

Serie geometriche

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Somme infinite

Quando si parla di **serie** in senso matematico, si intende una somma di **infinite** quantità.

Somme infinite

Quando si parla di **serie** in senso matematico, si intende una somma di **infinite** quantità.

In particolare, le serie **numeriche**, di cui parleremo, sono somme di infiniti numeri.

Somme infinite

Quando si parla di **serie** in senso matematico, si intende una somma di **infinite** quantità.

In particolare, le serie **numeriche**, di cui parleremo, sono somme di infiniti numeri.

Notate che in matematica spesso si sommano anche altre quantità: ad esempio vettori, polinomi, funzioni, e così via. Ma noi qui parleremo soltanto di somme di numeri reali.

Somme infinite

Quando si parla di **serie** in senso matematico, si intende una somma di **infinite** quantità.

In particolare, le serie **numeriche**, di cui parleremo, sono somme di infiniti numeri.

Notate che in matematica spesso si sommano anche altre quantità: ad esempio vettori, polinomi, funzioni, e così via. Ma noi qui parleremo soltanto di somme di numeri reali.

È ben chiaro che cosa vuol dire
– sommare due numeri $a_1 + a_2$,

Somme infinite

Quando si parla di **serie** in senso matematico, si intende una somma di **infinite** quantità.

In particolare, le serie **numeriche**, di cui parleremo, sono somme di infiniti numeri.

Notate che in matematica spesso si sommano anche altre quantità: ad esempio vettori, polinomi, funzioni, e così via. Ma noi qui parleremo soltanto di somme di numeri reali.

È ben chiaro che cosa vuol dire

- sommare due numeri $a_1 + a_2$,
- sommare tre numeri $a_1 + a_2 + a_3$ (magari usando la proprietà associativa della somma),

Somme infinite

Quando si parla di **serie** in senso matematico, si intende una somma di **infinite** quantità.

In particolare, le serie **numeriche**, di cui parleremo, sono somme di infiniti numeri.

Notate che in matematica spesso si sommano anche altre quantità: ad esempio vettori, polinomi, funzioni, e così via. Ma noi qui parleremo soltanto di somme di numeri reali.

È ben chiaro che cosa vuol dire

- sommare due numeri $a_1 + a_2$,
- sommare tre numeri $a_1 + a_2 + a_3$ (magari usando la proprietà associativa della somma),
- sommare quattro numeri $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$,

Somme infinite

Quando si parla di **serie** in senso matematico, si intende una somma di **infinite** quantità.

In particolare, le serie **numeriche**, di cui parleremo, sono somme di infiniti numeri.

Notate che in matematica spesso si sommano anche altre quantità: ad esempio vettori, polinomi, funzioni, e così via. Ma noi qui parleremo soltanto di somme di numeri reali.

È ben chiaro che cosa vuol dire

- sommare due numeri $a_1 + a_2$,
- sommare tre numeri $a_1 + a_2 + a_3$ (magari usando la proprietà associativa della somma),
- sommare quattro numeri $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$,
- eccetera eccetera

Serie convergenti

Diventa invece più complicato dare senso matematico all'idea di sommare infiniti numeri

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{100634} + a_{100635} + \cdots$$

Serie convergenti

Diventa invece più complicato dare senso matematico all'idea di sommare infiniti numeri

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{100634} + a_{100635} + \dots$$

Fare queste infinite addizioni significa calcolare la **somma di una serie**.

Serie convergenti

Diventa invece più complicato dare senso matematico all'idea di sommare infiniti numeri

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{100634} + a_{100635} + \dots$$

Fare queste infinite addizioni significa calcolare la **somma di una serie**. Forse la cosa più sorprendente di una serie, almeno all'inizio, è che la somma di infiniti numeri possa dare come risultato un numero finito. Invece questo può benissimo succedere, e anzi è proprio quello che rende interessanti le serie: quando una serie dà come risultato un numero, si dice che la serie **converge** a quel numero.

