Rette e fasci di rette

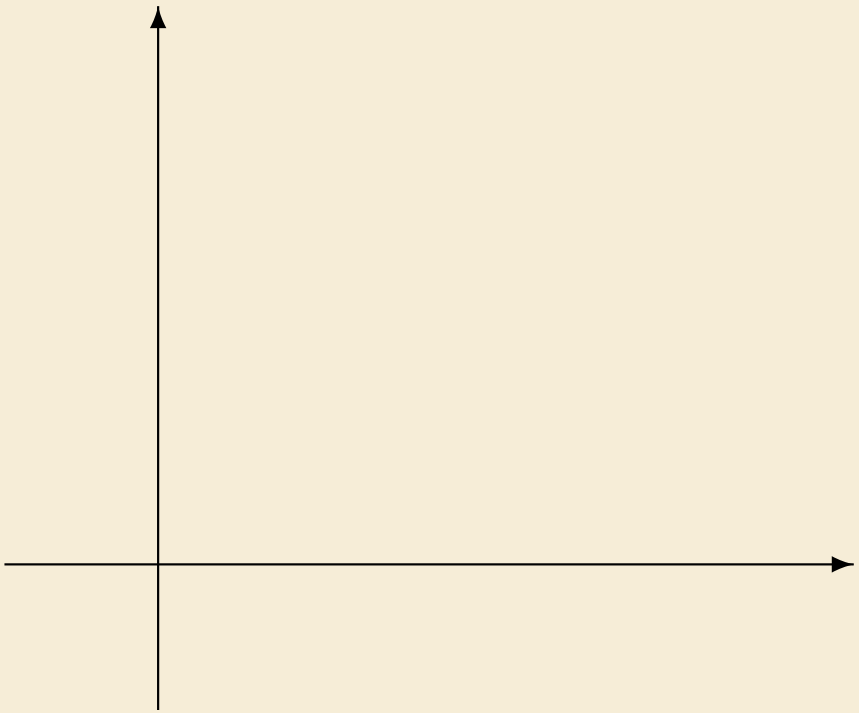
Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

30 giugno 2009

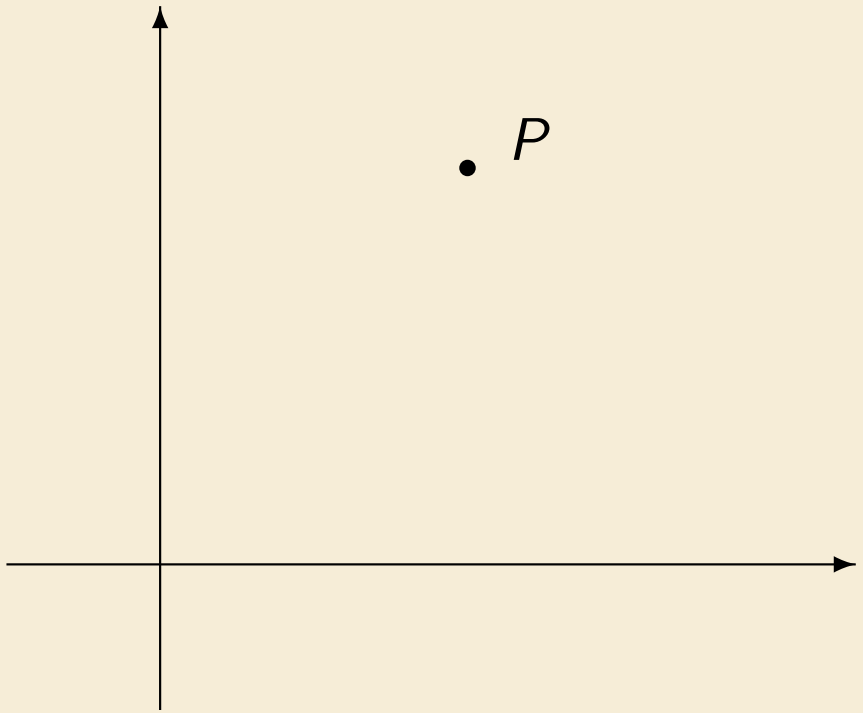
Il piano cartesiano

Fissare in un piano un **sistema di riferimento cartesiano** vuol dire prendere due rette ortogonali orientate.



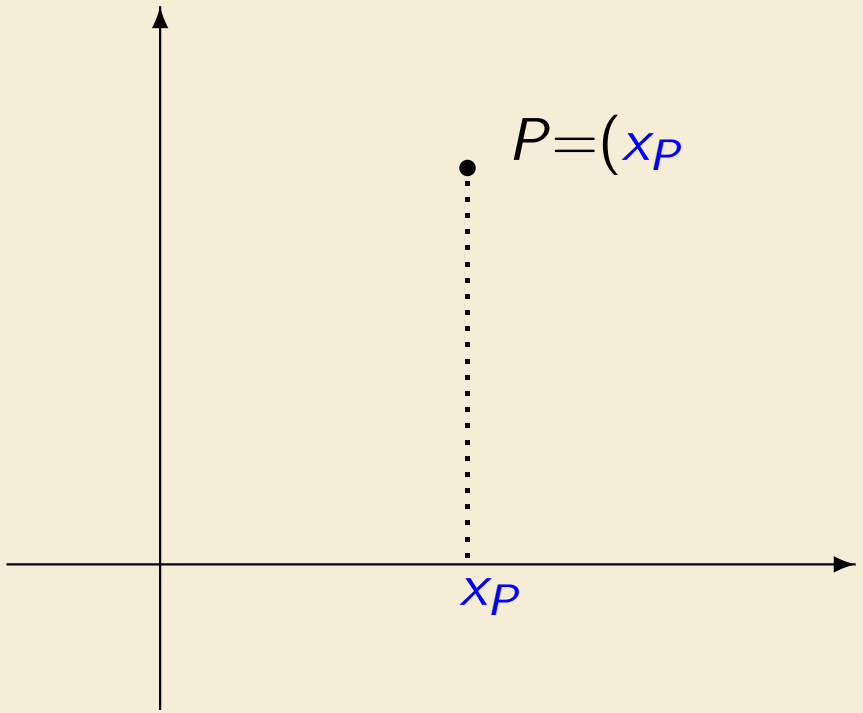
Il piano cartesiano

Fissare in un piano un **sistema di riferimento cartesiano** vuol dire prendere due rette ortogonali orientate. È un modo per dare un nome, o meglio un'etichetta, a tutti i punti del piano. Questa etichetta è composta da una coppia di numeri, presi in modo ordinato,



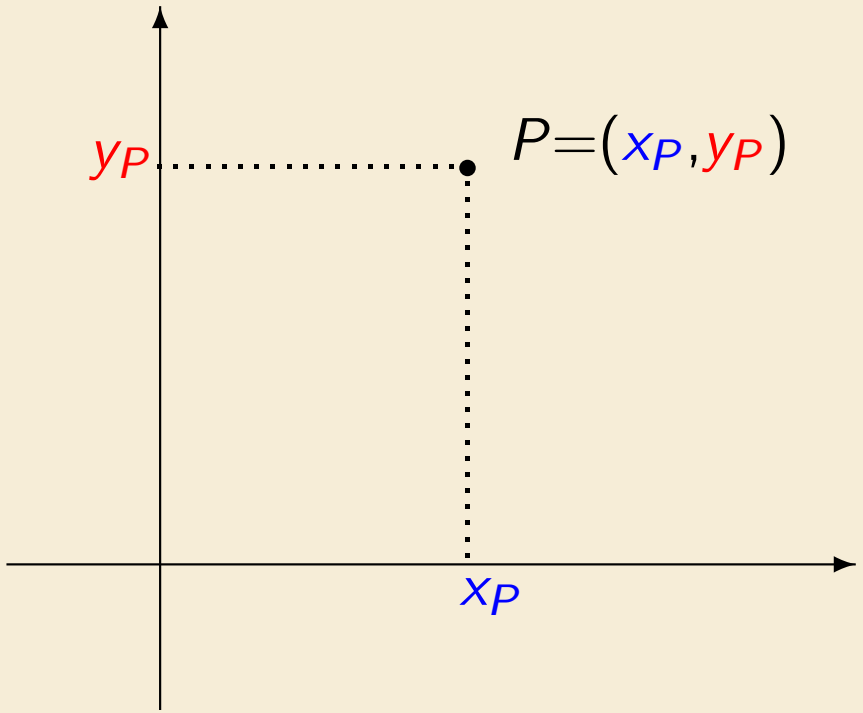
Il piano cartesiano

Fissare in un piano un **sistema di riferimento cartesiano** vuol dire prendere due rette ortogonali orientate. È un modo per dare un nome, o meglio un'etichetta, a tutti i punti del piano. Questa etichetta è composta da una coppia di numeri, presi in modo ordinato, detti ascissa



Il piano cartesiano

Fissare in un piano un **sistema di riferimento cartesiano** vuol dire prendere due rette ortogonali orientate. È un modo per dare un nome, o meglio un'etichetta, a tutti i punti del piano. Questa etichetta è composta da una coppia di numeri, presi in modo ordinato, detti ascissa e ordinata del punto.



Il piano cartesiano

In questo modo, si crea una corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri.

Il piano cartesiano

In questo modo, si crea una corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri. Obiettivo principale della geometria analitica infatti è quello di trasformare enti geometrici in enti algebrici.

Il piano cartesiano

In questo modo, si crea una corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri. Obiettivo principale della geometria analitica infatti è quello di trasformare enti geometrici in enti algebrici.
In particolare,

$$\text{punti} \quad \longrightarrow \quad \text{(coppie di) numeri},$$

Il piano cartesiano

In questo modo, si crea una corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri. Obiettivo principale della geometria analitica infatti è quello di trasformare enti geometrici in enti algebrici.
In particolare,

$$\begin{array}{lcl} \text{punti} & \longrightarrow & \text{(coppie di) numeri}, \\ \text{curve} & \longrightarrow & \text{equazioni}, \end{array}$$

Il piano cartesiano

In questo modo, si crea una corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri. Obiettivo principale della geometria analitica infatti è quello di trasformare enti geometrici in enti algebrici.
In particolare,

$$\begin{aligned} \text{punti} &\longrightarrow \text{(coppie di) numeri}, \\ \text{curve} &\longrightarrow \text{equazioni}, \\ \text{intersezioni} &\longrightarrow \text{sistemi algebrici}, \end{aligned}$$

Il piano cartesiano

In questo modo, si crea una corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri. Obiettivo principale della geometria analitica infatti è quello di trasformare enti geometrici in enti algebrici.
In particolare,

$$\begin{array}{rcl} \text{punti} & \longrightarrow & \text{(coppie di) numeri}, \\ \text{curve} & \longrightarrow & \text{equazioni}, \\ \text{intersezioni} & \longrightarrow & \text{sistemi algebrici}, \end{array}$$

eccetera. Così facendo, si possono utilizzare i metodi dell'algebra per risolvere problemi di geometria.

Il piano cartesiano

Ad esempio, il punto medio di un segmento AB, che è un concetto tipicamente geometrico, si trova tramite una manipolazione algebrica delle coordinate dei punti:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Il piano cartesiano

Ad esempio, il punto medio di un segmento AB, che è un concetto tipicamente geometrico, si trova tramite una manipolazione algebrica delle coordinate dei punti:

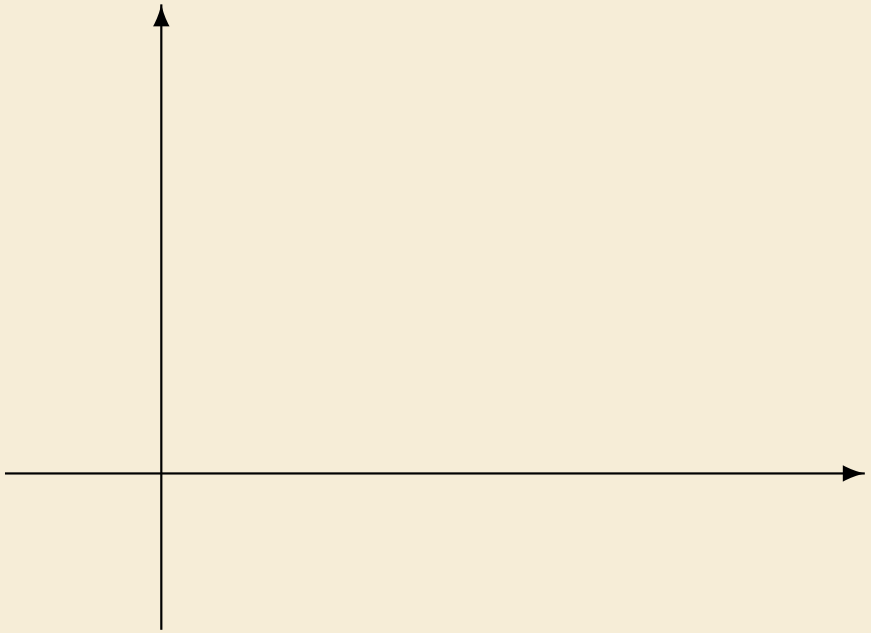
$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Oppure, si calcola la distanza tra due punti P e Q mediante le loro coordinate in questo modo:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}\,.$$

