

Relazioni e funzioni

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Richiami
- 2 Relazioni
- 3 Relazioni di equivalenza
- 4 Classi di equivalenza
- 5 Relazioni d'ordine
- 6 Funzioni

Consideriamo due insiemi X e Y i suoi elementi, che chiameremo per un attimo così: $a, b, c, \dots$ quelli di X e $A, B, C, \dots$ quelli di Y (in pratica quelli di X sono minuscoli e quelli di Y maiuscoli):

Consideriamo due insiemi X e Y i suoi elementi, che chiameremo per un attimo così: $a, b, c, \dots$ quelli di X e $A, B, C, \dots$ quelli di Y (in pratica quelli di X sono minuscoli e quelli di Y maiuscoli):

$$X = \{a, b, c, \dots\}$$

Consideriamo due insiemi X e Y i suoi elementi, che chiameremo per un attimo così: $a, b, c, \dots$ quelli di X e $A, B, C, \dots$ quelli di Y (in pratica quelli di X sono minuscoli e quelli di Y maiuscoli):

$$X = \{a, b, c, \dots\} \quad Y = \{A, B, C, \dots\}.$$

Consideriamo due insiemi X e Y i suoi elementi, che chiameremo per un attimo così: $a, b, c, \dots$ quelli di X e $A, B, C, \dots$ quelli di Y (in pratica quelli di X sono minuscoli e quelli di Y maiuscoli):

$$X = \{a, b, c, \dots\} \quad Y = \{A, B, C, \dots\}.$$

Il *prodotto cartesiano* di X e Y è l'insieme delle *coppie ordinate* $(a, A), (a, B)$, ecc. aventi il primo “elemento” in X (cioè minuscolo, secondo la nostra convenzione) e il secondo in Y (cioè maiuscolo, secondo la nostra convenzione).

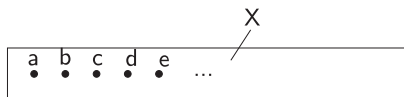
Consideriamo due insiemi X e Y i suoi elementi, che chiameremo per un attimo così: $a, b, c, \dots$ quelli di X e $A, B, C, \dots$ quelli di Y (in pratica quelli di X sono minuscoli e quelli di Y maiuscoli):

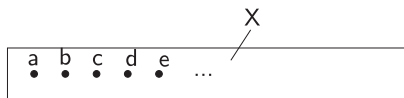
$$X = \{a, b, c, \dots\} \quad Y = \{A, B, C, \dots\}.$$

Il *prodotto cartesiano* di X e Y è l'insieme delle *coppie ordinate* $(a, A), (a, B)$, ecc. aventi il primo “elemento” in X (cioè minuscolo, secondo la nostra convenzione) e il secondo in Y (cioè maiuscolo, secondo la nostra convenzione).

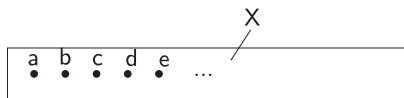
$$X \times Y = \{(a, A), (a, B), (a, C), \dots, (b, A), (b, B), (b, C), \dots\}$$

Se utilizziamo una scrittura “stiracchiata” per gli insiemi X e Y , così:

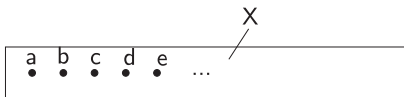




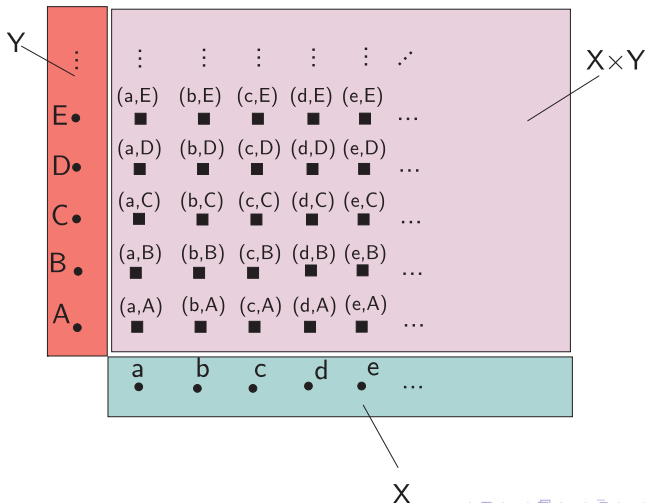
possiamo disegnare il prodotto cartesiano $X \times Y$ come una grossa tabella:



possiamo disegnare il prodotto cartesiano $X \times Y$ come una grossa tabella:



possiamo disegnare il prodotto cartesiano $X \times Y$ come una grossa tabella:



Non dobbiamo dimenticare la convenzione secondo cui nella coppia ordinata *prima* dobbiamo scrivere l'elemento del primo insieme (detto insieme delle *ascisse*) e *poi* quello del secondo (detto delle *ordinate*).

Non dobbiamo dimenticare la convenzione secondo cui nella coppia ordinata *prima* dobbiamo scrivere l'elemento del primo insieme (detto insieme delle *ascisse*) e *poi* quello del secondo (detto delle *ordinate*). Ricordiamo anche che in una coppia ordinata l'ordine è importante: nel nostro esempio (A, b) appartiene a $Y \times X$, che è un *altro* insieme.

Non dobbiamo dimenticare la convenzione secondo cui nella coppia ordinata *prima* dobbiamo scrivere l'elemento del primo insieme (detto insieme delle *ascisse*) e *poi* quello del secondo (detto delle *ordinate*). Ricordiamo anche che in una coppia ordinata l'ordine è importante: nel nostro esempio (A, b) appartiene a $Y \times X$, che è un *altro* insieme. Invece, se l'insieme delle ascisse e quello delle ordinate coincidono, allora è facile sbagliarsi, ma (a, b) è sempre diverso da (b, a) .

Relazioni

Relazioni

Definizione formale di relazione

Una *relazione da X a Y* è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Relazioni

Definizione formale di relazione

Una *relazione da X a Y* è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Questa definizione va spiegata:

Relazioni

Definizione formale di relazione

Una *relazione da X a Y* è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Questa definizione va spiegata: anzi, ne va spiegato il nome. Perché *relazione*?