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità.

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà,

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà, quindi dividiamo a metà la parte destra,

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà, quindi dividiamo a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra,

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà, quindi dividiamo a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra,

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà, quindi dividiamo a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra,

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà, quindi dividiamo a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra. . .

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà, quindi dividiamo a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra. . .

Immaginiamo di ripetere il procedimento *infinite volte*: ad ogni passo otterremo una parte destra di segmento sempre più piccola, ma di lunghezza comunque positiva (in effetti, le lunghezze dei pezzettini si scriveranno come 2^{-n}).

Un esempio

Prima ancora di dare la definizione formale di somma di una serie, vediamo un esempio intuitivo di serie convergente.



Prendiamo un segmento, diciamo lungo 1 unità. Poi dividiamolo a metà, quindi dividiamo a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra, quindi ancora a metà la parte destra. . .

Immaginiamo di ripetere il procedimento *infinite volte*: ad ogni passo otterremo una parte destra di segmento sempre più piccola, ma di lunghezza comunque positiva (in effetti, le lunghezze dei pezzettini si scriveranno come 2^{-n}).

Se noi ora rimettiamo insieme tutti questi pezzettini, riotterremo la lunghezza iniziale, ovvero 1. Quindi **la somma di infiniti addendi, tutti positivi, può dare un numero finito.**

Il simbolo di sommatoria

Un simbolo molto comodo è quello di sommatoria: è la sigma maiuscola greca $\sum$. Ad esempio, per indicare la somma di dieci termini, indicati con $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, scriveremo

$$\sum_{k=1}^{10} a_k .$$

Il simbolo di sommatoria

Un simbolo molto comodo è quello di sommatoria: è la sigma maiuscola greca $\sum$. Ad esempio, per indicare la somma di dieci termini, indicati con $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, scriveremo

$$\sum_{k=1}^{10} a_k .$$

Come si vede, sotto il simbolo di sommatoria scriviamo l'indice e il suo valore iniziale, mentre sopra scriviamo il suo valore finale.

Il simbolo di sommatoria

Un simbolo molto comodo è quello di sommatoria: è la sigma maiuscola greca $\sum$. Ad esempio, per indicare la somma di dieci termini, indicati con $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, scriveremo

$$\sum_{k=1}^{10} a_k .$$

Come si vede, sotto il simbolo di sommatoria scriviamo l'indice e il suo valore iniziale, mentre sopra scriviamo il suo valore finale.

Se vogliamo denotare una somma infinita, scriveremo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Definizione di serie

Ma veniamo ora alla definizione precisa di serie.

Definizione di serie

Ma veniamo ora alla definizione precisa di serie.

La somma della serie di addendi (a_k) , se esiste, è data dal limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k ,$$

detta *successione delle somme parziali*.

Definizione di serie

Ma veniamo ora alla definizione precisa di serie.

La somma della serie di addendi (a_k) , se esiste, è data dal limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k ,$$

detta *successione delle somme parziali*.

Quindi formalmente, per sommare infiniti addendi, ne sommiamo un numero finito sempre più grande, ottenendo una successione, e prendiamo il limite della successione.

Definizione di serie

Ma veniamo ora alla definizione precisa di serie.

La somma della serie di addendi (a_k) , se esiste, è data dal limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k ,$$

detta *successione delle somme parziali*.

Quindi formalmente, per sommare infiniti addendi, ne sommiamo un numero finito sempre più grande, ottenendo una successione, e prendiamo il limite della successione.

Naturalmente tale limite potrebbe non esistere, ma è facile capire che se i termini a_k sono tutti positivi, allora il limite esiste e fa un numero positivo oppure $+\infty$.

Definizione di serie

Ma veniamo ora alla definizione precisa di serie.

La somma della serie di addendi (a_k) , se esiste, è data dal limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k ,$$

detta *successione delle somme parziali*.