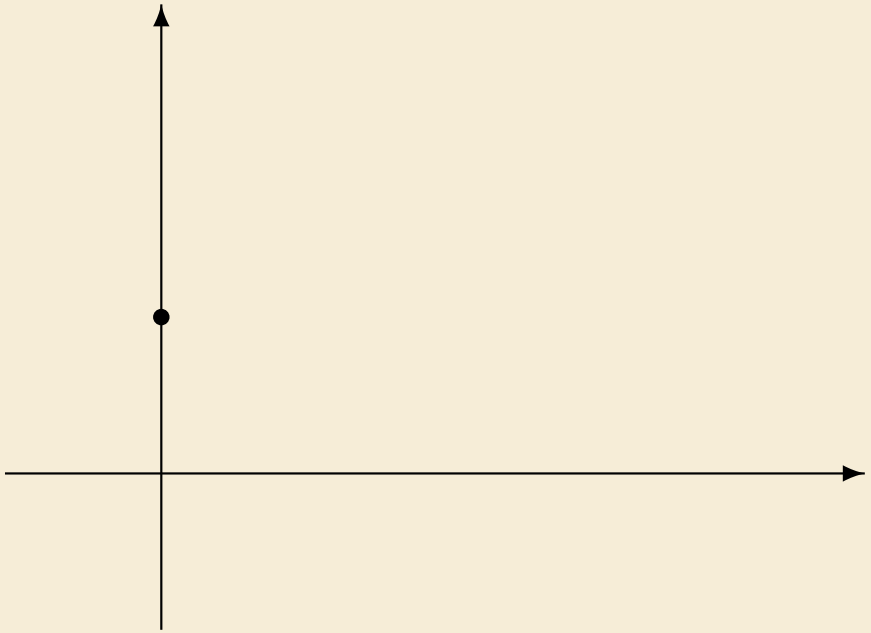
La retta orizzontale

Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti:



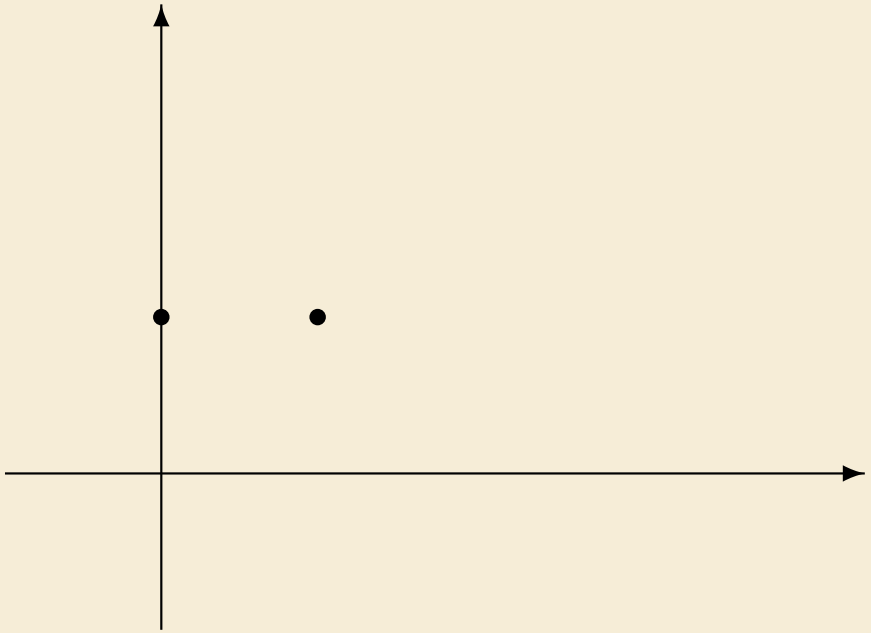
La retta orizzontale

Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti: $(0, 1)$,



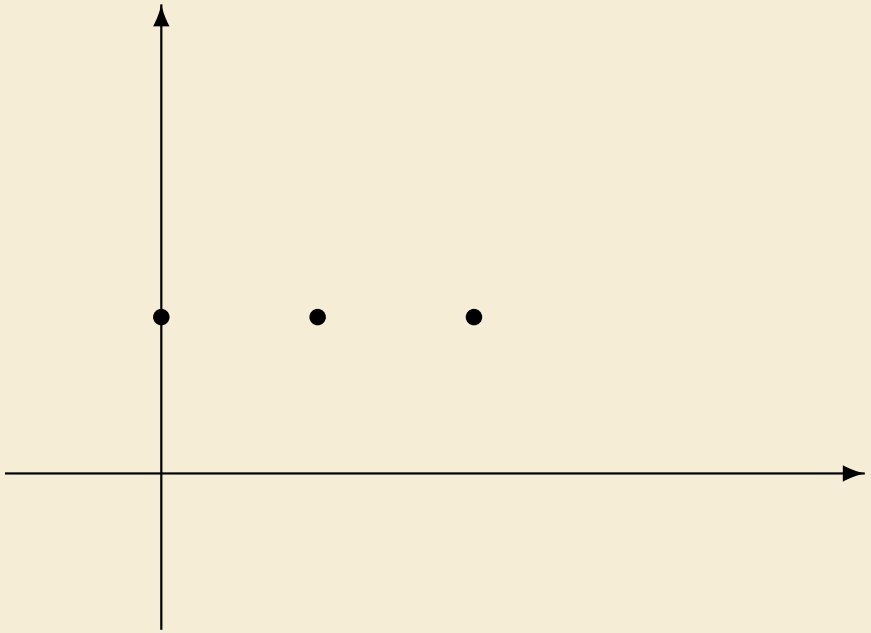
La retta orizzontale

Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti: $(0, 1)$, $(1, 1)$,



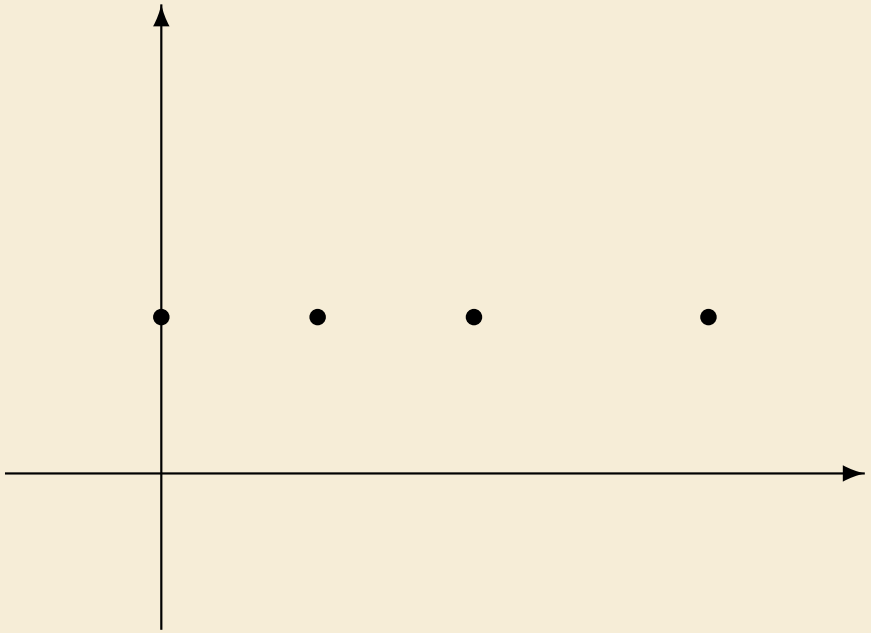
La retta orizzontale

Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$,



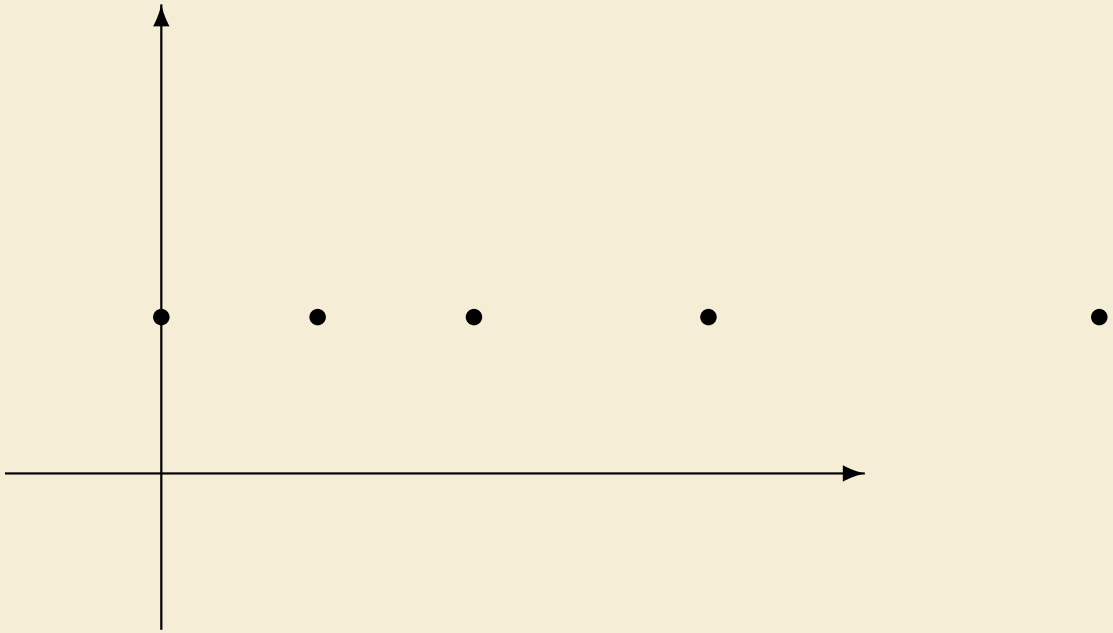
La retta orizzontale

Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(\frac{7}{2}, 1)$,



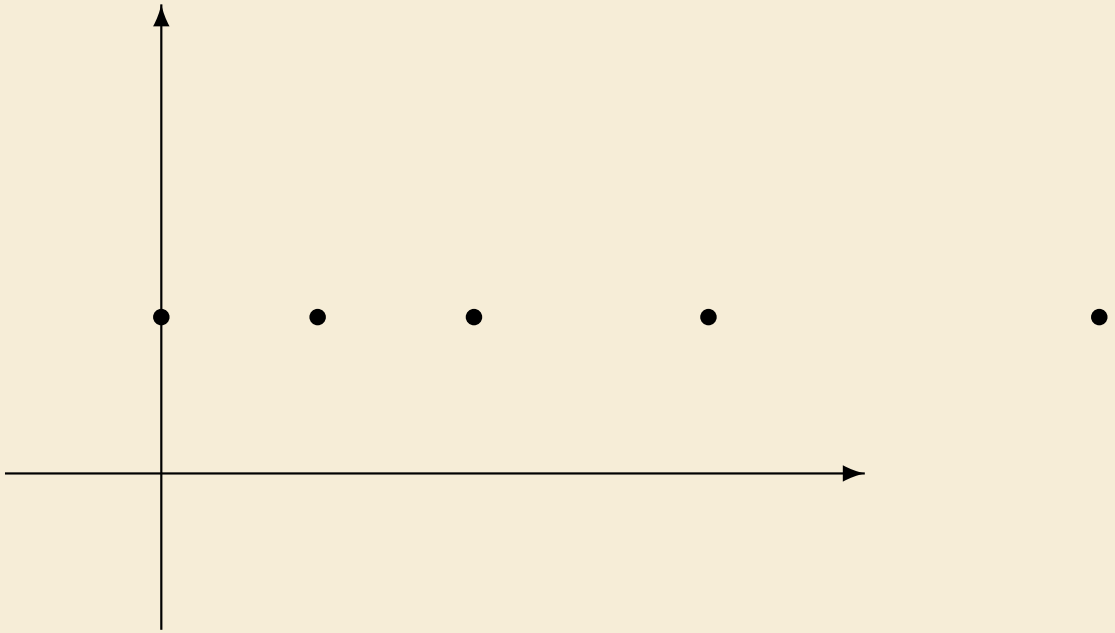
La retta orizzontale

Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(\frac{7}{2}, 1)$, $(6, 1)\ldots$