Relazioni

Definizione formale di relazione

Una *relazione* da X a Y è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Questa definizione va spiegata: anzi, ne va spiegato il nome. Perché *relazione*? Facciamo un esempio. Supponiamo che X sia un insieme di *oggetti*:

Relazioni

Definizione formale di relazione

Una *relazione* da X a Y è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Questa definizione va spiegata: anzi, ne va spiegato il nome. Perché *relazione*? Facciamo un esempio. Supponiamo che X sia un insieme di *oggetti*:

$$X = \{\text{accendino, bicchiere, casa, diario, elefante.}\}$$

Relazioni

Definizione formale di relazione

Una *relazione* da X a Y è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Questa definizione va spiegata: anzi, ne va spiegato il nome. Perché *relazione*? Facciamo un esempio. Supponiamo che X sia un insieme di *oggetti*:

$$X = \{\text{accendino, bicchiere, casa, diario, elefante.}\}$$

e che Y sia un insieme di *persone*:

Relazioni

Definizione formale di relazione

Una *relazione da X a Y* è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Questa definizione va spiegata: anzi, ne va spiegato il nome. Perché *relazione*? Facciamo un esempio. Supponiamo che X sia un insieme di *oggetti*:

$$X = \{\text{accendino, bicchiere, casa, diario, elefante.}\}$$

e che Y sia un insieme di *persone*:

$$Y = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

Prendiamo questa relazione, cioè questo sottoinsieme:

Prendiamo questa relazione, cioè questo sottoinsieme:

$$\mathcal{P} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (c, B), (d, C)\}.$$

Prendiamo questa relazione, cioè questo sottoinsieme:

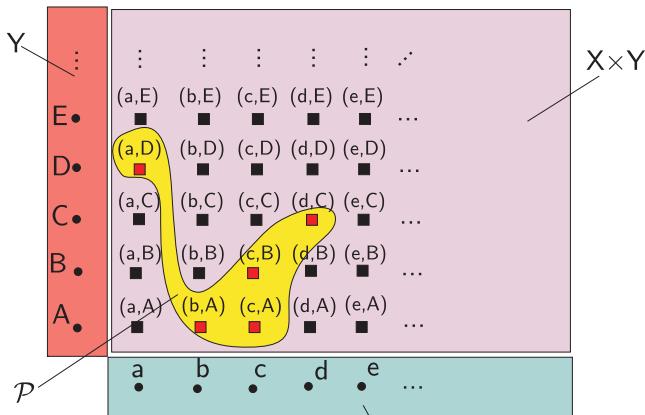
$$\mathcal{P} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (c, B), (d, C)\}.$$

Ecco il disegno:

Prendiamo questa relazione, cioè questo sottoinsieme:

$$\mathcal{P} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (c, B), (d, C)\}.$$

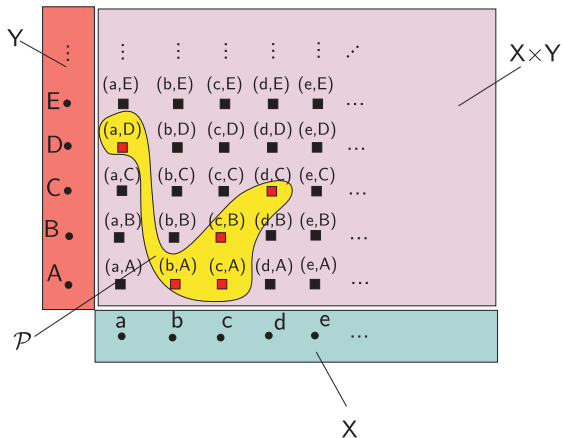
Ecco il disegno:

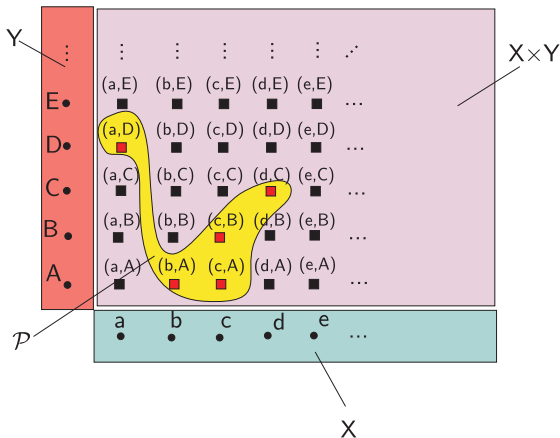


Come si può vedere, è un sottoinsieme di $X \times Y$.

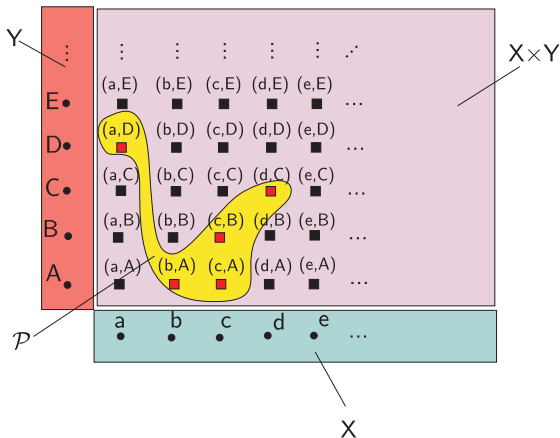
Come si può vedere, è un sottoinsieme di $X \times Y$. E tanto basterebbe.

Come si può vedere, è un sottoinsieme di $X \times Y$. E tanto basterebbe. Però spesso si vogliono “interpretare” le relazioni (così come si interpretano gli insiemi descrivendoli con delle proprietà), e quindi potremmo descrivere la relazione $\mathcal{P}$ come la “proprietà”, in questo senso:





l'accendino è di Proprietà di Daniele
 il bicchiere è di Proprietà di Anna
 la casa è di Proprietà di Anna e Bruno
 il diario è di Proprietà di Chiara



l'accendino è di Proprietà di Daniele
 il bicchiere è di Proprietà di Anna
 la casa è di Proprietà di Anna e Bruno
 il diario è di Proprietà di Chiara

Quindi, nel nostro linguaggio,

Quindi, nel nostro linguaggio,

$(a, D) \in \mathcal{P}$ significa l'**a**ccendino è di **P**roprietà di **D**aniele

Quindi, nel nostro linguaggio,

$(a, D) \in \mathcal{P}$ significa l'**a**ccendino è di **P**roprietà di **D**aniele

$(b, A) \in \mathcal{P}$ significa il **b**icchiere è di **P**roprietà di **A**нна

Quindi, nel nostro linguaggio,

$(a, D) \in \mathcal{P}$ significa l'**a**ccendino è di **P**roprietà di **D**aniele

$(b, A) \in \mathcal{P}$ significa il **b**icchiere è di **P**roprietà di **A**нна

$(c, A), (c, B) \in \mathcal{P}$ significa la **c**asa è di **P**roprietà di **A**нна e **B**runo

Quindi, nel nostro linguaggio,

$(a, D) \in \mathcal{P}$ significa l'**a**ccendino è di **P**roprietà di **D**aniele

$(b, A) \in \mathcal{P}$ significa il **b**icchiere è di **P**roprietà di **A**нна

$(c, A), (c, B) \in \mathcal{P}$ significa la **c**asa è di **P**roprietà di **A**нна e **B**runo

$(d, C) \in \mathcal{P}$ significa il **d**iario è di **P**roprietà di **C**hiara.