Quindi formalmente, per sommare infiniti addendi, ne sommiamo un numero finito sempre più grande, ottenendo una successione, e prendiamo il limite della successione.

Naturalmente tale limite potrebbe non esistere, ma è facile capire che se i termini a_k sono tutti positivi, allora il limite esiste e fa un numero positivo oppure $+\infty$.

Le serie in cui tutti gli addendi sono positivi si chiamano, appunto, **serie a termini positivi**.

Definizione di serie

Ma veniamo ora alla definizione precisa di serie.

La somma della serie di addendi (a_k) , se esiste, è data dal limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k ,$$

detta *successione delle somme parziali*.

Quindi formalmente, per sommare infiniti addendi, ne sommiamo un numero finito sempre più grande, ottenendo una successione, e prendiamo il limite della successione.

Naturalmente tale limite potrebbe non esistere, ma è facile capire che se i termini a_k sono tutti positivi, allora il limite esiste e fa un numero positivo oppure $+\infty$.

Le serie in cui tutti gli addendi sono positivi si chiamano, appunto, **serie a termini positivi**. Le serie che danno come risultato un numero finito si dicono **convergenti**, quelle che vanno all'infinito si dicono **divergenti**.

Le serie geometriche

Tra le prime serie che si possono studiare troviamo le cosiddette **serie geometriche**.

Le serie geometriche

Tra le prime serie che si possono studiare troviamo le cosiddette **serie geometriche**.

In queste, la successione (a_k) degli addendi è una successione geometrica, ovvero esistono $q \in \mathbb{R}$, detto **ragione** della serie, e un coefficiente $a \in \mathbb{R}$, tali che

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad a_k = a \cdot q^k.$$

Le serie geometriche

Tra le prime serie che si possono studiare troviamo le cosiddette **serie geometriche**.

In queste, la successione (a_k) degli addendi è una successione geometrica, ovvero esistono $q \in \mathbb{R}$, detto **ragione** della serie, e un coefficiente $a \in \mathbb{R}$, tali che

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad a_k = a \cdot q^k.$$

Poiché il coefficiente a può essere raccolto a fattor comune da tutti gli addendi, e quindi va semplicemente a moltiplicare il risultato finale, possiamo anche pensare che si abbia $a = 1$. Quindi la serie geometrica si presenta più semplicemente nella forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Rappresentazione delle somme parziali

Per una serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ di ragione $q \neq 1$, le somme parziali hanno un'espressione abbastanza facile, ovvero:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Rappresentazione delle somme parziali

Per una serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ di ragione $q \neq 1$, le somme parziali hanno un'espressione abbastanza facile, ovvero:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Tale espressione, che i più temerari potranno dimostrare per induzione, si può intuire svolgendo il prodotto

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) =$$

Rappresentazione delle somme parziali

Per una serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ di ragione $q \neq 1$, le somme parziali hanno un'espressione abbastanza facile, ovvero:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Tale espressione, che i più temerari potranno dimostrare per induzione, si può intuire svolgendo il prodotto

$$\begin{aligned} (1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = \\ 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n+1} = \end{aligned}$$

Rappresentazione delle somme parziali

Per una serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ di ragione $q \neq 1$, le somme parziali hanno un'espressione abbastanza facile, ovvero:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Tale espressione, che i più temerari potranno dimostrare per induzione, si può intuire svolgendo il prodotto

$$\begin{aligned} (1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) &= \\ 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n+1} &= \\ 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Serie geometriche divergenti

Mediante l'uso della formula, possiamo capire quando una serie geometrica è convergente o divergente.

Serie geometriche divergenti

Mediante l'uso della formula, possiamo capire quando una serie geometrica è convergente o divergente.

Consideriamo il caso in cui q , la ragione della serie, sia più grande di 1. Allora è chiaro che i vari addendi q^k diventano sempre più grandi e tendono all'infinito. E infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = +\infty.$$

Quindi per $q > 1$ la serie diverge a $+\infty$.