La retta orizzontale

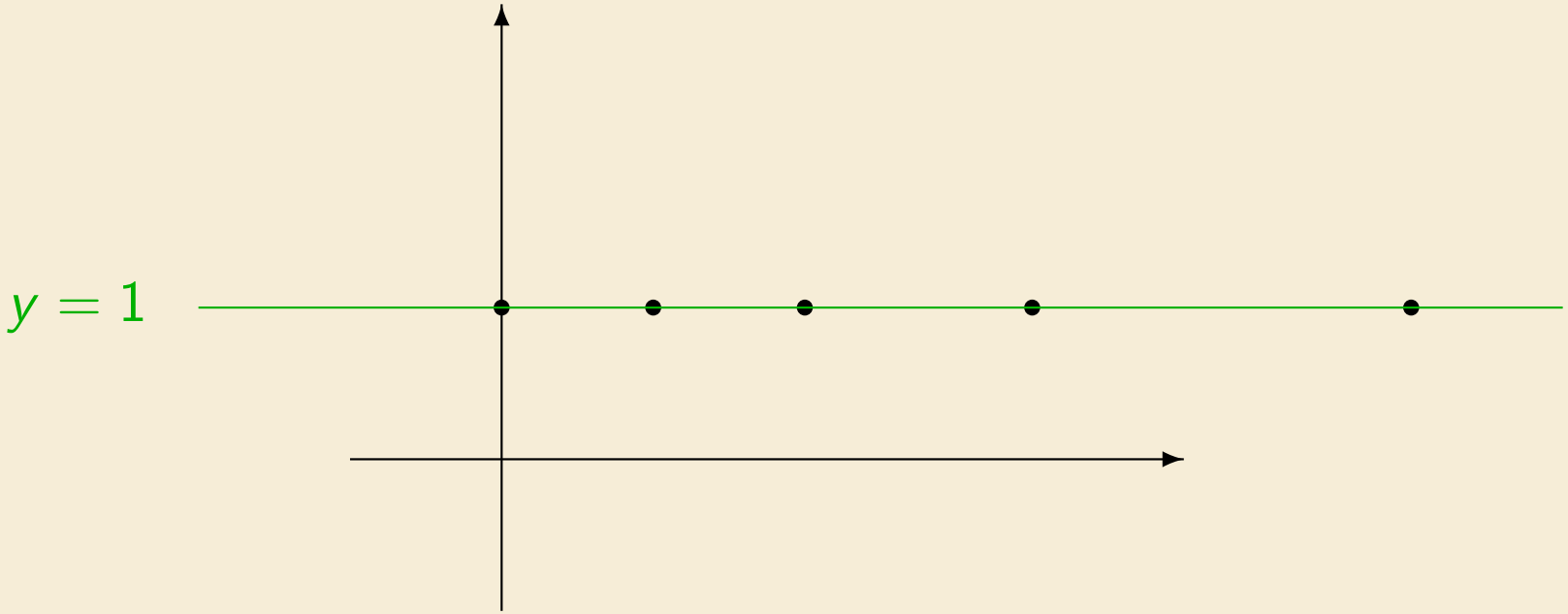
Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(\frac{7}{2}, 1)$, $(6, 1)\ldots$



Essi si collocano tutti su una retta orizzontale, e hanno la caratteristica comune di avere la stessa ordinata $y = 1$.

La retta orizzontale

Cerchiamo di capire come si possa descrivere, per cominciare, una retta orizzontale. Consideriamo alcuni punti: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(\frac{7}{2}, 1)$, $(6, 1)$...



Essi si collocano tutti su una retta orizzontale, e hanno la caratteristica comune di avere la stessa ordinata $y = 1$.

La retta è data proprio dall'**equazione** $\boxed{y = 1}$.

La retta orizzontale

Cerchiamo di capire bene cosa significa che quella retta ha equazione $y = 1$.

La retta orizzontale

Cerchiamo di capire bene cosa significa che quella retta ha equazione $y = 1$.
La retta è ovviamente un insieme di punti, e i punti che stanno sulla retta sono quelli, e solo quelli, che hanno l'ordinata (ovvero la y) uguale a 1. Quindi la retta è descritta mediante un'**equazione** che ha come incognite le coordinate (x, y).

La retta orizzontale

Cerchiamo di capire bene cosa significa che quella retta ha equazione $y = 1$.
La retta è ovviamente un insieme di punti, e i punti che stanno sulla retta sono quelli, e solo quelli, che hanno l'ordinata (ovvero la y) uguale a 1. Quindi la retta è descritta mediante un'**equazione** che ha come incognite le coordinate (x, y).
Tale equazione è fatta in modo che tutte le sue soluzioni siano le coordinate di tutti e soli i punti della retta in questione.

La retta orizzontale

Cerchiamo di capire bene cosa significa che quella retta ha equazione $y = 1$.
La retta è ovviamente un insieme di punti, e i punti che stanno sulla retta sono quelli, e solo quelli, che hanno l'ordinata (ovvero la y) uguale a 1. Quindi la retta è descritta mediante un'**equazione** che ha come incognite le coordinate (x, y).
Tale equazione è fatta in modo che tutte le sue soluzioni siano le coordinate di tutti e soli i punti della retta in questione.
Anche se in questo caso non vediamo la x, si intende che $\boxed{y = 1}$ è un'equazione in (x, y). Qui la x ha coefficiente zero.

Rette orizzontali e verticali

In generale, ogni retta orizzontale è rappresentata da un'equazione del tipo

$$y = h$$

dove h è una costante che ci dice a quale "altezza" si trova la retta (ovvero, in quale punto la retta taglia l'asse verticale).

Rette orizzontali e verticali

In generale, ogni retta orizzontale è rappresentata da un'equazione del tipo

$$y = h$$

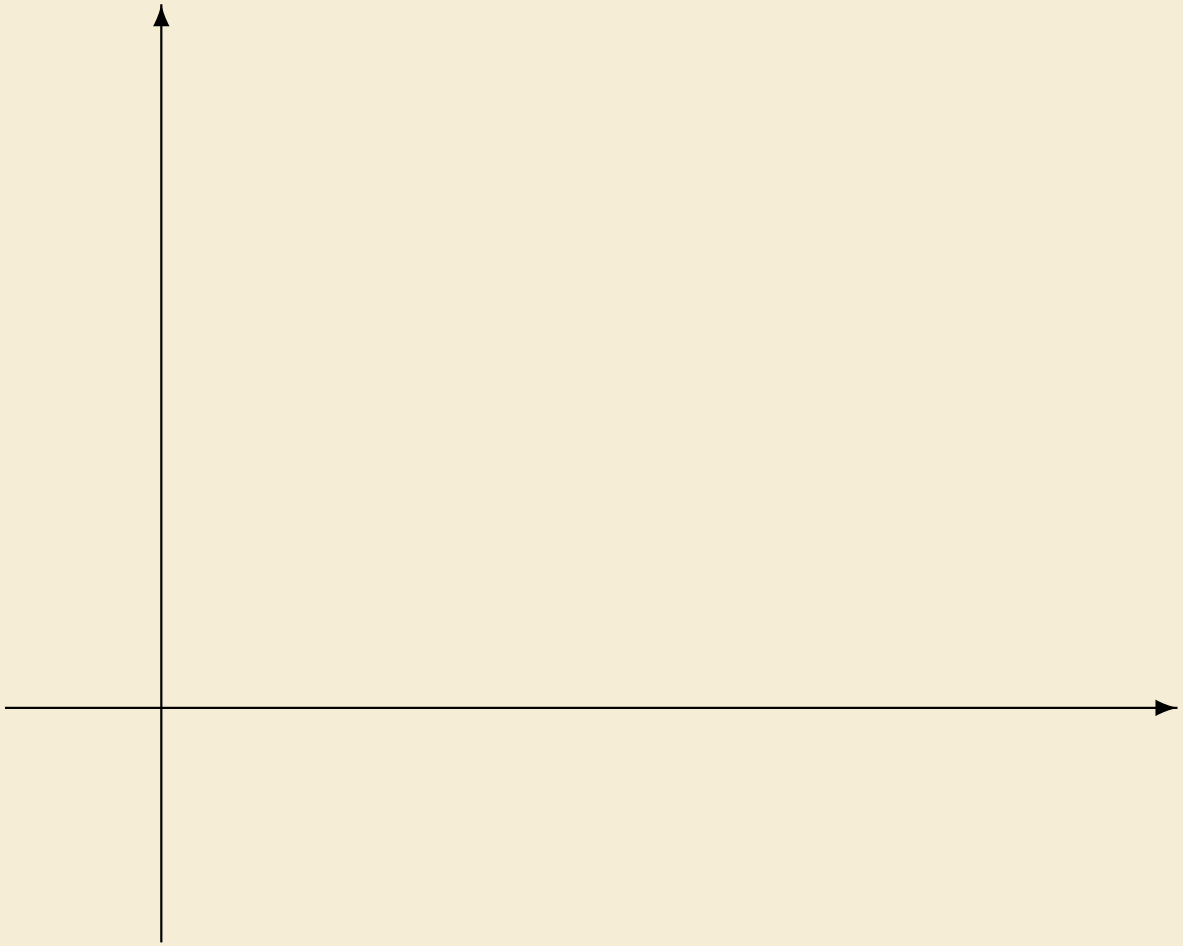
dove h è una costante che ci dice a quale "altezza" si trova la retta (ovvero, in quale punto la retta taglia l'asse verticale).

Ugualmente, ogni retta verticale è rappresentata da un'equazione del tipo

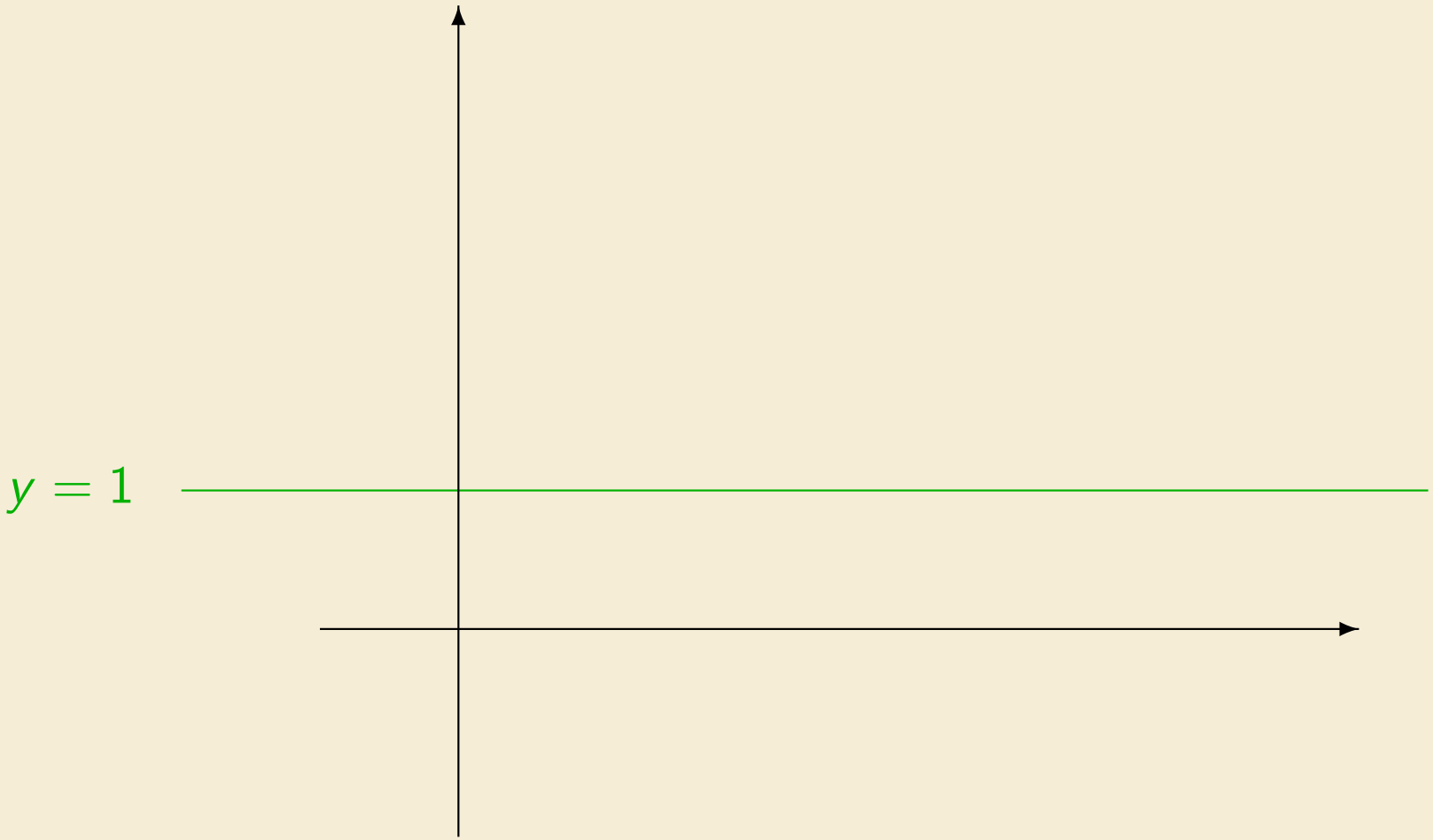
$$x = k$$

dove k è una costante che ci dice in quale punto la retta taglia l'asse orizzontale.