Quindi, nel nostro linguaggio,

$(a, D) \in \mathcal{P}$ significa l'**a**ccendino è di **P**roprietà di **D**aniele

$(b, A) \in \mathcal{P}$ significa il **b**icchiere è di **P**roprietà di **A**нна

$(c, A), (c, B) \in \mathcal{P}$ significa la **c**asa è di **P**roprietà di **A**нна e **B**runo

$(d, C) \in \mathcal{P}$ significa il **d**iario è di **P**roprietà di **C**hiara.

Naturalmente, questo non influisce sull'insieme $\mathcal{P}$, perché esso è determinato solo dai suoi elementi, cioè le cinque coppie che in questo caso lo costituiscono.

Spesso, nel linguaggio, il verbo che esprime la “relazione” sta in mezzo ai due soggetti coinvolti (“Anna ama Marco”, “Daniele è il padre di Bruno”, “3 è minore di 7”),

Spesso, nel linguaggio, il verbo che esprime la “relazione” sta in mezzo ai due soggetti coinvolti (“Anna ama Marco”, “Daniele è il padre di Bruno”, “3 è minore di 7”), per cui è d'uso anche in Matematica scrivere la lettera della relazione in mezzo, così:

Spesso, nel linguaggio, il verbo che esprime la “relazione” sta in mezzo ai due soggetti coinvolti (“Anna ama Marco”, “Daniele è il padre di Bruno”, “3 è minore di 7”), per cui è d'uso anche in Matematica scrivere la lettera della relazione in mezzo, così:

$a \mathcal{P} D$ per dire l'accendino è di Proprietà di Daniele

$b \mathcal{P} A$ per dire il bicchiere è di Proprietà di Anna

$c \mathcal{P} A, c \mathcal{P} B$ per dire la casa è di Proprietà di Anna e Bruno

$d \mathcal{P} C$ per dire il diario è di Proprietà di Chiara

ecc.

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa?

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

È la relazione che *scambia* il primo elemento della coppia con il secondo.

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

È la relazione che *scambia* il primo elemento della coppia con il secondo.

Nel nostro esempio, $\mathcal{P}^{-1}$ contiene le coppie

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

È la relazione che *scambia* il primo elemento della coppia con il secondo.

Nel nostro esempio, $\mathcal{P}^{-1}$ contiene le coppie

$$(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)$$

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

È la relazione che *scambia* il primo elemento della coppia con il secondo.

Nel nostro esempio, $\mathcal{P}^{-1}$ contiene le coppie

$$(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)$$

e quindi

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

È la relazione che *scambia* il primo elemento della coppia con il secondo.

Nel nostro esempio, $\mathcal{P}^{-1}$ contiene le coppie

$$(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)$$

e quindi

$$\mathcal{P}^{-1} = \{(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)\}$$

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

È la relazione che *scambia* il primo elemento della coppia con il secondo.
Nel nostro esempio, $\mathcal{P}^{-1}$ contiene le coppie

$$(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)$$

e quindi

$$\mathcal{P}^{-1} = \{(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)\}$$

Chiaramente, $\mathcal{P}^{-1}$ si interpreta ad esempio come “possiede”: “Daniele possiede l'accendino”, eccetera.

Data una relazione $\mathcal{R}$, da X a Y , è sempre possibile definire la *relazione inversa*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

Cosa significa? Semplice:

È la relazione che *scambia* il primo elemento della coppia con il secondo. Nel nostro esempio, $\mathcal{P}^{-1}$ contiene le coppie

$$(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)$$

e quindi

$$\mathcal{P}^{-1} = \{(D, a), (A, b), (A, c), (B, c), (C, d)\}$$

Chiaramente, $\mathcal{P}^{-1}$ si interpreta ad esempio come “possiede”: “Daniele possiede l'accendino”, eccetera. Osserviamo che $\mathcal{P}^{-1}$ va da Y a X , cioè ha gli insiemi scambiati rispetto a $\mathcal{P}$.

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

e supponiamo che Anna sia la madre di Daniele e Chiara la madre di Ernesto e Bruno.

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

e supponiamo che Anna sia la madre di Daniele e Chiara la madre di Ernesto e Bruno. Abbiamo quindi, chiamando $\mathcal{M}$ la relazione,

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

e supponiamo che Anna sia la madre di Daniele e Chiara la madre di Ernesto e Bruno. Abbiamo quindi, chiamando $\mathcal{M}$ la relazione,

Anna è la Madre di Daniele, cioè $A \mathcal{M} D$,

Chiara è la Madre di Ernesto, cioè $C \mathcal{M} E$,

Chiara è la Madre di Bruno, cioè $C \mathcal{M} B$

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

e supponiamo che Anna sia la madre di Daniele e Chiara la madre di Ernesto e Bruno. Abbiamo quindi, chiamando $\mathcal{M}$ la relazione,

Anna è la Madre di Daniele, cioè $A \mathcal{M} D$,

Chiara è la Madre di Ernesto, cioè $C \mathcal{M} E$,

Chiara è la Madre di Bruno, cioè $C \mathcal{M} B$

ossia, tornando alla scrittura con le coppie,

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

e supponiamo che Anna sia la madre di Daniele e Chiara la madre di Ernesto e Bruno. Abbiamo quindi, chiamando $\mathcal{M}$ la relazione,

Anna è la Madre di Daniele, cioè $A \mathcal{M} D$,

Chiara è la Madre di Ernesto, cioè $C \mathcal{M} E$,

Chiara è la Madre di Bruno, cioè $C \mathcal{M} B$

ossia, tornando alla scrittura con le coppie,

$$(A, D) \in \mathcal{M}, (C, E) \in \mathcal{M}, (C, B) \in \mathcal{M}$$

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

e supponiamo che Anna sia la madre di Daniele e Chiara la madre di Ernesto e Bruno. Abbiamo quindi, chiamando $\mathcal{M}$ la relazione,