Serie geometriche divergenti

Mediante l'uso della formula, possiamo capire quando una serie geometrica è convergente o divergente.

Consideriamo il caso in cui q , la ragione della serie, sia più grande di 1. Allora è chiaro che i vari addendi q^k diventano sempre più grandi e tendono all'infinito. E infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = +\infty.$$

Quindi per $q > 1$ la serie diverge a $+\infty$.

Il caso $q = 1$ porta alla stessa conclusione: stavolta non possiamo usare la formula, ma ragioniamo direttamente sulla serie: tutti gli addendi fanno identicamente 1, quindi la somma di infiniti di questi addendi esplode. Di nuovo la serie diverge a $+\infty$.

Serie geometriche non convergenti

Prendiamo ora il caso di $q < 0$. Gli addendi della serie sono a segni alterni: positivi se k è pari, negativi se k è dispari.

Serie geometriche non convergenti

Prendiamo ora il caso di $q < 0$. Gli addendi della serie sono a segni alterni: positivi se k è pari, negativi se k è dispari.

In particolare, se $q < -1$ il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ non esiste, poiché la successione va all'infinito in modulo, ma continua ad oscillare tra valori positivi e negativi.

Serie geometriche non convergenti

Prendiamo ora il caso di $q < 0$. Gli addendi della serie sono a segni alterni: positivi se k è pari, negativi se k è dispari.

In particolare, se $q < -1$ il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ non esiste, poiché la successione va all'infinito in modulo, ma continua ad oscillare tra valori positivi e negativi.

Anche se $q = -1$ il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ continua a non esistere, poiché la successione vale alternativamente 1 e -1 .

Serie geometriche non convergenti

Prendiamo ora il caso di $q < 0$. Gli addendi della serie sono a segni alterni: positivi se k è pari, negativi se k è dispari.

In particolare, se $q < -1$ il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ non esiste, poiché la successione va all'infinito in modulo, ma continua ad oscillare tra valori positivi e negativi.

Anche se $q = -1$ il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ continua a non esistere, poiché la successione vale alternativamente 1 e -1 .

Dalla formula di rappresentazione, che vale anche per $q < 0$, otteniamo

$$q \leq -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ non esiste}$$

e quindi la serie non converge.

Il caso $-1 < q < 1$

Se invece la ragione della serie verifica $-1 < q < 1$, allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

Il caso $-1 < q < 1$

Se invece la ragione della serie verifica $-1 < q < 1$, allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

e quindi dalla formula di rappresentazione

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Il caso $-1 < q < 1$

Se invece la ragione della serie verifica $-1 < q < 1$, allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

e quindi dalla formula di rappresentazione

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

In questo caso sappiamo non solo che la serie è convergente, ma anche quanto fa la somma.

Il caso $-1 < q < 1$

Se invece la ragione della serie verifica $-1 < q < 1$, allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

e quindi dalla formula di rappresentazione

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

In questo caso sappiamo non solo che la serie è convergente, ma anche quanto fa la somma.

Tale risultato è notevole: in generale capita che può essere abbastanza facile capire se una serie converge o diverge; di solito è invece estremamente più difficile capire quanto risulta.

Per le serie geometriche invece sappiamo esattamente il risultato.

Altre serie geometriche

Finora abbiamo considerato il caso delle serie geometriche che partono dall'esponente 0 (ovvero il cui primo addendo faccia 1). Se invece abbiamo a che fare con serie geometriche che partono da un esponente più alto, è sufficiente raccogliere la ragione q un certo numero di volte, e ricondursi a una serie di quelle trattate.

Altre serie geometriche

Finora abbiamo considerato il caso delle serie geometriche che partono dall'esponente 0 (ovvero il cui primo addendo faccia 1). Se invece abbiamo a che fare con serie geometriche che partono da un esponente più alto, è sufficiente raccogliere la ragione q un certo numero di volte, e ricondursi a una serie di quelle trattate.