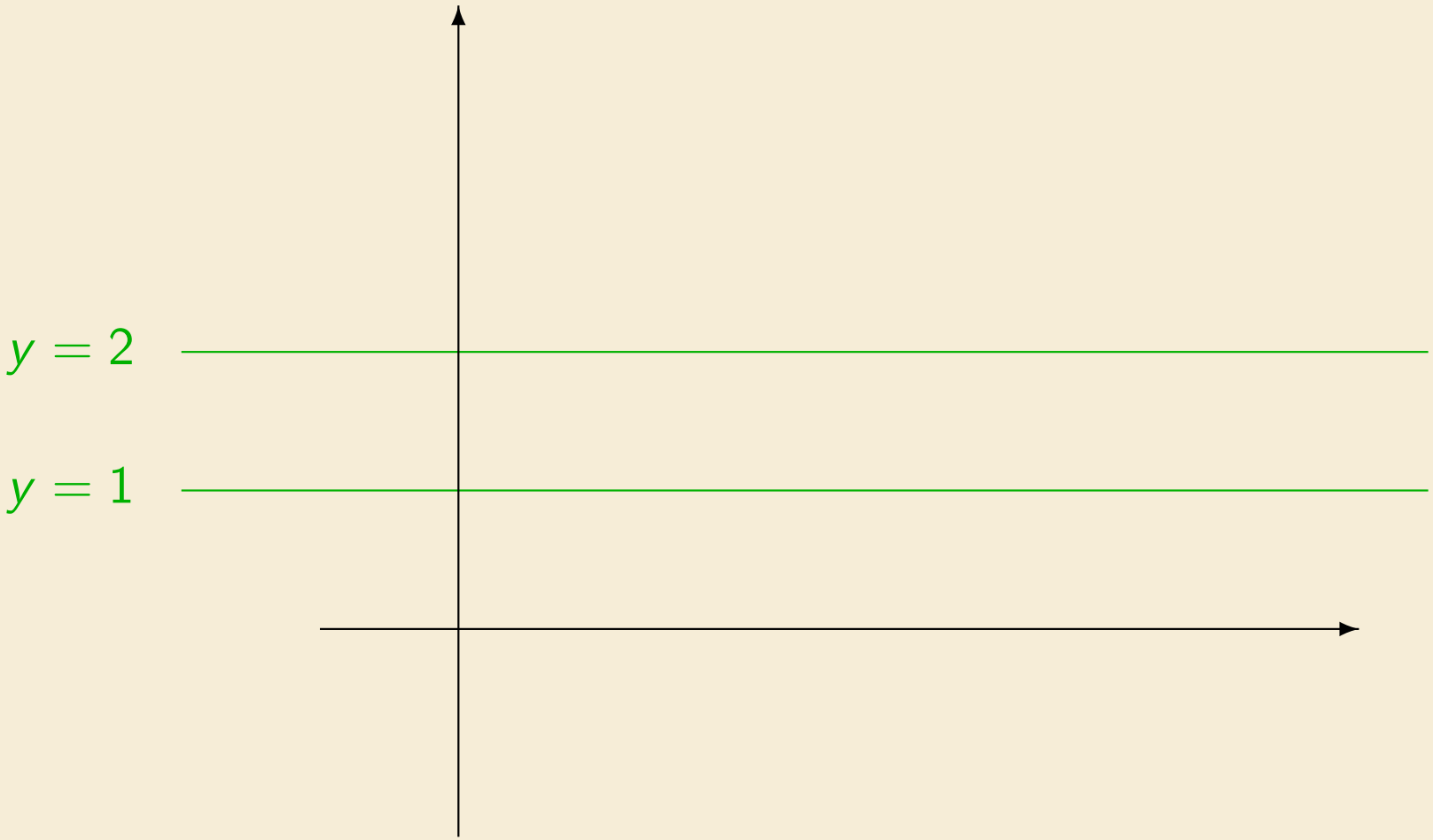
Rette orizzontali e verticali



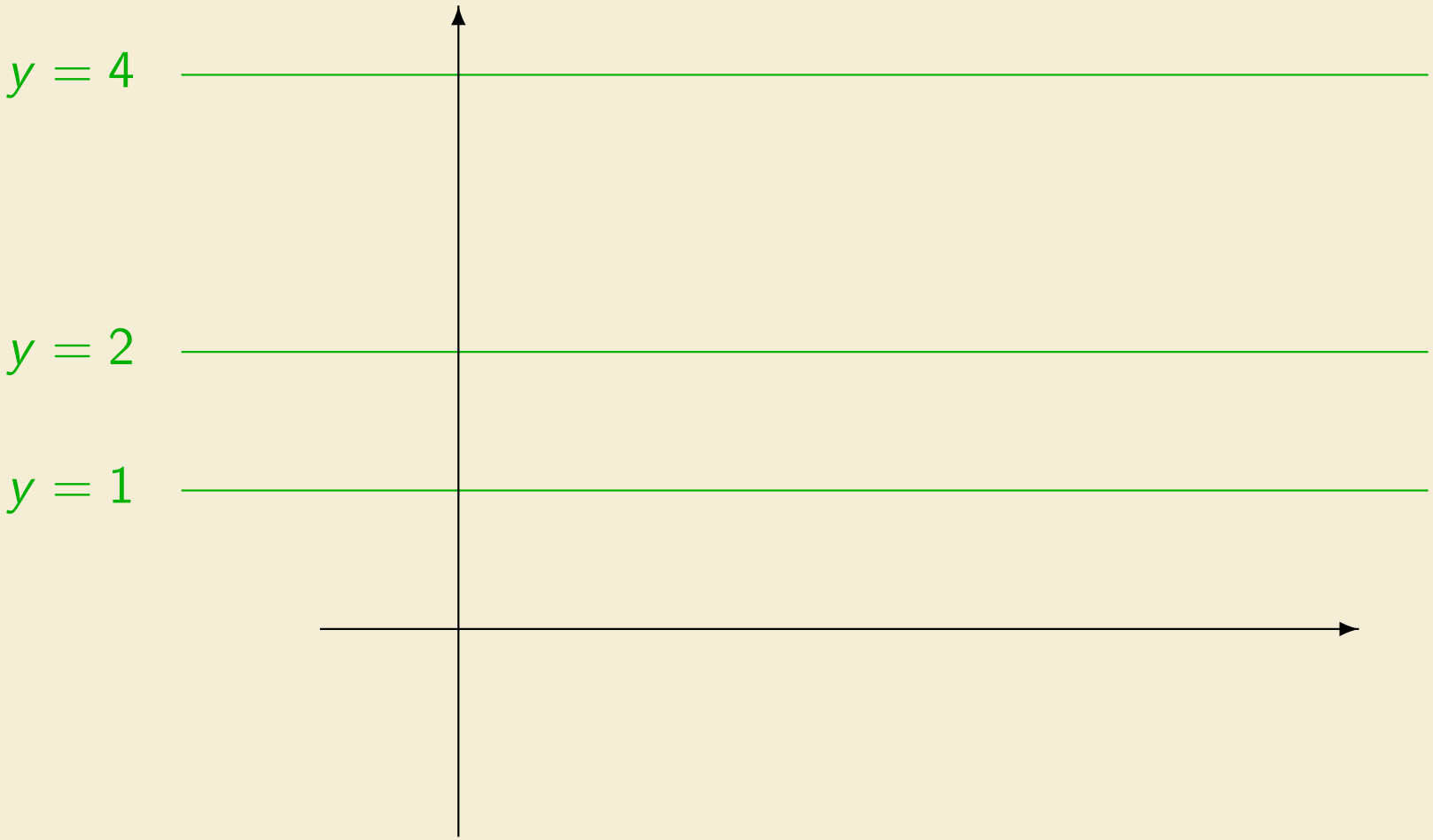
Rette orizzontali e verticali



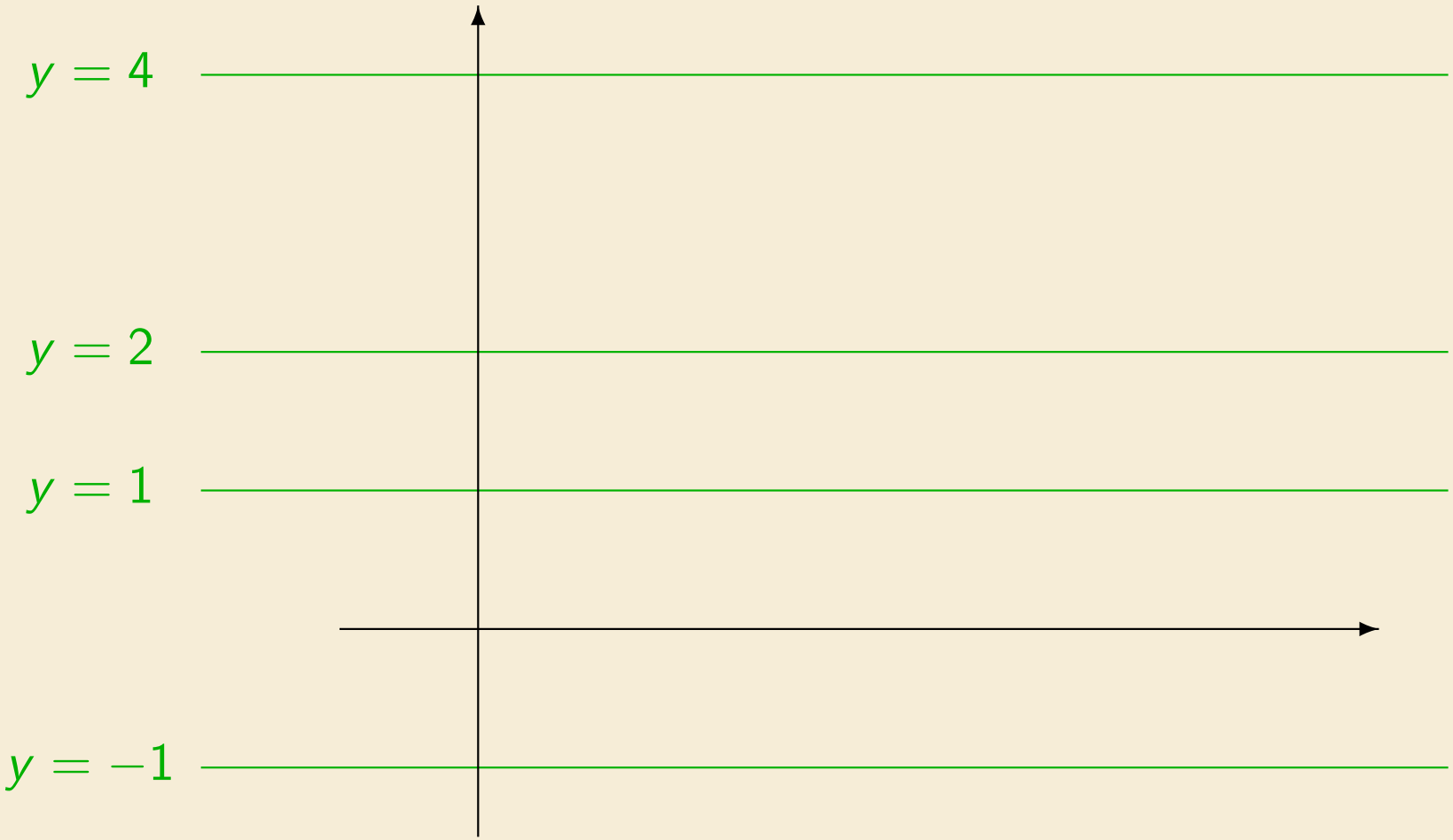
Rette orizzontali e verticali



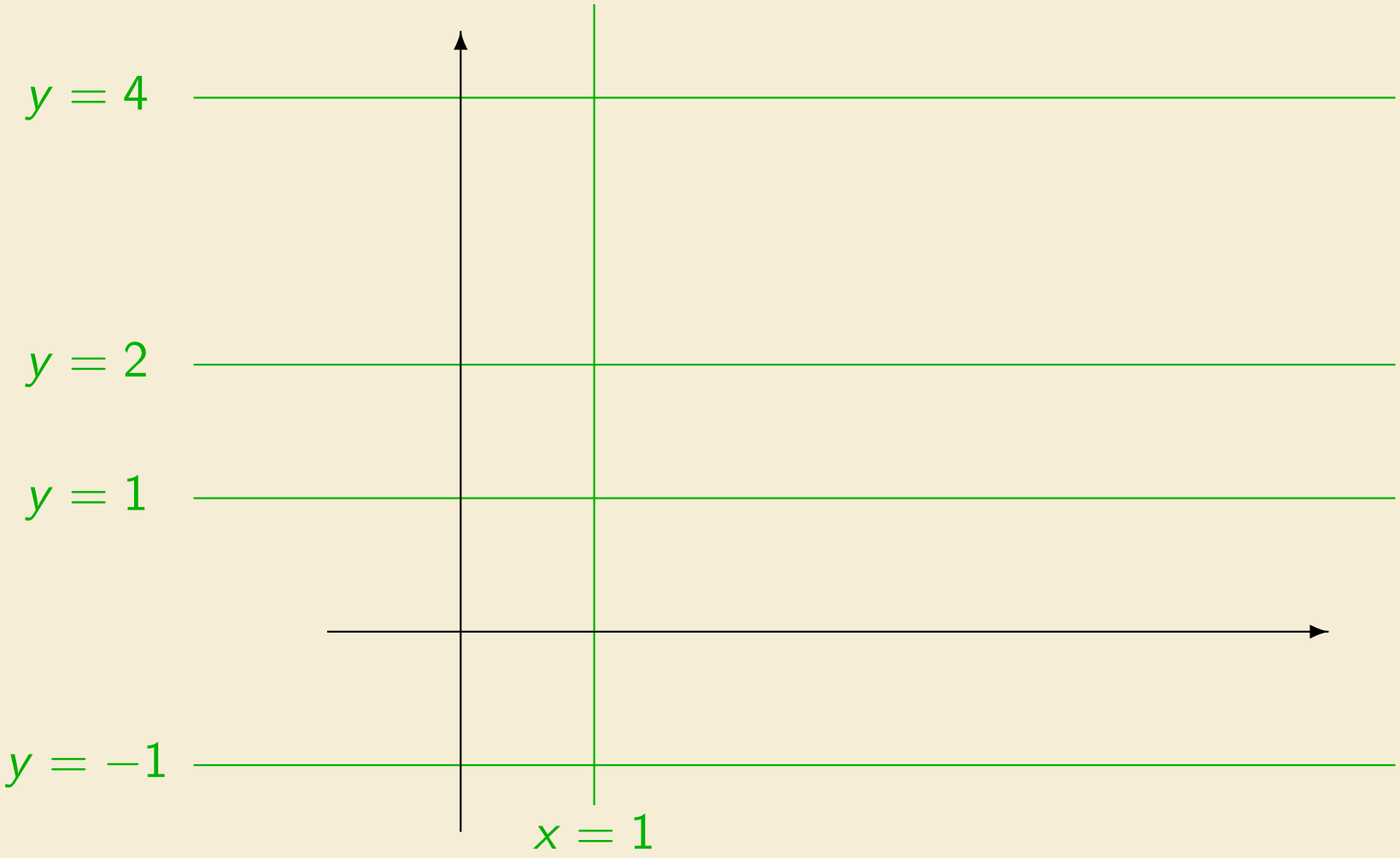
Rette orizzontali e verticali



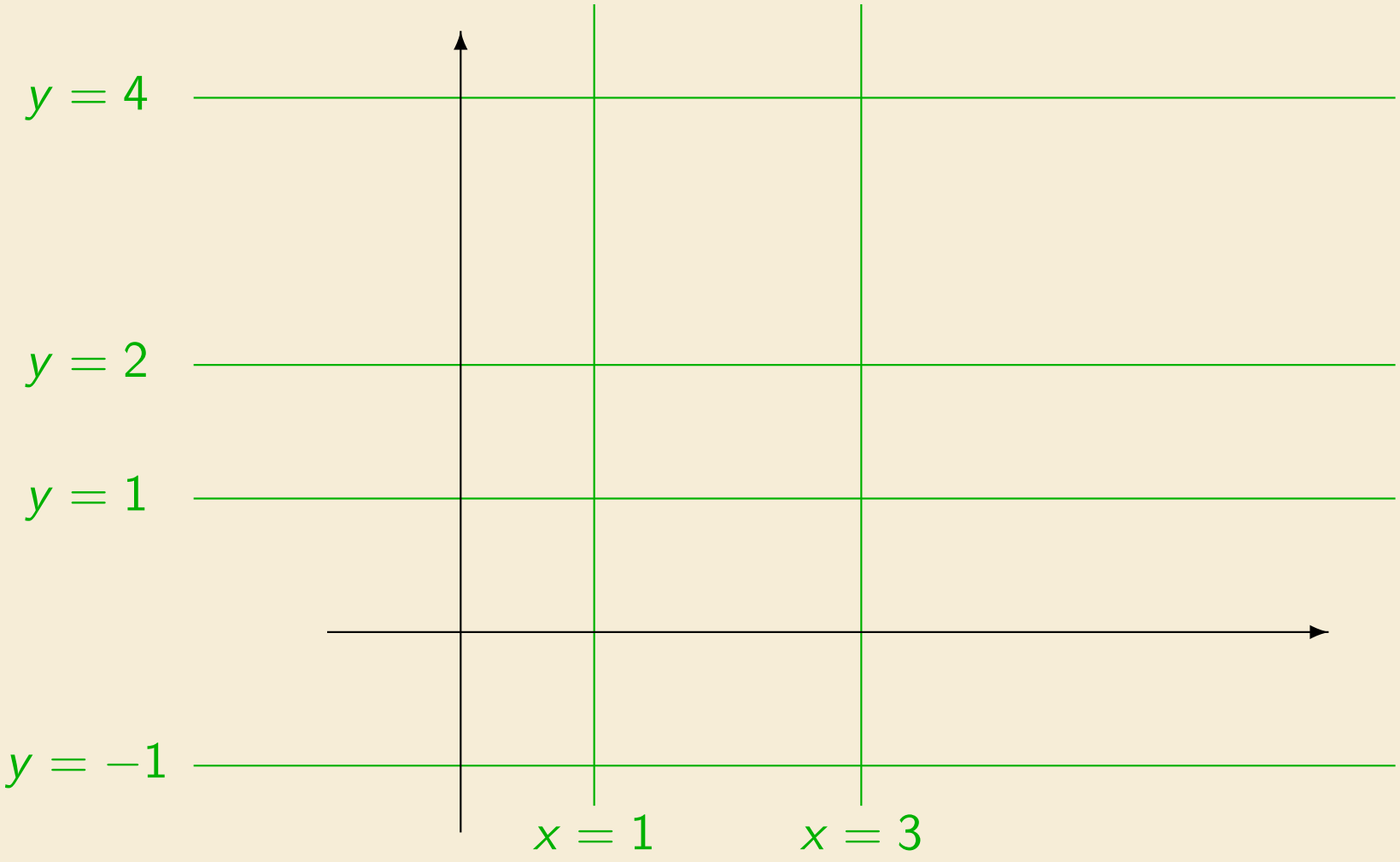
Rette orizzontali e verticali



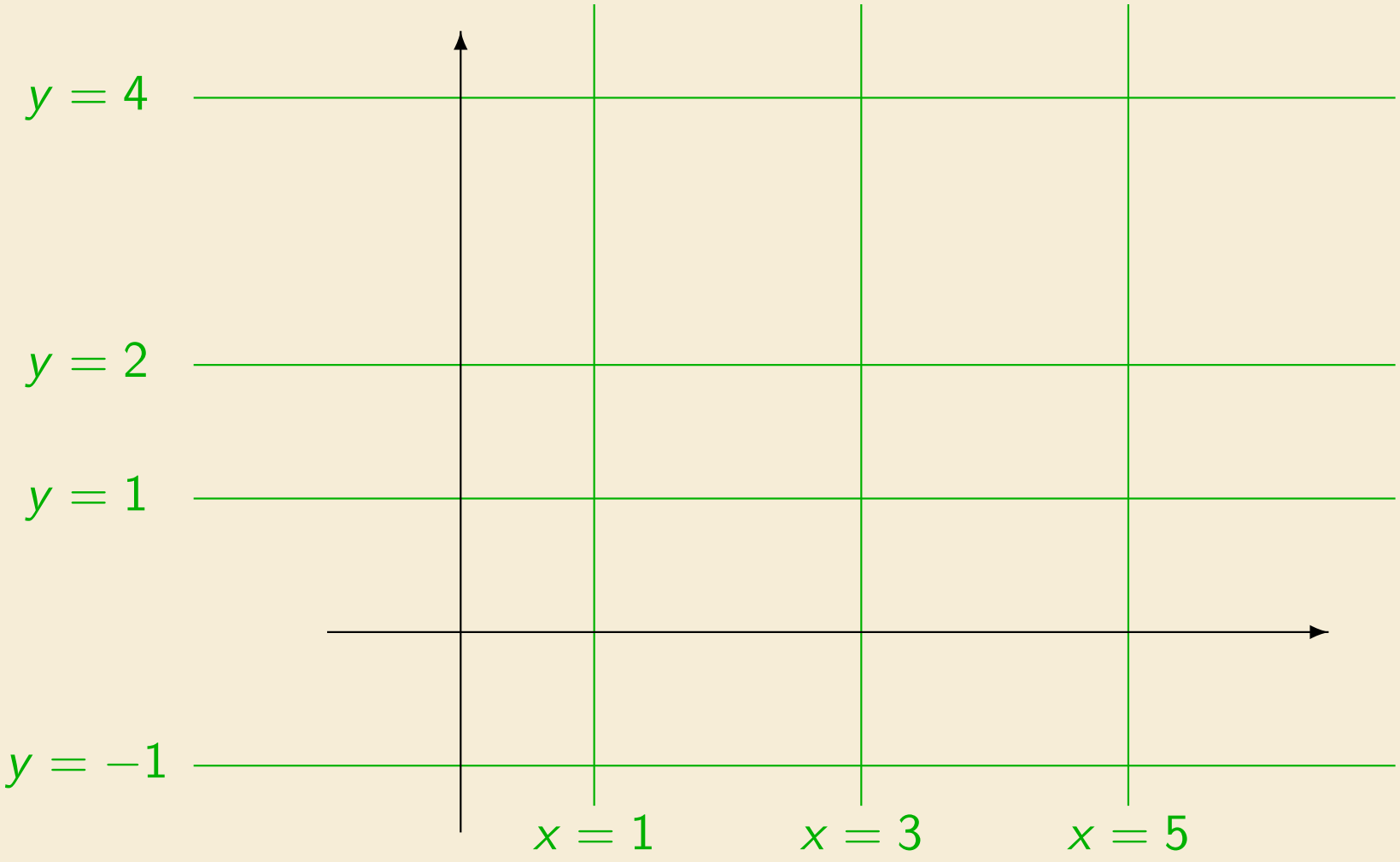
Rette orizzontali e verticali



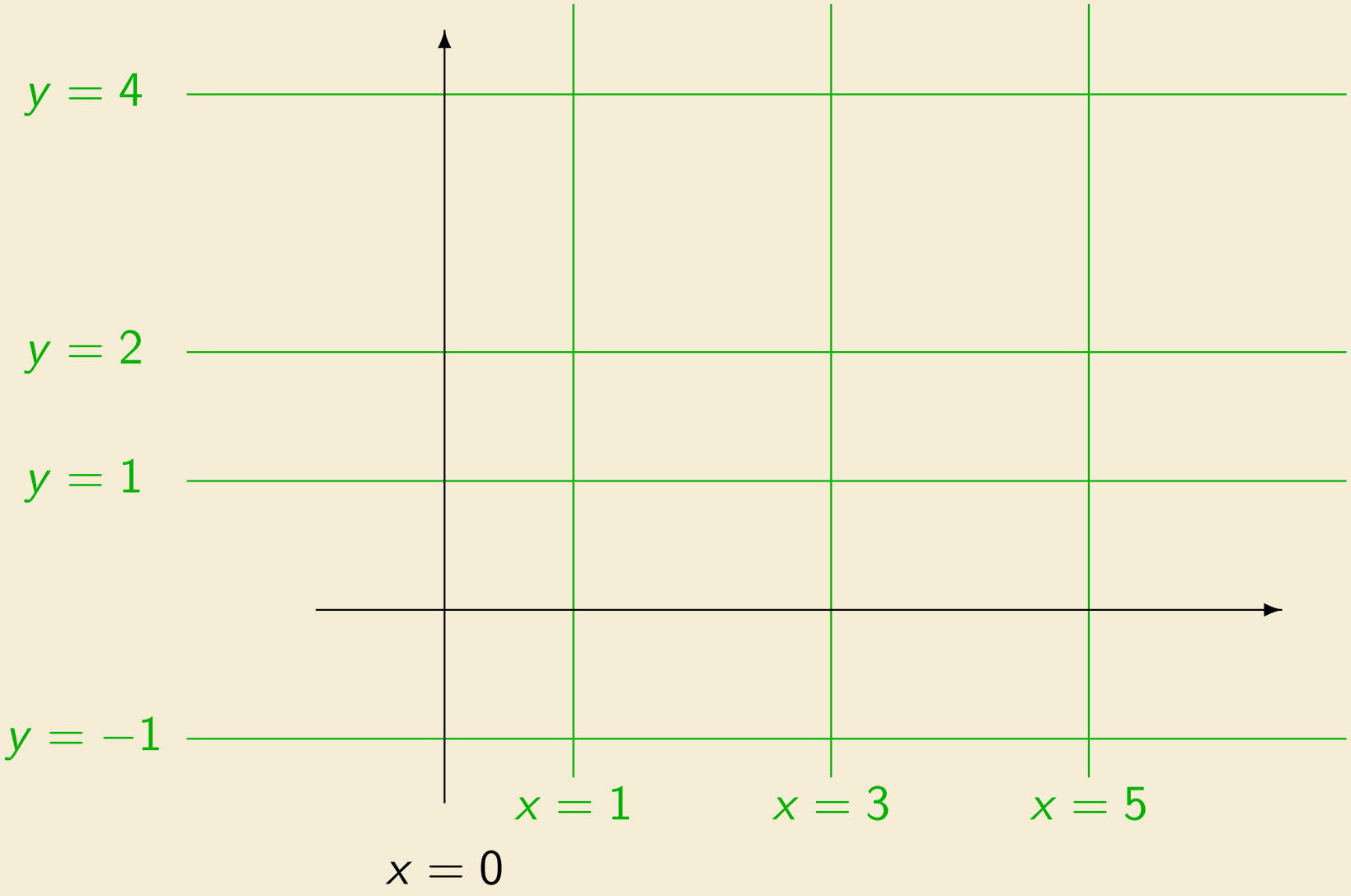
Rette orizzontali e verticali



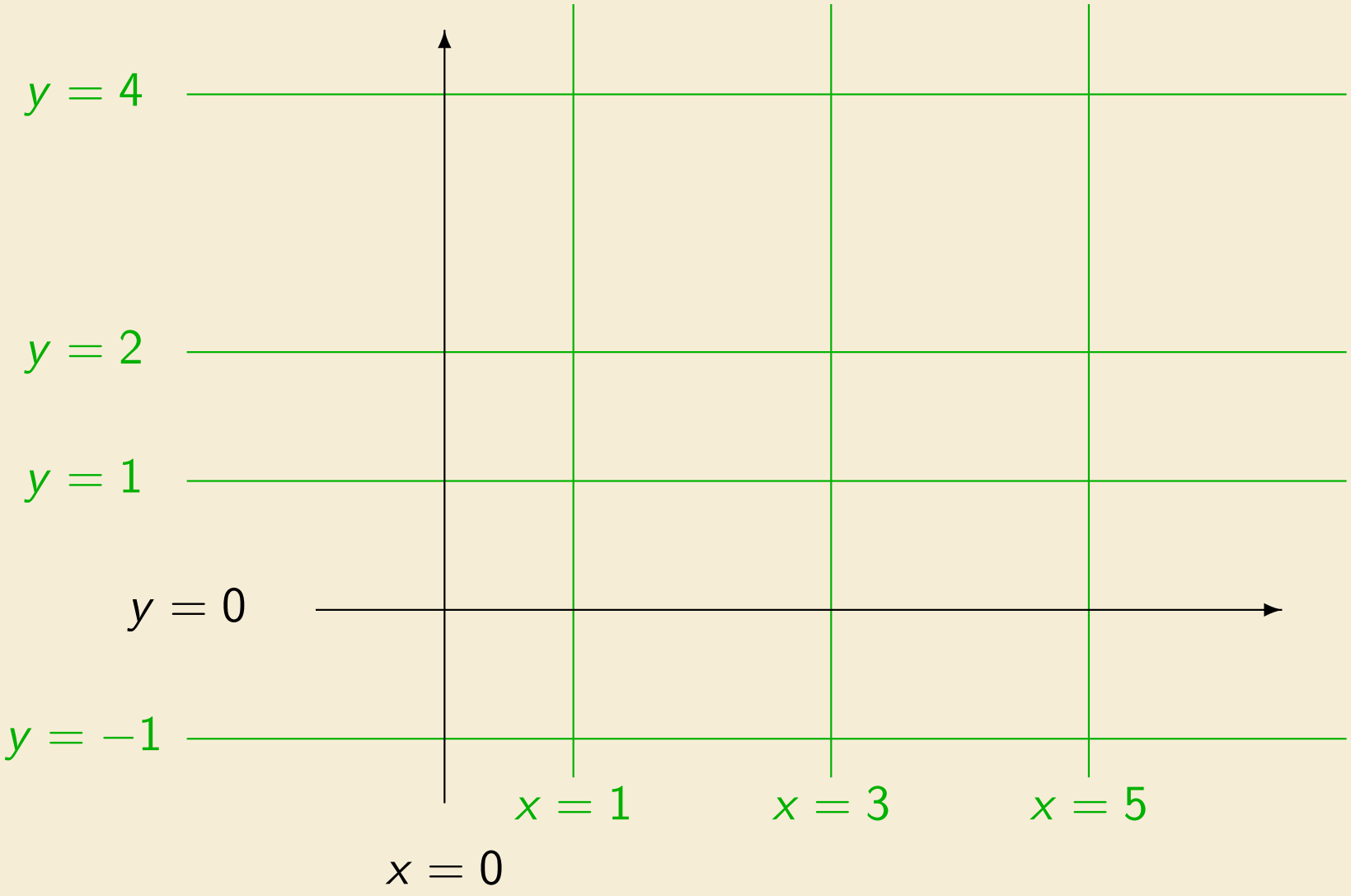
Rette orizzontali e verticali



Rette orizzontali e verticali



Rette orizzontali e verticali



Equazione degli assi cartesiani

In particolare, scopriamo che l'asse orizzontale, detto anche asse delle ascisse o asse delle x, ha equazione