Anna è la Madre di Daniele, cioè $A \mathcal{M} D$,

Chiara è la Madre di Ernesto, cioè $C \mathcal{M} E$,

Chiara è la Madre di Bruno, cioè $C \mathcal{M} B$

ossia, tornando alla scrittura con le coppie,

$$(A, D) \in \mathcal{M}, (C, E) \in \mathcal{M}, (C, B) \in \mathcal{M}$$

oppure

Se per caso $X = Y$, allora una relazione da X in X si dice *relazione in X* .
Tipiche relazioni in un insieme sono quelle numeriche e quelle di parentela. Prendiamo per X l'insieme Y di prima, tanto per conservare i simboli:

$$X = \{\text{Anna, Bruno, Chiara, Daniele, Ernesto.}\}$$

e supponiamo che Anna sia la madre di Daniele e Chiara la madre di Ernesto e Bruno. Abbiamo quindi, chiamando $\mathcal{M}$ la relazione,

Anna è la Madre di Daniele, cioè $A \mathcal{M} D$,

Chiara è la Madre di Ernesto, cioè $C \mathcal{M} E$,

Chiara è la Madre di Bruno, cioè $C \mathcal{M} B$

ossia, tornando alla scrittura con le coppie,

$$(A, D) \in \mathcal{M}, (C, E) \in \mathcal{M}, (C, B) \in \mathcal{M}$$

oppure

$$\mathcal{M} = \{(A, D), (C, E), (C, B)\}.$$

Anche qui esiste la relazione inversa, che è sempre in X , ed è quella di “essere stato generato da” (perché “essere figlio di” è ambigua rispetto al padre).

Anche qui esiste la relazione inversa, che è sempre in X , ed è quella di “essere stato generato da” (perché “essere figlio di” è ambigua rispetto al padre).

Un altro esempio tipico si può avere fra i numeri. Prendiamo l'insieme

Anche qui esiste la relazione inversa, che è sempre in X , ed è quella di “essere stato generato da” (perché “essere figlio di” è ambigua rispetto al padre).

Un altro esempio tipico si può avere fra i numeri. Prendiamo l'insieme

$$X = \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

Anche qui esiste la relazione inversa, che è sempre in X , ed è quella di “essere stato generato da” (perché “essere figlio di” è ambigua rispetto al padre).

Un altro esempio tipico si può avere fra i numeri. Prendiamo l'insieme

$$X = \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

e la relazione sia quella di “divide esattamente”, che indichiamo con $\mathcal{D}$.

Anche qui esiste la relazione inversa, che è sempre in X , ed è quella di “essere stato generato da” (perché “essere figlio di” è ambigua rispetto al padre).

Un altro esempio tipico si può avere fra i numeri. Prendiamo l'insieme

$$X = \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

e la relazione sia quella di “divide esattamente”, che indichiamo con $\mathcal{D}$. (Con “divide esattamente” intendiamo che il resto della divisione è zero, quindi per esempio 2 divide esattamente 2).

Anche qui esiste la relazione inversa, che è sempre in X , ed è quella di “essere stato generato da” (perché “essere figlio di” è ambigua rispetto al padre).

Un altro esempio tipico si può avere fra i numeri. Prendiamo l'insieme

$$X = \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

e la relazione sia quella di “divide esattamente”, che indichiamo con $\mathcal{D}$. (Con “divide esattamente” intendiamo che il resto della divisione è zero, quindi per esempio 2 divide esattamente 2).

Allora avremo

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(5, 5) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 5

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(5, 5) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 5

$(5, 10) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 10

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(5, 5) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 5

$(5, 10) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 10

$(6, 6) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 6

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(5, 5) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 5

$(5, 10) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 10

$(6, 6) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 6

$(6, 12) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 12

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(5, 5) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 5

$(5, 10) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 10

$(6, 6) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 6

$(6, 12) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 12

$(10, 10) \in \mathcal{D}$ perché 10 divide esattamente 10

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(5, 5) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 5

$(5, 10) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 10

$(6, 6) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 6

$(6, 12) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 12

$(10, 10) \in \mathcal{D}$ perché 10 divide esattamente 10

$(12, 12) \in \mathcal{D}$ perché 12 divide esattamente 12

e quindi

$(2, 2) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 2

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 4

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 6

$(2, 10) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 10

$(2, 12) \in \mathcal{D}$ perché 2 divide esattamente 12

$(4, 4) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 4

$(4, 12) \in \mathcal{D}$ perché 4 divide esattamente 12

$(5, 5) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 5

$(5, 10) \in \mathcal{D}$ perché 5 divide esattamente 10

$(6, 6) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 6

$(6, 12) \in \mathcal{D}$ perché 6 divide esattamente 12

$(10, 10) \in \mathcal{D}$ perché 10 divide esattamente 10

$(12, 12) \in \mathcal{D}$ perché 12 divide esattamente 12

e quindi

$$\mathcal{D} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (2, 12), (4, 4), \\ (4, 12), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (6, 12), (10, 10), (12, 12)\}.$$

Torneremo più avanti su questa relazione. Essa è abbastanza importante da essersi guadagnato un simbolo, che è '|', ossia

Torneremo più avanti su questa relazione. Essa è abbastanza importante da essersi guadagnato un simbolo, che è '|', ossia

$$(2, 4) \in \mathcal{D} \quad \text{si scrive} \quad 2 \mid 4,$$

Torneremo più avanti su questa relazione. Essa è abbastanza importante da essersi guadagnato un simbolo, che è '|', ossia

$(2, 4) \in \mathcal{D}$ si scrive $2 \mid 4$,

$(2, 6) \in \mathcal{D}$ si scrive $2 \mid 6$,

ecc.

Relazioni di equivalenza

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{E}$ in X .

Relazioni di equivalenza

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{E}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{E}$ in X si dice relazione *di equivalenza* in X se

Relazioni di equivalenza

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{E}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{E}$ in X si dice *relazione di equivalenza* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{E} x$ per ogni x ;

Relazioni di equivalenza

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{E}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{E}$ in X si dice *relazione di equivalenza* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{E} x$ per ogni x ;
- è *simmetrica*, ossia se $x \mathcal{E} y$, allora $y \mathcal{E} x$, per ogni x, y ;

Relazioni di equivalenza

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{E}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{E}$ in X si dice *relazione di equivalenza* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{E} x$ per ogni x ;
- è *simmetrica*, ossia se $x \mathcal{E} y$, allora $y \mathcal{E} x$, per ogni x, y ;
- è *transitiva*, ossia se $x \mathcal{E} y$ e $y \mathcal{E} z$, allora $x \mathcal{E} z$.