Ad esempio, se la serie parte dall'esponente 1 possiamo fare così:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \dots = q(1 + q + q^2 + \dots) = q \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q}{1 - q}.$$

Altre serie geometriche

Finora abbiamo considerato il caso delle serie geometriche che partono dall'esponente 0 (ovvero il cui primo addendo faccia 1). Se invece abbiamo a che fare con serie geometriche che partono da un esponente più alto, è sufficiente raccogliere la ragione q un certo numero di volte, e ricondursi a una serie di quelle trattate.

Ad esempio, se la serie parte dall'esponente 1 possiamo fare così:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \dots = q(1 + q + q^2 + \dots) = q \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q}{1 - q}.$$

In generale, se la serie parte dall'esponente p si avrà

$$\sum_{k=p}^{\infty} q^k = q^p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^p}{1 - q}.$$

Esempio del segmento

Verifichiamo la formula appena trovata mediante l'esempio del segmento tagliato a metà: abbiamo visto che ogni pezzo del segmento è lungo 2^{-k} , quindi abbiamo a che fare con una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$. Inoltre il primo esponente della serie è $k \geq 1$.

Esempio del segmento

Verifichiamo la formula appena trovata mediante l'esempio del segmento tagliato a metà: abbiamo visto che ogni pezzo del segmento è lungo 2^{-k} , quindi abbiamo a che fare con una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$.

Inoltre il primo esponente della serie è $k \geq 1$.

Quindi si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

e infatti ritroviamo proprio la lunghezza iniziale del segmento.

Rappresentazione dei numeri periodici

Vediamo una semplice applicazione delle serie geometriche: si vuole calcolare la frazione corrispondente a un dato numero decimale periodico (la cosiddetta **frazione generatrice**).

Rappresentazione dei numeri periodici

Vediamo una semplice applicazione delle serie geometriche: si vuole calcolare la frazione corrispondente a un dato numero decimale periodico (la cosiddetta **frazione generatrice**).

Per questo, basta ricondursi a una serie geometrica di ragione $10^{-\ell}$, dove ℓ è la lunghezza del periodo del numero considerato, moltiplicata per il periodo stesso.

Rappresentazione dei numeri periodici

Vediamo una semplice applicazione delle serie geometriche: si vuole calcolare la frazione corrispondente a un dato numero decimale periodico (la cosiddetta **frazione generatrice**).

Per questo, basta ricondursi a una serie geometrica di ragione $10^{-\ell}$, dove ℓ è la lunghezza del periodo del numero considerato, moltiplicata per il periodo stesso.

Ad esempio: qual'è la frazione generatrice di $0,\overline{81} = 0,81818181\dots$?

Rappresentazione dei numeri periodici

Vediamo una semplice applicazione delle serie geometriche: si vuole calcolare la frazione corrispondente a un dato numero decimale periodico (la cosiddetta **frazione generatrice**).

Per questo, basta ricondursi a una serie geometrica di ragione $10^{-\ell}$, dove ℓ è la lunghezza del periodo del numero considerato, moltiplicata per il periodo stesso.

Ad esempio: qual'è la frazione generatrice di $0,\overline{81} = 0,81818181\dots$?

Si ha ovviamente

$$0,\overline{81} = \sum_{k=1}^{\infty} 81 \cdot 10^{-2k} = 81 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k} = 81 \frac{100}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}.$$

Rappresentazione dei numeri periodici

Vediamo una semplice applicazione delle serie geometriche: si vuole calcolare la frazione corrispondente a un dato numero decimale periodico (la cosiddetta **frazione generatrice**).

Per questo, basta ricondursi a una serie geometrica di ragione $10^{-\ell}$, dove ℓ è la lunghezza del periodo del numero considerato, moltiplicata per il periodo stesso.

