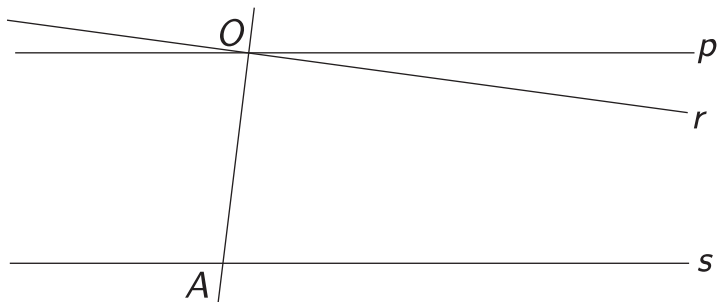
implica il quinto postulato di Euclide, ossia che *se una trasversale a due rette forma angoli con esse la cui somma è inferiore a un angolo piatto, allora la incontra dalla parte corrispondente a questa somma*

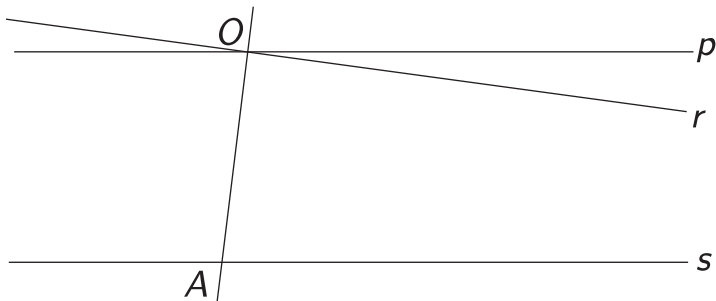
Approfondimento

Wallis nel 1663 osserva che il postulato

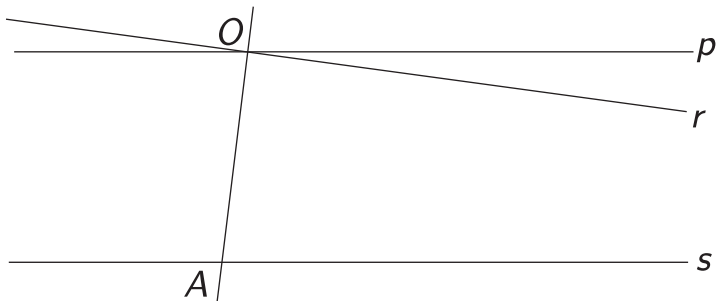
“Esiste sempre un triangolo avente gli angoli rispettivamente uguali a quelli di un altro triangolo dato, ed il cui lato compreso tra due determinati di questi angoli abbia lunghezza assegnata ad arbitrio”

implica il quinto postulato di Euclide, ossia che *se una trasversale a due rette forma angoli con esse la cui somma è inferiore a un angolo piatto, allora la incontra dalla parte corrispondente a questa somma* (che si dimostra essere equivalente al moderno postulato come l'abbiamo visto).

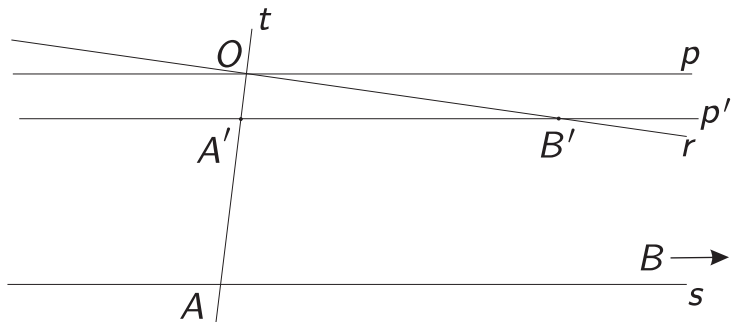


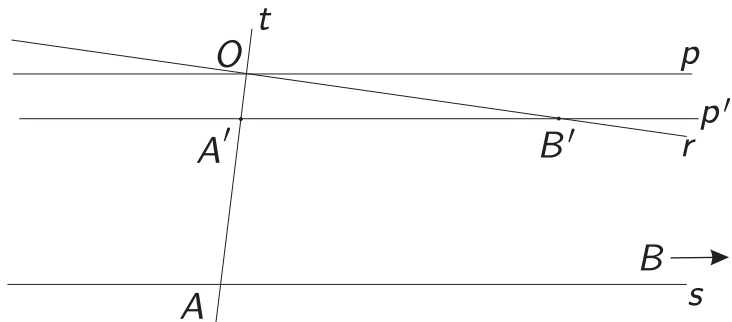


Infatti prendiamo una retta p passante per O formante con AO un angolo supplementare a $\widehat{OAP}$.