Relazioni di equivalenza

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{E}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{E}$ in X si dice *relazione di equivalenza* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{E} x$ per ogni x ;
- è *simmetrica*, ossia se $x \mathcal{E} y$, allora $y \mathcal{E} x$, per ogni x, y ;
- è *transitiva*, ossia se $x \mathcal{E} y$ e $y \mathcal{E} z$, allora $x \mathcal{E} z$.

Vediamo con calma questa definizione, molto importante.

La *riflessività* dice che le coppie del tipo (x, x) sono sempre in relazione, ossia che “ogni elemento è equivalente a se stesso”.

La *riflessività* dice che le coppie del tipo (x, x) sono sempre in relazione, ossia che “ogni elemento è equivalente a se stesso”.

La *simmetria* significa che se x e y sono in relazione, *allora anche* y e x sono in relazione.

La *riflessività* dice che le coppie del tipo (x, x) sono sempre in relazione, ossia che “ogni elemento è equivalente a se stesso”.

La *simmetria* significa che se x e y sono in relazione, *allora anche* y e x sono in relazione. Ciò si esprime dicendo che “se x è equivalente ad y , allora y è equivalente ad x ”.

La *riflessività* dice che le coppie del tipo (x, x) sono sempre in relazione, ossia che “ogni elemento è equivalente a se stesso”.

La *simmetria* significa che se x e y sono in relazione, *allora anche* y e x sono in relazione. Ciò si esprime dicendo che “se x è equivalente ad y , allora y è equivalente ad x ”. Ovviamente ci possono essere elementi che *non* sono in relazione, cioè non equivalenti.

La *riflessività* dice che le coppie del tipo (x, x) sono sempre in relazione, ossia che “ogni elemento è equivalente a se stesso”.

La *simmetria* significa che se x e y sono in relazione, *allora anche* y e x sono in relazione. Ciò si esprime dicendo che “se x è equivalente ad y , allora y è equivalente ad x ”. Ovviamente ci possono essere elementi che *non* sono in relazione, cioè non equivalenti.

La *transitività* dice che l'equivalenza è “ereditaria”: se x è equivalente a y e y è equivalente a z , allora x è equivalente a z .

La *riflessività* dice che le coppie del tipo (x, x) sono sempre in relazione, ossia che “ogni elemento è equivalente a se stesso”.

La *simmetria* significa che se x e y sono in relazione, *allora anche* y e x sono in relazione. Ciò si esprime dicendo che “se x è equivalente ad y , allora y è equivalente ad x ”. Ovviamente ci possono essere elementi che *non* sono in relazione, cioè non equivalenti.

La *transitività* dice che l'equivalenza è “ereditaria”: se x è equivalente a y e y è equivalente a z , allora x è equivalente a z .

Queste definizioni sono inoltre fra loro *indipendenti*.

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva:

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna.

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna. Però, (se mai capita), se Anna è sposata con Bruno e Bruno con Chiara (cosa già complicata), allora in generale Anna non è sposata con Chiara.

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna. Però, (se mai capita), se Anna è sposata con Bruno e Bruno con Chiara (cosa già complicata), allora in generale Anna non è sposata con Chiara.

Secondo esempio. Questo dobbiamo farlo “con le mani”.

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna. Però, (se mai capita), se Anna è sposata con Bruno e Bruno con Chiara (cosa già complicata), allora in generale Anna non è sposata con Chiara.

Secondo esempio. Questo dobbiamo farlo “con le mani”. Sia X l'insieme $\{1, 2, 3\}$. Prendiamo la relazione

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna. Però, (se mai capita), se Anna è sposata con Bruno e Bruno con Chiara (cosa già complicata), allora in generale Anna non è sposata con Chiara.

Secondo esempio. Questo dobbiamo farlo “con le mani”. Sia X l'insieme $\{1, 2, 3\}$. Prendiamo la relazione

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}.$$

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna. Però, (se mai capita), se Anna è sposata con Bruno e Bruno con Chiara (cosa già complicata), allora in generale Anna non è sposata con Chiara.

Secondo esempio. Questo dobbiamo farlo “con le mani”. Sia X l'insieme $\{1, 2, 3\}$. Prendiamo la relazione

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}.$$

Questa relazione è riflessiva perché tutte le coppie di elementi uguali sono in relazione.

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna. Però, (se mai capita), se Anna è sposata con Bruno e Bruno con Chiara (cosa già complicata), allora in generale Anna non è sposata con Chiara.

Secondo esempio. Questo dobbiamo farlo “con le mani”. Sia X l'insieme $\{1, 2, 3\}$. Prendiamo la relazione

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}.$$

Questa relazione è riflessiva perché tutte le coppie di elementi uguali sono in relazione. Non è simmetrica perché c'è $(1, 2)$ ma non $(2, 1)$.

Approfondimento

Per vedere che le tre definizioni sono indipendenti, possiamo mostrare degli esempi nei quali una delle tre proprietà è vera e le altre false.

Primo esempio. La relazione di “essere sposato con” è in generale simmetrica ma non riflessiva e non transitiva: uno non è sposato con se stesso, e se Anna è sposata con Bruno, allora Bruno è sposato con Anna. Però, (se mai capita), se Anna è sposata con Bruno e Bruno con Chiara (cosa già complicata), allora in generale Anna non è sposata con Chiara.

Secondo esempio. Questo dobbiamo farlo “con le mani”. Sia X l'insieme $\{1, 2, 3\}$. Prendiamo la relazione

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}.$$

Questa relazione è riflessiva perché tutte le coppie di elementi uguali sono in relazione. Non è simmetrica perché c'è $(1, 2)$ ma non $(2, 1)$. Infine non è transitiva perché, nonostante vi siano $(1, 2)$ e $(2, 3)$, non c'è $(1, 3)$.

Approfondimento

Terzo esempio. “Essere strettamente minore di” tra numeri è transitiva: se $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$. Però non è riflessiva, perché non è mai vero che $x < x$, e nemmeno simmetrica, perché non è mai vero che se $x < y$, allora $y < x$.