Ad esempio: qual'è la frazione generatrice di $0,\overline{81} = 0,81818181\dots$?

Si ha ovviamente

$$0,\overline{81} = \sum_{k=1}^{\infty} 81 \cdot 10^{-2k} = 81 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k} = 81 \frac{100}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}.$$

In questo modo si può anche verificare che $0,\overline{9} = 1$, infatti:

Rappresentazione dei numeri periodici

Vediamo una semplice applicazione delle serie geometriche: si vuole calcolare la frazione corrispondente a un dato numero decimale periodico (la cosiddetta **frazione generatrice**).

Per questo, basta ricondursi a una serie geometrica di ragione $10^{-\ell}$, dove ℓ è la lunghezza del periodo del numero considerato, moltiplicata per il periodo stesso.

Ad esempio: qual'è la frazione generatrice di $0,\overline{81} = 0,81818181\dots$?

Si ha ovviamente

$$0,\overline{81} = \sum_{k=1}^{\infty} 81 \cdot 10^{-2k} = 81 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k} = 81 \frac{100}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}.$$

In questo modo si può anche verificare che $0,\overline{9} = 1$, infatti:

$$0,\overline{9} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Numeri periodici semplici

Proviamo a dedurre una regola generale nel caso in cui il numero periodico si **semplice**, ovvero non abbia un antiperiodo: scriveremo in generale $0,\overline{b}$, dove il periodo b ha lunghezza ℓ .

Numeri periodici semplici

Proviamo a dedurre una regola generale nel caso in cui il numero periodico si **semplice**, ovvero non abbia un antiperiodo: scriveremo in generale $0,\overline{b}$, dove il periodo b ha lunghezza ℓ .

Allora si ha

$$0,\overline{b} = b \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^{\ell}} \right)^k = b \frac{\frac{1}{10^{\ell}}}{1 - \frac{1}{10^{\ell}}} = \frac{b}{10^{\ell} - 1}.$$

Numeri periodici semplici

Proviamo a dedurre una regola generale nel caso in cui il numero periodico si **semplice**, ovvero non abbia un antiperiodo: scriveremo in generale $0,\overline{b}$, dove il periodo b ha lunghezza ℓ .

Allora si ha

$$0,\overline{b} = b \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^{\ell}} \right)^k = b \frac{\frac{1}{10^{\ell}}}{1 - \frac{1}{10^{\ell}}} = \frac{b}{10^{\ell} - 1}.$$

Quindi la regola è, tradotta in parole: si mette a numeratore il periodo e a denominatore il numero fatto da tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo.

Numeri periodici semplici

Proviamo a dedurre una regola generale nel caso in cui il numero periodico si **semplice**, ovvero non abbia un antiperiodo: scriveremo in generale $0,\overline{b}$, dove il periodo b ha lunghezza ℓ .

Allora si ha

$$0,\overline{b} = b \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^{\ell}} \right)^k = b \frac{\frac{1}{10^{\ell}}}{1 - \frac{1}{10^{\ell}}} = \frac{b}{10^{\ell} - 1}.$$

Quindi la regola è, tradotta in parole: si mette a numeratore il periodo e a denominatore il numero fatto da tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo.

Infatti, nell'esempio precedente, $0,\overline{81} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$.

Numeri con antiperiodo

Supponiamo ora di avere anche un cosiddetto **antiperiodo**, ovvero una parte fissa prima del periodo, ad esempio $0,3\overline{52}$.

Numeri con antiperiodo

Supponiamo ora di avere anche un cosiddetto **antiperiodo**, ovvero una parte fissa prima del periodo, ad esempio $0,3\overline{52}$.

In questo caso si esprime facilmente la parte fissa $0,3$ come la frazione $\frac{3}{10}$, a cui si somma la parte periodica moltiplicata per una potenza di 10 opportuna:

Numeri con antiperiodo

Supponiamo ora di avere anche un cosiddetto **antiperiodo**, ovvero una parte fissa prima del periodo, ad esempio $0,3\overline{52}$.