$$y = 0$$

Equazione degli assi cartesiani

In particolare, scopriamo che l'asse orizzontale, detto anche asse delle ascisse o asse delle x, ha equazione

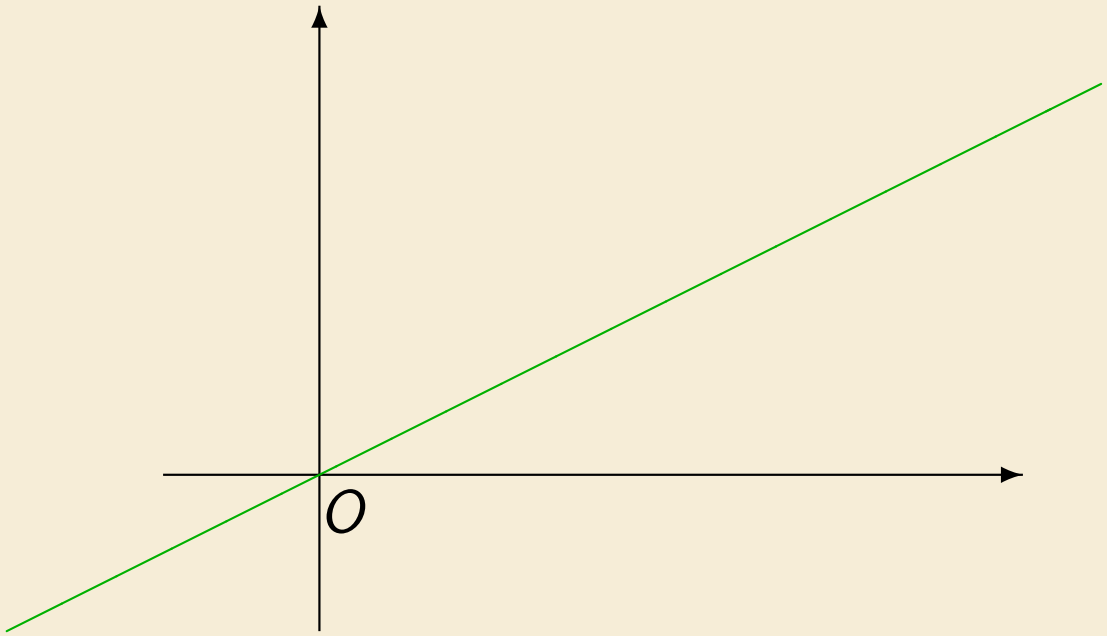
$$y = 0$$

e l'asse verticale, detto anche asse delle ordinate o asse delle y, ha equazione

$$x = 0\,.$$

Rette per l'origine

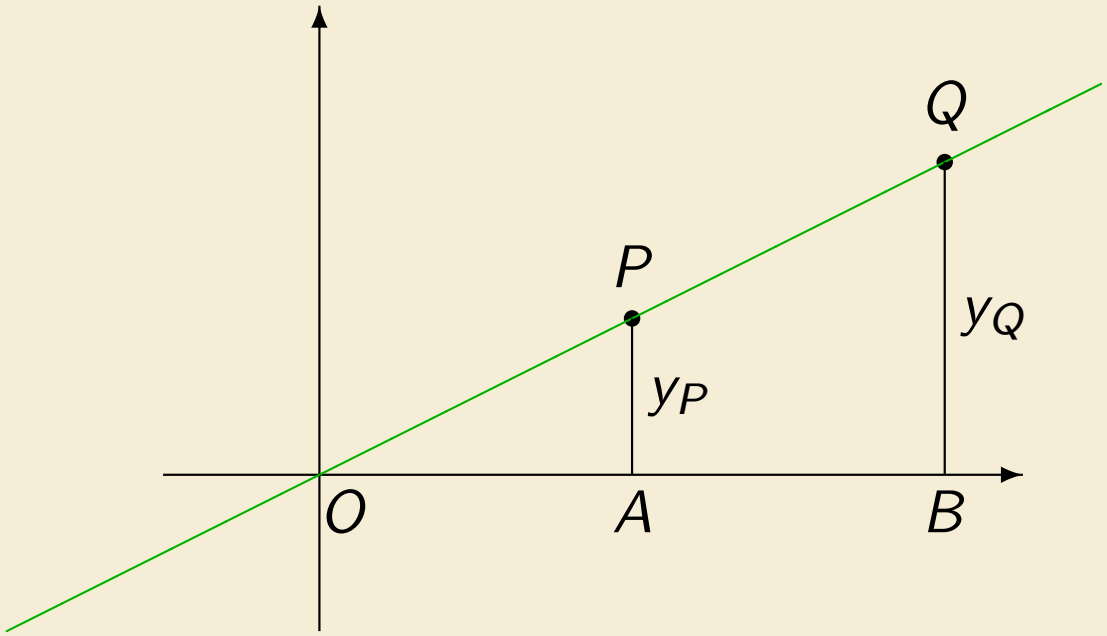
Ora vogliamo scoprire come si scrive l'equazione di una retta, anche obliqua, che passa per l'origine del sistema di riferimento.



Rette per l'origine

Ora vogliamo scoprire come si scrive l'equazione di una retta, anche obliqua, che passa per l'origine del sistema di riferimento. Se prendiamo due punti P e Q su questa retta, la similitudine dei triangoli OAP e OBQ ci porta a scoprire che