Approfondimento

Terzo esempio. “Essere strettamente minore di” tra numeri è transitiva: se $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$. Però non è riflessiva, perché non è mai vero che $x < x$, e nemmeno simmetrica, perché non è mai vero che se $x < y$, allora $y < x$.

(Si possono anche costruire relazioni nelle quali *due* delle tre sono verificate e la terza no; lo lasciamo come esercizio.

Approfondimento

Terzo esempio. “Essere strettamente minore di” tra numeri è transitiva: se $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$. Però non è riflessiva, perché non è mai vero che $x < x$, e nemmeno simmetrica, perché non è mai vero che se $x < y$, allora $y < x$.

(Si possono anche costruire relazioni nelle quali *due* delle tre sono verificate e la terza no; lo lasciamo come esercizio. L'unico punto delicato è questo: si potrebbe pensare che simmetrica + transitiva implichi riflessiva, in quanto $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x$ deve implicare $x \mathcal{R} x$.

Approfondimento

Terzo esempio. “Essere strettamente minore di” tra numeri è transitiva: se $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$. Però non è riflessiva, perché non è mai vero che $x < x$, e nemmeno simmetrica, perché non è mai vero che se $x < y$, allora $y < x$.

(Si possono anche costruire relazioni nelle quali *due* delle tre sono verificate e la terza no; lo lasciamo come esercizio. L'unico punto delicato è questo: si potrebbe pensare che simmetrica + transitiva implichi riflessiva, in quanto $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x$ deve implicare $x \mathcal{R} x$. Questo è vero, ma la riflessività deve valere *per ogni* x , mentre da simmetria + transitività ciò si deduce solo per quegli x per i quali $x \mathcal{R} y \dots$)

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

La verifica di queste proprietà è un facile esercizio.

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

La verifica di queste proprietà è un facile esercizio. Vediamo quello delle rette per esempio:

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

La verifica di queste proprietà è un facile esercizio. Vediamo quello delle rette per esempio:

- *riflessiva*: ogni retta è parallela a se stessa (l'abbiamo ammesso);

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

La verifica di queste proprietà è un facile esercizio. Vediamo quello delle rette per esempio:

- *riflessiva*: ogni retta è parallela a se stessa (l'abbiamo ammesso);
- *simmetrica*: se $\underline{r}$ è parallela a $\underline{s}$, allora $\underline{s}$ è parallela a $\underline{r}$. Vero.

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

La verifica di queste proprietà è un facile esercizio. Vediamo quello delle rette per esempio:

- *riflessiva*: ogni retta è parallela a se stessa (l'abbiamo ammesso);
- *simmetrica*: se $\underline{r}$ è parallela a $\underline{s}$, allora $\underline{s}$ è parallela a $\underline{r}$. Vero.
- *transitiva*: se $\underline{r}$ è parallela a $\underline{s}$ e $\underline{s}$ è parallela a $\underline{t}$,

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

La verifica di queste proprietà è un facile esercizio. Vediamo quello delle rette per esempio:

- *riflessiva*: ogni retta è parallela a se stessa (l'abbiamo ammesso);
- *simmetrica*: se $\underline{r}$ è parallela a $\underline{s}$, allora $\underline{s}$ è parallela a $\underline{r}$. Vero.
- *transitiva*: se $\underline{r}$ è parallela a $\underline{s}$ e $\underline{s}$ è parallela a $\underline{t}$, allora $\underline{r}$ è parallela a $\underline{t}$.

Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- “Essere nato dalla stessa madre di” in un insieme di persone;
- “Essere parallelo a” tra rette (ammettendo che una retta sia parallela a se stessa);
- “Essere nato nello stesso anno di” in un insieme di persone;
- “Avere la stessa parità di” in un insieme di numeri interi.

La verifica di queste proprietà è un facile esercizio. Vediamo quello delle rette per esempio:

- *riflessiva*: ogni retta è parallela a se stessa (l'abbiamo ammesso);
- *simmetrica*: se $\underline{r}$ è parallela a $\underline{s}$, allora $\underline{s}$ è parallela a $\underline{r}$. Vero.
- *transitiva*: se $\underline{r}$ è parallela a $\underline{s}$ e $\underline{s}$ è parallela a $\underline{t}$, allora $\underline{r}$ è parallela a $\underline{t}$. Vero anche questo.

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione.

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X .

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X .
Chiamiamo

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X . Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X . Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

ossia il sottoinsieme di tutti gli elementi equivalenti ad a .

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X .

Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

ossia il sottoinsieme di tutti gli elementi equivalenti ad a .
Questi sottoinsiemi hanno particolari proprietà.

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X . Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

ossia il sottoinsieme di tutti gli elementi equivalenti ad a . Questi sottoinsiemi hanno particolari proprietà. Una proprietà preliminare è questa: se x e y appartengono a C_a , allora sono equivalenti.

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X .

Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

ossia il sottoinsieme di tutti gli elementi equivalenti ad a .

Questi sottoinsiemi hanno particolari proprietà.

Una proprietà preliminare è questa: se x e y appartengono a C_a , allora sono equivalenti. Infatti, $x \in C_a$ significa $x \mathcal{E} a$, mentre $y \in C_a$ significa $y \mathcal{E} a$.

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X .

Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

ossia il sottoinsieme di tutti gli elementi equivalenti ad a .

Questi sottoinsiemi hanno particolari proprietà.

Una proprietà preliminare è questa: se x e y appartengono a C_a , allora sono equivalenti. Infatti, $x \in C_a$ significa $x \mathcal{E} a$, mentre $y \in C_a$ significa $y \mathcal{E} a$. Per simmetria, questo implica $a \mathcal{E} y$ e quindi abbiamo

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X . Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

ossia il sottoinsieme di tutti gli elementi equivalenti ad a .

Questi sottoinsiemi hanno particolari proprietà.

Una proprietà preliminare è questa: se x e y appartengono a C_a , allora sono equivalenti. Infatti, $x \in C_a$ significa $x \mathcal{E} a$, mentre $y \in C_a$ significa $y \mathcal{E} a$. Per simmetria, questo implica $a \mathcal{E} y$ e quindi abbiamo

$$x \mathcal{E} a \quad \text{e} \quad a \mathcal{E} y.$$

Classi di equivalenza

Se si ha una relazione di equivalenza, si ha una struttura molto particolare e importante sull'insieme X degli oggetti in relazione. Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un insieme X e prendiamo un elemento a di X . Chiamiamo

$$C_a = \{x \in X : x \mathcal{E} a\},$$

ossia il sottoinsieme di tutti gli elementi equivalenti ad a .