In questo caso si esprime facilmente la parte fissa $0,3$ come la frazione $\frac{3}{10}$, a cui si somma la parte periodica moltiplicata per una potenza di 10 opportuna:

$$\begin{aligned}0,3\overline{52} &= \frac{3}{10} + 10 \sum_{k=1}^{\infty} 52 \cdot \frac{1}{100^k} = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{52}{10} \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{52}{990} = \frac{349}{990}.\end{aligned}$$

Numeri con antiperiodo

Supponiamo ora di avere anche un cosiddetto **antiperiodo**, ovvero una parte fissa prima del periodo, ad esempio $0,3\overline{52}$.

In questo caso si esprime facilmente la parte fissa $0,3$ come la frazione $\frac{3}{10}$, a cui si somma la parte periodica moltiplicata per una potenza di 10 opportuna:

$$\begin{aligned}0,3\overline{52} &= \frac{3}{10} + 10 \sum_{k=1}^{\infty} 52 \cdot \frac{1}{100^k} = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{52}{10} \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{52}{990} = \frac{349}{990}.\end{aligned}$$

In questo modo è possibile associare ad ogni numero periodico una frazione che lo genera.

Un'applicazione in economia

Vediamo un'applicazione delle serie geometriche legata all'economia: il cosiddetto **moltiplicatore keynesiano**.

Un'applicazione in economia

Vediamo un'applicazione delle serie geometriche legata all'economia: il cosiddetto **moltiplicatore keynesiano**.

(John Maynard Keynes è stato un famoso economista inglese, morto nel 1946).

Un'applicazione in economia

Vediamo un'applicazione delle serie geometriche legata all'economia: il cosiddetto **moltiplicatore keynesiano**.

(John Maynard Keynes è stato un famoso economista inglese, morto nel 1946).

Denotiamo con p la cosiddetta “propensione marginale al consumo”, ovvero la frazione del proprio reddito che una persona spende come consumatore (e che quindi viene reinvestita nel mercato).

Un'applicazione in economia

Vediamo un'applicazione delle serie geometriche legata all'economia: il cosiddetto **moltiplicatore keynesiano**.

(John Maynard Keynes è stato un famoso economista inglese, morto nel 1946).

Denotiamo con p la cosiddetta “propensione marginale al consumo”, ovvero la frazione del proprio reddito che una persona spende come consumatore (e che quindi viene reinvestita nel mercato).

Naturalmente $p \in [0, 1]$, e di solito è abbastanza vicina a 1.

Un'applicazione in economia

Vediamo un'applicazione delle serie geometriche legata all'economia: il cosiddetto **moltiplicatore keynesiano**.

(John Maynard Keynes è stato un famoso economista inglese, morto nel 1946).

Denotiamo con p la cosiddetta “propensione marginale al consumo”, ovvero la frazione del proprio reddito che una persona spende come consumatore (e che quindi viene reinvestita nel mercato).

Naturalmente $p \in [0, 1]$, e di solito è abbastanza vicina a 1.

Ora ci chiediamo:

se viene messo sul mercato nazionale un capitale C , ad esempio tramite un investimento dello stato, quale sarà la crescita globale del mercato, ovvero del PIL, il prodotto interno lordo?

Un'applicazione in economia

Vediamo un'applicazione delle serie geometriche legata all'economia: il cosiddetto **moltiplicatore keynesiano**.

(John Maynard Keynes è stato un famoso economista inglese, morto nel 1946).

Denotiamo con p la cosiddetta “propensione marginale al consumo”, ovvero la frazione del proprio reddito che una persona spende come consumatore (e che quindi viene reinvestita nel mercato).

Naturalmente $p \in [0, 1]$, e di solito è abbastanza vicina a 1.