$$\frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q} = \text{costante}\,.$$



Rette per l'origine

Se indichiamo con m il rapporto costante di similitudine, abbiamo che l'equazione della retta è data da

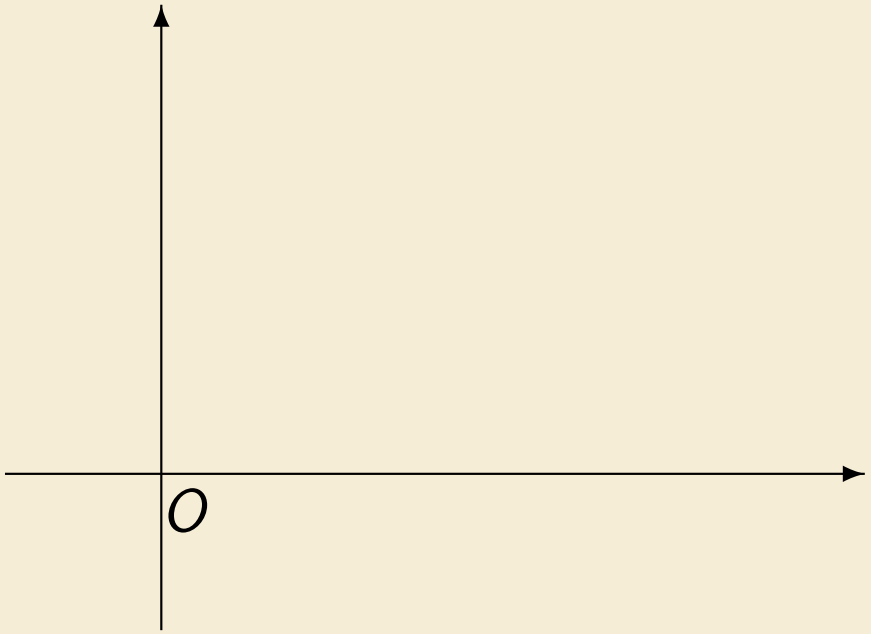
$$y = mx\,.$$

Rette per l'origine

Se indichiamo con m il rapporto costante di similitudine, abbiamo che l'equazione della retta è data da

$$y = mx\,.$$

Il numero m è legato alla pendenza della retta e si chiama **coefficiente angolare**.

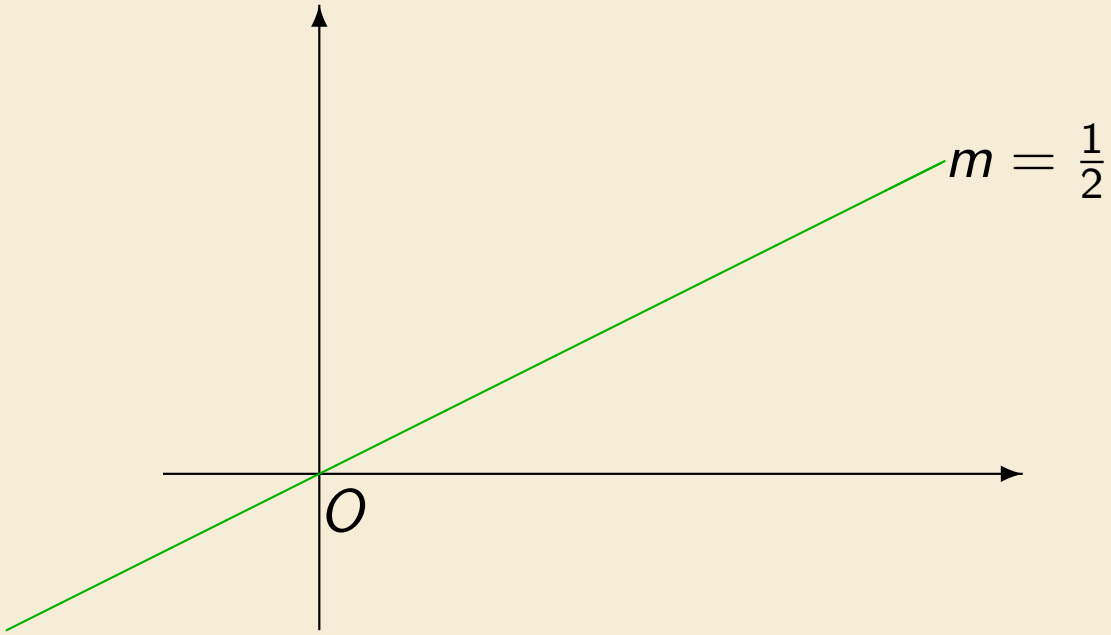


Rette per l'origine

Se indichiamo con m il rapporto costante di similitudine, abbiamo che l'equazione della retta è data da

$$y = mx\,.$$

Il numero m è legato alla pendenza della retta e si chiama **coefficiente angolare**.