Questi sottoinsiemi hanno particolari proprietà.

Una proprietà preliminare è questa: se x e y appartengono a C_a , allora sono equivalenti. Infatti, $x \in C_a$ significa $x \mathcal{E} a$, mentre $y \in C_a$ significa $y \mathcal{E} a$. Per simmetria, questo implica $a \mathcal{E} y$ e quindi abbiamo

$$x \mathcal{E} a \quad \text{e} \quad a \mathcal{E} y.$$

Per la proprietà transitiva, allora, deve essere $x \mathcal{E} y$ (e anche $y \mathcal{E} x$).

Le proprietà più importanti sono però queste:

- 1 C_a non è mai vuoto, per nessun a .

Le proprietà più importanti sono però queste:

- 1 C_a non è mai vuoto, per nessun a .
- 2 Se a non è equivalente a b , allora C_a e C_b non hanno elementi in comune.

Le proprietà più importanti sono però queste:

- 1 C_a non è mai vuoto, per nessun a .
- 2 Se a non è equivalente a b , allora C_a e C_b non hanno elementi in comune.
- 3 Ogni $x \in X$ deve appartenere a qualche C_a .

Le proprietà più importanti sono però queste:

- 1 C_a non è mai vuoto, per nessun a .
- 2 Se a non è equivalente a b , allora C_a e C_b non hanno elementi in comune.
- 3 Ogni $x \in X$ deve appartenere a qualche C_a .

Dimostriamole.

Le proprietà più importanti sono però queste:

- 1 C_a non è mai vuoto, per nessun a .
- 2 Se a non è equivalente a b , allora C_a e C_b non hanno elementi in comune.
- 3 Ogni $x \in X$ deve appartenere a qualche C_a .

Dimostriamole.

1) Ogni C_a deve contenere almeno a , perché per la riflessiva, a è equivalente a se stesso.

La 2) è un pochino difficile e la diamo come approfondimento.

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota.

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a .

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z .

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z . Adesso, ragionando allo stesso modo su C_b , abbiamo che z sarà equivalente a b , e quindi $z \mathcal{E} b$.

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z . Adesso, ragionando allo stesso modo su C_b , abbiamo che z sarà equivalente a b , e quindi $z \mathcal{E} b$. Ma allora avremo

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z . Adesso, ragionando allo stesso modo su C_b , abbiamo che z sarà equivalente a b , e quindi $z \mathcal{E} b$. Ma allora avremo

$$x \mathcal{E} z \quad \text{e} \quad z \mathcal{E} b$$

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z . Adesso, ragionando allo stesso modo su C_b , abbiamo che z sarà equivalente a b , e quindi $z \mathcal{E} b$. Ma allora avremo

$$x \mathcal{E} z \quad \text{e} \quad z \mathcal{E} b$$

e, sempre per la transitiva, troviamo che x è equivalente a b , ossia che $x \in C_b$.

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z . Adesso, ragionando allo stesso modo su C_b , abbiamo che z sarà equivalente a b , e quindi $z \mathcal{E} b$. Ma allora avremo

$$x \mathcal{E} z \quad \text{e} \quad z \mathcal{E} b$$

e, sempre per la transitiva, troviamo che x è equivalente a b , ossia che $x \in C_b$.

Siccome questo accade *per ogni* x di C_a , avremo che $C_a \subseteq C_b$, ossia che C_a è un sottoinsieme di C_b .

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z . Adesso, ragionando allo stesso modo su C_b , abbiamo che z sarà equivalente a b , e quindi $z \mathcal{E} b$. Ma allora avremo

$$x \mathcal{E} z \quad \text{e} \quad z \mathcal{E} b$$

e, sempre per la transitiva, troviamo che x è equivalente a b , ossia che $x \in C_b$.

Siccome questo accade *per ogni* x di C_a , avremo che $C_a \subseteq C_b$, ossia che C_a è un sottoinsieme di C_b .

Ma adesso possiamo ribaltare il ragionamento partendo da C_b e concludere che C_b è un sottoinsieme di C_a , col che $C_a = C_b$.

Approfondimento

2) Supponiamo che a non sia equivalente a b e supponiamo per assurdo che l'intersezione $C_a \cap C_b$ sia non vuota. Quindi esiste uno z che appartiene *sia* a C_a *che* a C_b .

Prendiamo allora un *qualunque* elemento x di C_a . Siccome abbiamo visto che in C_a tutti gli elementi sono equivalenti, x sarà equivalente anche a z . Adesso, ragionando allo stesso modo su C_b , abbiamo che z sarà equivalente a b , e quindi $z \mathcal{E} b$. Ma allora avremo

$$x \mathcal{E} z \quad \text{e} \quad z \mathcal{E} b$$

e, sempre per la transitiva, troviamo che x è equivalente a b , ossia che $x \in C_b$.

Siccome questo accade *per ogni* x di C_a , avremo che $C_a \subseteq C_b$, ossia che C_a è un sottoinsieme di C_b .

Ma adesso possiamo ribaltare il ragionamento partendo da C_b e concludere che C_b è un sottoinsieme di C_a , col che $C_a = C_b$.

Ma allora a è equivalente a b , perché abbiamo visto che in questi insiemi tutti gli elementi sono equivalenti, e questo è contro l'ipotesi che *non* fossero equivalenti.

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$.

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$.
Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X .

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$.
Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X . Quindi *ogni relazione di equivalenza in X induce una partizione di X .*

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$. Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X . Quindi *ogni relazione di equivalenza in X induce una partizione di X* . Gli insiemi “mattonelle”, cioè i vari C_a , sono detti *classi di equivalenza*.

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$.

Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X . Quindi *ogni relazione di equivalenza in X induce una partizione di X* . Gli insiemi “mattonelle”, cioè i vari C_a , sono detti *classi di equivalenza*.

Nei casi sopra detti, i C_a sono facili da individuare:

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$.

Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X . Quindi *ogni relazione di equivalenza in X induce una partizione di X* . Gli insiemi “mattonelle”, cioè i vari C_a , sono detti *classi di equivalenza*.

Nei casi sopra detti, i C_a sono facili da individuare:

- 1 Nel caso dei figli della stessa madre, la classe è l'insieme dei fratelli e sorelle;

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$.

Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X . Quindi *ogni relazione di equivalenza in X induce una partizione di X* . Gli insiemi “mattonelle”, cioè i vari C_a , sono detti *classi di equivalenza*.