Ora ci chiediamo:

se viene messo sul mercato nazionale un capitale C , ad esempio tramite un investimento dello stato, quale sarà la crescita globale del mercato, ovvero del PIL, il prodotto interno lordo?

L'idea è che un investimento statale genera un reddito per alcuni, i quali a loro volta spenderanno una parte del loro reddito verso altri, che spenderanno una parte del loro reddito verso altri ancora, eccetera.

Un'applicazione in economia

Traduciamo questo ragionamento in formule: se C è il capitale iniziale investito, questo diventa reddito per qualcuno, che poi ne spenderà una parte pC di nuovo sul mercato.

Un'applicazione in economia

Traduciamo questo ragionamento in formule: se C è il capitale iniziale investito, questo diventa reddito per qualcuno, che poi ne spenderà una parte pC di nuovo sul mercato. Ora pC diventa reddito per qualcun altro, che ne spenderà la parte $ppC = p^2C$ ancora sul mercato, e così via.

Un'applicazione in economia

Traduciamo questo ragionamento in formule: se C è il capitale iniziale investito, questo diventa reddito per qualcuno, che poi ne spenderà una parte pC di nuovo sul mercato. Ora pC diventa reddito per qualcun altro, che ne spenderà la parte $ppC = p^2C$ ancora sul mercato, e così via. Quindi sul mercato avremo un giro di investimenti dato da

$$C + pC + p^2C + p^3C + \dots = C \sum_{k=0} p^k.$$

Un'applicazione in economia

Traduciamo questo ragionamento in formule: se C è il capitale iniziale investito, questo diventa reddito per qualcuno, che poi ne spenderà una parte pC di nuovo sul mercato. Ora pC diventa reddito per qualcun altro, che ne spenderà la parte $ppC = p^2C$ ancora sul mercato, e così via. Quindi sul mercato avremo un giro di investimenti dato da

$$C + pC + p^2C + p^3C + \dots = C \sum_{k=0} p^k.$$

In realtà, la somma non diventerà mai una serie, perché non possiamo pensare che verranno fatti infiniti acquisti, ma il numero di passaggi sarà comunque talmente elevato che possiamo pensare che questi siano infiniti.

Un'applicazione in economia

Traduciamo questo ragionamento in formule: se C è il capitale iniziale investito, questo diventa reddito per qualcuno, che poi ne spenderà una parte pC di nuovo sul mercato. Ora pC diventa reddito per qualcun altro, che ne spenderà la parte $ppC = p^2C$ ancora sul mercato, e così via. Quindi sul mercato avremo un giro di investimenti dato da

$$C + pC + p^2C + p^3C + \dots = C \sum_{k=0} p^k.$$

In realtà, la somma non diventerà mai una serie, perché non possiamo pensare che verranno fatti infiniti acquisti, ma il numero di passaggi sarà comunque talmente elevato che possiamo pensare che questi siano infiniti. Quindi il giro di investimenti generato da un capitale C diventa

$$C \sum_{k=0}^{\infty} p^k = C \frac{1}{1-p}.$$

Un'applicazione in economia

Abbiamo trovato che un capitale C genera investimenti per un valore

$$C \frac{1}{1-p}.$$

Il fattore $\frac{1}{1-p}$ è proprio ciò che viene chiamato **moltiplicatore keynesiano**, e misura la crescita generata dall'investimento iniziale.

Un'applicazione in economia

Abbiamo trovato che un capitale C genera investimenti per un valore

$$C \frac{1}{1-p}.$$

Il fattore $\frac{1}{1-p}$ è proprio ciò che viene chiamato **moltiplicatore keynesiano**, e misura la crescita generata dall'investimento iniziale. Naturalmente, più la propensione al consumo p è vicina a 1, e più il moltiplicatore keynesiano diventa grande. Ad esempio, se $p = 0,6$ il moltiplicatore vale 2,5, ma se $p = 0,9$ il moltiplicatore vale 10.