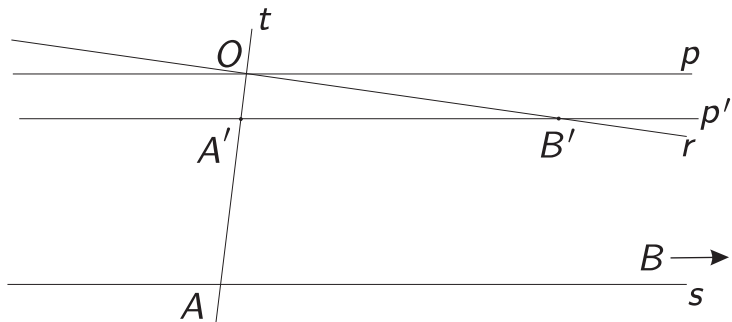


Infatti prendiamo una retta p passante per O formante con AO un angolo supplementare a $\widehat{OAP}$. Questa retta, evidentemente, incontra sia la retta trasversale contenente OA che la prima delle due rette del postulato di Euclide.

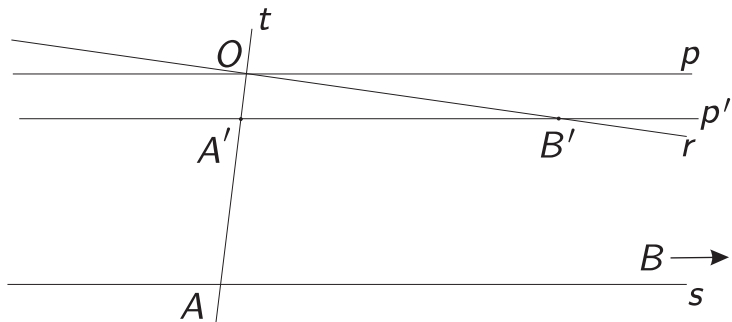




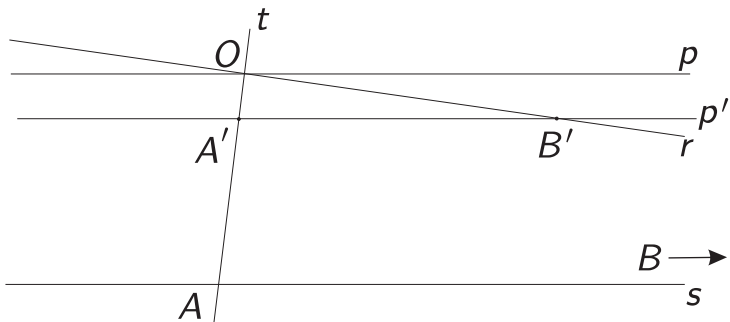
Se spostiamo di poco la retta p verso il basso, tenendo gli angoli come sopra, intuitivamente devono esistere A' e B' come indicato in figura.



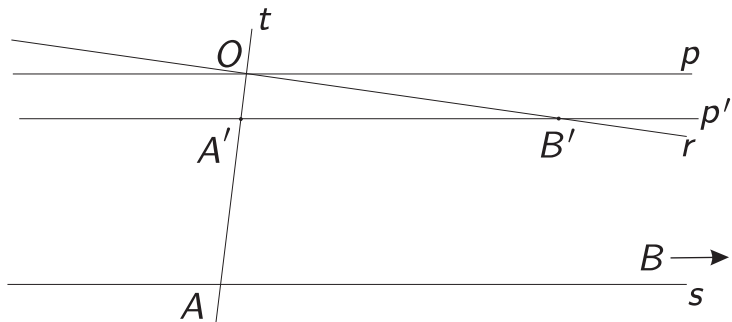
Se spostiamo di poco la retta p verso il basso, tenendo gli angoli come sopra, intuitivamente devono esistere A' e B' come indicato in figura. Ora, se esiste un triangolo simile a $A'OB'$ avente OA come lato corrispondente a OA' ,



Se spostiamo di poco la retta p verso il basso, tenendo gli angoli come sopra, intuitivamente devono esistere A' e B' come indicato in figura. Ora, se esiste un triangolo simile a $A'OB'$ avente OA come lato corrispondente a OA' , alla retta p' corrisponderà proprio la retta s , e quindi essa ammetterà su di essa un punto B tale che AOB sia simile ad $A'OB'$,



Se spostiamo di poco la retta p verso il basso, tenendo gli angoli come sopra, intuitivamente devono esistere A' e B' come indicato in figura. Ora, se esiste un triangolo simile a $A'OB'$ avente OA come lato corrispondente a OA' , alla retta p' corrisponderà proprio la retta s , e quindi essa ammetterà su di essa un punto B tale che AOB sia simile ad $A'OB'$, che sarà proprio il punto di intersezione delle due rette.



Se spostiamo di poco la retta p verso il basso, tenendo gli angoli come sopra, intuitivamente devono esistere A' e B' come indicato in figura. Ora, se esiste un triangolo simile a $A'OB'$ avente OA come lato corrispondente a OA' , alla retta p' corrisponderà proprio la retta s , e quindi essa ammetterà su di essa un punto B tale che AOB sia simile ad $A'OB'$, che sarà proprio il punto di intersezione delle due rette. Pertanto è dimostrato il postulato di Euclide. ■