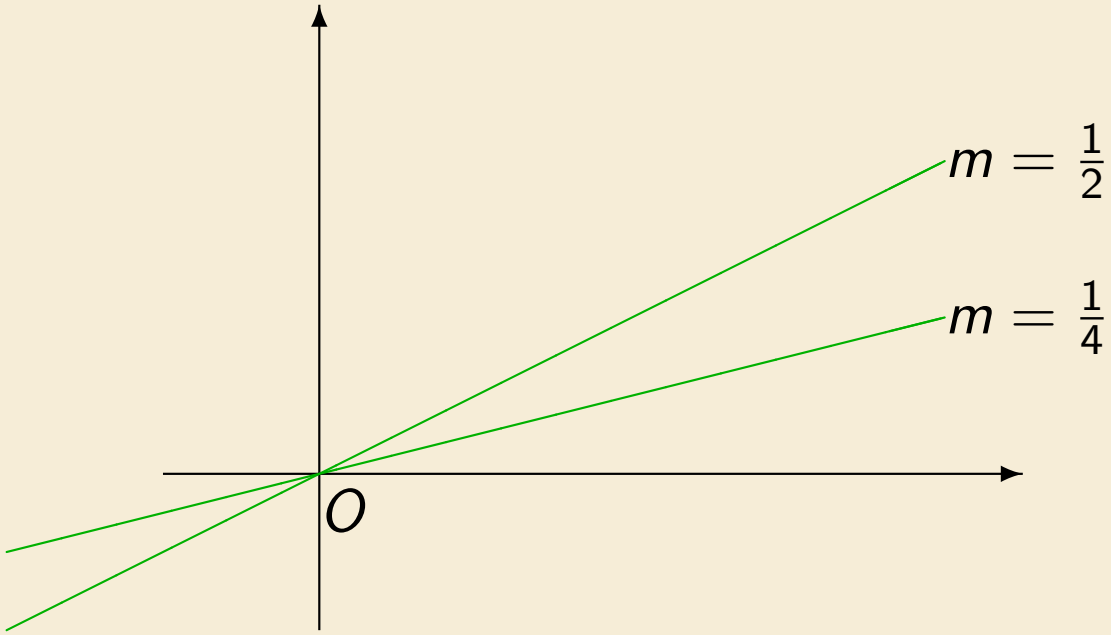


Rette per l'origine

Se indichiamo con m il rapporto costante di similitudine, abbiamo che l'equazione della retta è data da

$$y = mx\,.$$

Il numero m è legato alla pendenza della retta e si chiama **coefficiente angolare**.

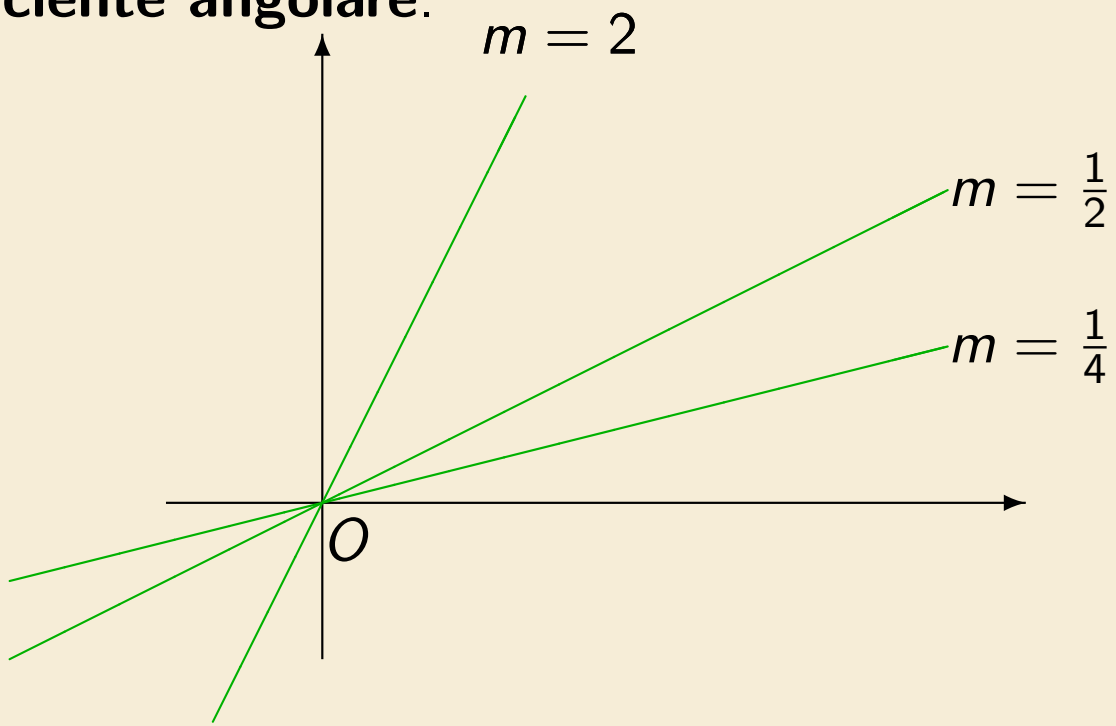


Rette per l'origine

Se indichiamo con m il rapporto costante di similitudine, abbiamo che l'equazione della retta è data da

$$y = mx\,.$$

Il numero m è legato alla pendenza della retta e si chiama **coefficiente angolare**.



Coefficiente angolare

Studiamo alcune proprietà del coefficiente angolare m. Se $m > 0$, la retta è "in salita" (muovendosi verso destra, nel senso delle x crescenti). Se $m < 0$, la retta è "in discesa". Se $m = 0$, la retta è orizzontale.

Coefficiente angolare

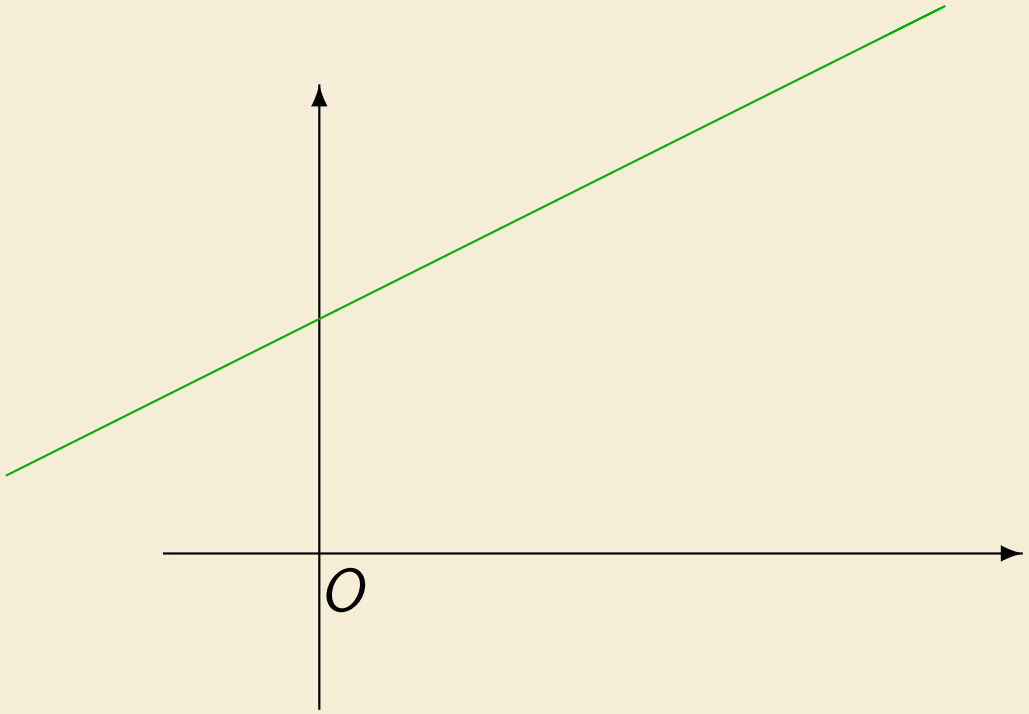
Studiamo alcune proprietà del coefficiente angolare m. Se $m > 0$, la retta è "in salita" (muovendosi verso destra, nel senso delle x crescenti). Se $m < 0$, la retta è "in discesa". Se $m = 0$, la retta è orizzontale.
Per $|m| \to \infty$, la retta tende a diventare verticale. In particolare, le rette verticali non hanno coefficiente angolare: infatti m è il coefficiente di x nell'equazione $y = mx$, ma le rette verticali non si possono scrivere in questa forma, avendo equazione $x = k$.

Coefficiente angolare

Studiamo alcune proprietà del coefficiente angolare m. Se $m > 0$, la retta è "in salita" (muovendosi verso destra, nel senso delle x crescenti). Se $m < 0$, la retta è "in discesa". Se $m = 0$, la retta è orizzontale.
Per $|m| \to \infty$, la retta tende a diventare verticale. In particolare, le rette verticali non hanno coefficiente angolare: infatti m è il coefficiente di x nell'equazione $y = mx$, ma le rette verticali non si possono scrivere in questa forma, avendo equazione $x = k$.
Di questo fatto conviene tenerne conto nella risoluzione di problemi che coinvolgono il coefficiente angolare: le rette verticali vanno considerate a parte.

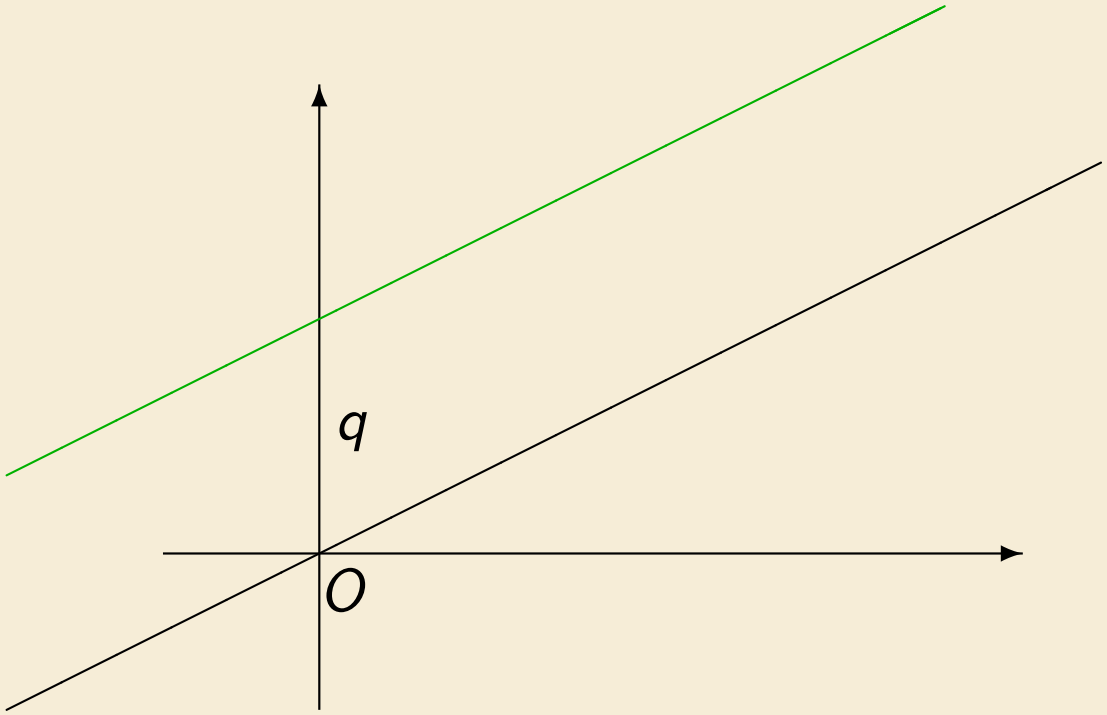
Retta in posizione generica

Vediamo ora come scrivere l'equazione di una retta che non passa per l'origine.



Retta in posizione generica

Vediamo ora come scrivere l'equazione di una retta che non passa per l'origine. È sufficiente osservare che, se la retta taglia l'asse y ad un'altezza q, allora basta prendere la retta parallela che passa per l'origine, diciamo $y = mx$,

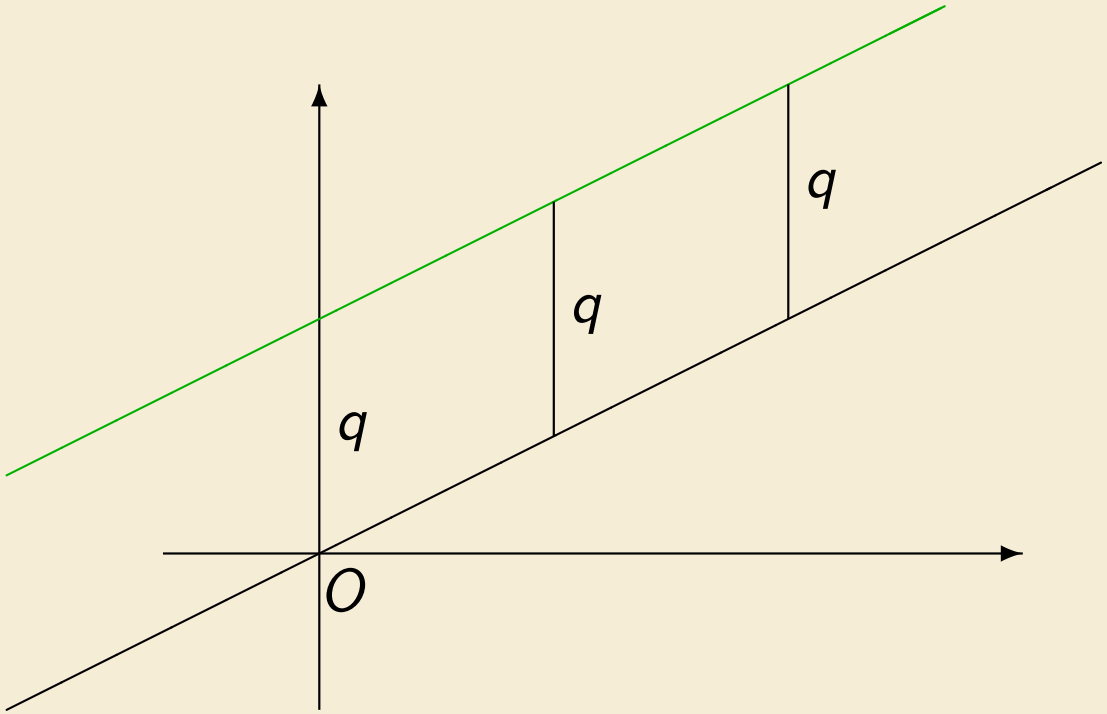


Retta in posizione generica

Vediamo ora come scrivere l'equazione di una retta che non passa per l'origine. È sufficiente osservare che, se la retta taglia l'asse y ad un'altezza q, allora basta prendere la retta parallela che passa per l'origine, diciamo $y = mx$, e sommargli q, ottenendo

$$y = mx + q\,.$$

q si chiama **termine noto**.



Forma esplicita e implicita

Quindi l'equazione di una retta si può scrivere come

$$y = mx + q \quad \text{se la retta non è verticale}$$

Forma esplicita e implicita

Quindi l'equazione di una retta si può scrivere come

$$\begin{aligned} y = mx + q &\quad \text{se la retta non è verticale} \\ x = k &\quad \text{se la retta è verticale} \end{aligned}$$

Forma esplicita e implicita

Quindi l'equazione di una retta si può scrivere come

$$\begin{aligned} y = mx + q &\quad \text{se la retta non è verticale} \\ x = k &\quad \text{se la retta è verticale} \end{aligned}$$

Questa si chiama **forma esplicita** dell'equazione della retta. Ha il pregio di mostrare alcune informazioni *geometriche* (pendenza, termine noto), ma ha il difetto di dover distinguere tra retta verticale e retta non verticale.

Forma esplicita e implicita

Quindi l'equazione di una retta si può scrivere come

$$\begin{aligned} y = mx + q &\quad \text{se la retta non è verticale} \\ x = k &\quad \text{se la retta è verticale} \end{aligned}$$

Questa si chiama **forma esplicita** dell'equazione della retta. Ha il pregio di mostrare alcune informazioni *geometriche* (pendenza, termine noto), ma ha il difetto di dover distinguere tra retta verticale e retta non verticale.
Esiste anche la cosiddetta **forma implicita** dell'equazione di una retta:

$$ax + by + c = 0$$

Forma esplicita e implicita

Quindi l'equazione di una retta si può scrivere come

$$\begin{aligned} y = mx + q &\quad \text{se la retta non è verticale} \\ x = k &\quad \text{se la retta è verticale} \end{aligned}$$

Questa si chiama **forma esplicita** dell'equazione della retta. Ha il pregio di mostrare alcune informazioni *geometriche* (pendenza, termine noto), ma ha il difetto di dover distinguere tra retta verticale e retta non verticale.
Esiste anche la cosiddetta **forma implicita** dell'equazione di una retta:

$$ax + by + c = 0$$

Questa forma ha il pregio di non dover distinguere due casi, ma ha il difetto di non essere univoca, nel senso che due equazioni diverse, ad esempio $x - 2y + 4 = 0$ e $3x - 6y + 12 = 0$, rappresentano la stessa retta (sono equazioni equivalenti).

Fasci di rette

Un **fascio di rette** è un insieme di rette legate da una particolare proprietà:

Fasci di rette

Un **fascio di rette** è un insieme di rette legate da una particolare proprietà:

- o le rette passano tutte per uno stesso punto (fascio **proprio**)

Fasci di rette

Un **fascio di rette** è un insieme di rette legate da una particolare proprietà:

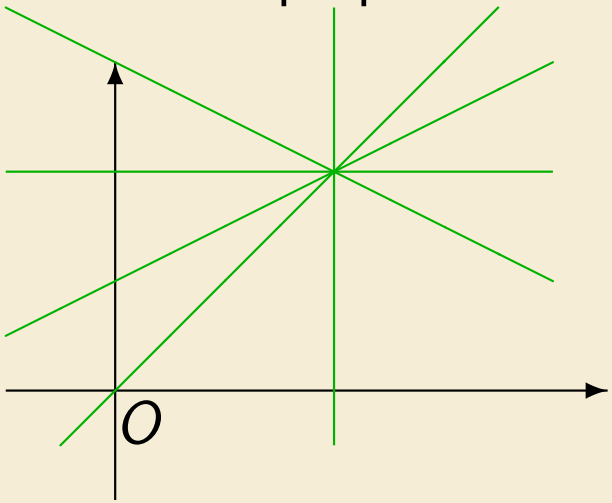
- o le rette passano tutte per uno stesso punto (fascio **proprio**)
- o le rette sono tutte parallele fra loro (fascio **improprio**)

Fasci di rette

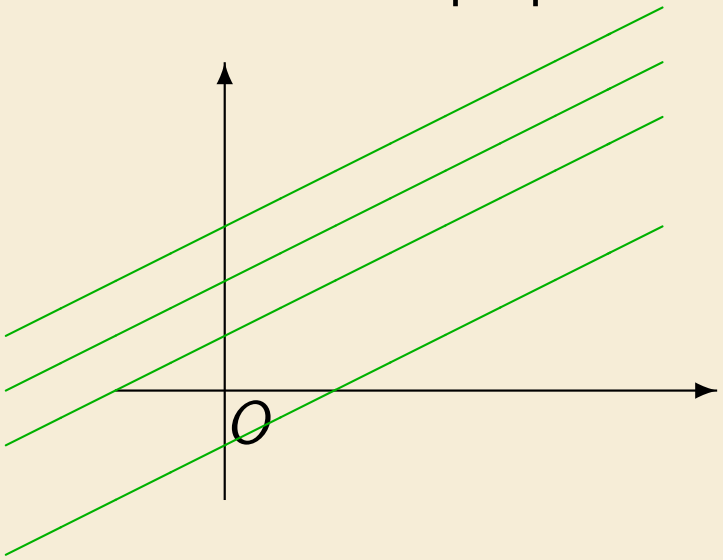
Un **fascio di rette** è un insieme di rette legate da una particolare proprietà:

- o le rette passano tutte per uno stesso punto (fascio **proprio**)
- o le rette sono tutte parallele fra loro (fascio **improprio**)

fascio proprio



fascio improprio



Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.

Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.
È essenziale che il parametro k compaia come *polinomio di primo grado*.

Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.
È essenziale che il parametro k compaia come *polinomio di primo grado*.
Ad esempio, in forma esplicita,

$$y = kx + 2k\,.$$

Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.
È essenziale che il parametro k compaia come *polinomio di primo grado*.
Ad esempio, in forma esplicita,

$$y = kx + 2k\,.$$

Per ogni valore assegnato al parametro k si ottiene l'equazione di una retta. Nell'esempio:

$$k = 1 \qquad \Rightarrow \quad y = x + 2$$

Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.
È essenziale che il parametro k compaia come *polinomio di primo grado*.
Ad esempio, in forma esplicita,

$$y = kx + 2k\,.$$

Per ogni valore assegnato al parametro k si ottiene l'equazione di una retta. Nell'esempio:

$$\begin{array}{lcl} k = 1 & \Rightarrow & y = x + 2 \\ k = -3 & \Rightarrow & y = -3x - 6 \end{array}$$

Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.
È essenziale che il parametro k compaia come *polinomio di primo grado*.
Ad esempio, in forma esplicita,

$$y = kx + 2k\,.$$

Per ogni valore assegnato al parametro k si ottiene l'equazione di una retta. Nell'esempio:

$$\begin{array}{lcl} k = 1 & \Rightarrow & y = x + 2 \\ k = -3 & \Rightarrow & y = -3x - 6 \\ k = 0 & \Rightarrow & y = 0 \end{array}$$

Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.
È essenziale che il parametro k compaia come *polinomio di primo grado*.
Ad esempio, in forma esplicita,

$$y = kx + 2k\,.$$

Per ogni valore assegnato al parametro k si ottiene l'equazione di una retta. Nell'esempio:

$$\begin{array}{lcl} k = 1 & \Rightarrow & y = x + 2 \\ k = -3 & \Rightarrow & y = -3x - 6 \\ k = 0 & \Rightarrow & y = 0 \end{array}$$

Al variare di tutti i valori del parametro, si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio.

Equazione di un fascio

L'equazione di un fascio di rette è simile all'equazione di una retta, ma compare un'incognita in più, che di solito si indica con k (ma anche in altri modi), e che si chiama **parametro del fascio**.
È essenziale che il parametro k compaia come *polinomio di primo grado*.
Ad esempio, in forma esplicita,

$$y = kx + 2k\,.$$

Per ogni valore assegnato al parametro k si ottiene l'equazione di una retta. Nell'esempio:

$$\begin{array}{lcl} k = 1 & \Rightarrow & y = x + 2 \\ k = -3 & \Rightarrow & y = -3x - 6 \\ k = 0 & \Rightarrow & y = 0 \end{array}$$

Al variare di tutti i valori del parametro, si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio.
Domanda: il fascio $y = kx + 2k$ è proprio o improprio?

Classificazione di un fascio

Il procedimento per capire se un fascio sia proprio oppure improprio è abbastanza semplice: si tratta di trovare due rette qualsiasi (distinte) del fascio e farne l'intersezione.

Classificazione di un fascio

Il procedimento per capire se un fascio sia proprio oppure improprio è abbastanza semplice: si tratta di trovare due rette qualsiasi (distinte) del fascio e farne l'intersezione.
Se le due rete si intersecano, il fascio è proprio e il punto d'intersezione è il **centro del fascio**.

Classificazione di un fascio

Il procedimento per capire se un fascio sia proprio oppure improprio è abbastanza semplice: si tratta di trovare due rette qualsiasi (distinte) del fascio e farne l'intersezione.
Se le due rete si intersecano, il fascio è proprio e il punto d'intersezione è il **centro del fascio**.
Se le due rette sono parallele, allora il fascio è improprio e il coefficiente angolare comune a tutte le rette è la **direzione del fascio**.

Classificazione di un fascio

Il procedimento per capire se un fascio sia proprio oppure improprio è abbastanza semplice: si tratta di trovare due rette qualsiasi (distinte) del fascio e farne l'intersezione.
Se le due rete si intersecano, il fascio è proprio e il punto d'intersezione è il **centro del fascio**.
Se le due rette sono parallele, allora il fascio è improprio e il coefficiente angolare comune a tutte le rette è la **direzione del fascio**.
Per trovare due rette del fascio basta dare due valori qualsiasi (magari semplici, come 0 e 1) al parametro. Per intersecare le due rette, bisogna risolvere un sistema lineare.

Classificazione di un fascio

Consideriamo l'esempio precedente: $y = kx + 2k$. Due rette del fascio, già scritte prima, sono

Classificazione di un fascio

Consideriamo l'esempio precedente: $y = kx + 2k$. Due rette del fascio, già scritte prima, sono

$$y = x + 2 \quad (\text{per } k = 1)$$

Classificazione di un fascio

Consideriamo l'esempio precedente: $y = kx + 2k$. Due rette del fascio, già scritte prima, sono

$$y = x + 2 \quad (\text{per } k = 1)$$
$$y = 0 \quad (\text{per } k = 0).$$

Classificazione di un fascio

Consideriamo l'esempio precedente: $y = kx + 2k$. Due rette del fascio, già scritte prima, sono

$$\begin{gathered} y = x + 2 \quad (\text{per } k = 1) \\ y = 0 \quad (\text{per } k = 0). \end{gathered}$$

L'intersezione è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Classificazione di un fascio

Consideriamo l'esempio precedente: $y = kx + 2k$. Due rette del fascio, già scritte prima, sono

$$y = x + 2 \quad (\text{per } k = 1)$$
$$y = 0 \quad (\text{per } k = 0).$$

L'intersezione è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

che dà immediatamente $x = -2$, $y = 0$. Quindi il fascio è **proprio** e il **centro** è il punto $(-2, 0)$.