Nei casi sopra detti, i C_a sono facili da individuare:

- 1 Nel caso dei figli della stessa madre, la classe è l'insieme dei fratelli e sorelle;
- 2 Nel caso delle rette parallele, la classe è l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data;

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$.

Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X . Quindi *ogni relazione di equivalenza in X induce una partizione di X* . Gli insiemi “mattonelle”, cioè i vari C_a , sono detti *classi di equivalenza*.

Nei casi sopra detti, i C_a sono facili da individuare:

- ① Nel caso dei figli della stessa madre, la classe è l'insieme dei fratelli e sorelle;
- ② Nel caso delle rette parallele, la classe è l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data;
- ③ Nel caso delle persone dello stesso anno, la classe è la “classe” (es. la classe 1960);

3) Siccome ogni x appartiene a C_x , basta prendere $a = x$. Questo dice che gli insiemi C_a “ricoprono” tutto X come delle mattonelle, perché sono non vuoti, disgiunti e non lasciano “buchi”. Una struttura di questo tipo si dice *partizione* di X . Quindi *ogni relazione di equivalenza in X induce una partizione di X* . Gli insiemi “mattonelle”, cioè i vari C_a , sono detti *classi di equivalenza*.

Nei casi sopra detti, i C_a sono facili da individuare:

- 1 Nel caso dei figli della stessa madre, la classe è l'insieme dei fratelli e sorelle;
- 2 Nel caso delle rette parallele, la classe è l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data;
- 3 Nel caso delle persone dello stesso anno, la classe è la “classe” (es. la classe 1960);
- 4 Nel caso dei numeri con la stessa parità, le classi sono l'insieme dei numeri pari e dei numeri dispari.

Approfondimento

Si può anche considerare l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

Approfondimento

Si può anche considerare l'insieme di tutte le classi di equivalenza.
Questo *non* ha niente a che vedere con l'insieme X , perché è un insieme di sottoinsiemi di X .

Approfondimento

Si può anche considerare l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Questo *non* ha niente a che vedere con l'insieme X , perché è un insieme di sottoinsiemi di X . Ogni “punto” di questo insieme è un sottoinsieme di X che sia una classe.

Approfondimento

Si può anche considerare l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

Questo *non* ha niente a che vedere con l'insieme X , perché è un insieme di sottoinsiemi di X . Ogni “punto” di questo insieme è un sottoinsieme di X che sia una classe.

Questo insieme si indica spesso con $X/\mathcal{E}$ e si chiama *insieme quoziente*, perché se X ha m elementi e ogni classe contiene n elementi, allora vi sono esattamente m/n classi, cioè il quoziente dei due numeri.

Approfondimento

Si può anche considerare l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Questo *non* ha niente a che vedere con l'insieme X , perché è un insieme di sottoinsiemi di X . Ogni “punto” di questo insieme è un sottoinsieme di X che sia una classe.

Questo insieme si indica spesso con $X/\mathcal{E}$ e si chiama *insieme quoziente*, perché se X ha m elementi e ogni classe contiene n elementi, allora vi sono esattamente m/n classi, cioè il quoziente dei due numeri. Per esempio, se vi sono 1000 persone raggruppate in classi da 50 persone ciascuna, allora evidentemente vi sono 20 classi.

Approfondimento

Si può anche considerare l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Questo *non* ha niente a che vedere con l'insieme X , perché è un insieme di sottoinsiemi di X . Ogni “punto” di questo insieme è un sottoinsieme di X che sia una classe.

Questo insieme si indica spesso con $X/\mathcal{E}$ e si chiama *insieme quoziente*, perché se X ha m elementi e ogni classe contiene n elementi, allora vi sono esattamente m/n classi, cioè il quoziente dei due numeri. Per esempio, se vi sono 1000 persone raggruppate in classi da 50 persone ciascuna, allora evidentemente vi sono 20 classi.

Il bello è che l'insieme quoziente, spesso, individua dei concetti nuovi. Per esempio, nel caso delle rette parallele, si può definire la “direzione” come ogni classe di equivalenza, anche se la “direzione” non è una retta, ma una proprietà condivisa da rette parallele, cioè tipica della classe.

Relazioni d'ordine

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{O}$ in X .

Relazioni d'ordine

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{O}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{O}$ in X si dice relazione *d'ordine* in X se

Relazioni d'ordine

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{O}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{O}$ in X si dice relazione *d'ordine* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{O} x$ per ogni x ;

Relazioni d'ordine

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{O}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{O}$ in X si dice *relazione d'ordine* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{O} x$ per ogni x ;
- è *antisimmetrica*, ossia se $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} x$, allora $x = y$, per ogni x, y ;

Relazioni d'ordine

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{O}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{O}$ in X si dice *relazione d'ordine* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{O} x$ per ogni x ;
- è *antisimmetrica*, ossia se $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} x$, allora $x = y$, per ogni x, y ;
- è *transitiva*, ossia se $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} z$, allora $x \mathcal{O} z$.

Relazioni d'ordine

Consideriamo un insieme X e una relazione $\mathcal{O}$ in X .

Definizione

Una relazione $\mathcal{O}$ in X si dice relazione *d'ordine* in X se

- è *riflessiva*, ossia $x \mathcal{O} x$ per ogni x ;
- è *antisimmetrica*, ossia se $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} x$, allora $x = y$, per ogni x, y ;
- è *transitiva*, ossia se $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} z$, allora $x \mathcal{O} z$.

Come vedete, sembra simile alla relazione di equivalenza, ma l'antisimmetria è molto diversa dalla simmetria. Infatti, non è *mai* possibile, a meno che i due elementi non coincidano, dire che x è in relazione con y e y in relazione con x .

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine.

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero? Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero.

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx =$$

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) =$$

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva.

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva. Adesso è facile: x divide esattamente y significa $y = kx$.

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva. Adesso è facile: x divide esattamente y significa $y = kx$. Poi, y divide esattamente z vuol dire $z = hy$, e quindi

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva. Adesso è facile: x divide esattamente y significa $y = kx$. Poi, y divide esattamente z vuol dire $z = hy$, e quindi

$$z =$$

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva. Adesso è facile: x divide esattamente y significa $y = kx$. Poi, y divide esattamente z vuol dire $z = hy$, e quindi

$$z = hy =$$

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva. Adesso è facile: x divide esattamente y significa $y = kx$. Poi, y divide esattamente z vuol dire $z = hy$, e quindi

$$z = hy = h(kx) =$$

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva. Adesso è facile: x divide esattamente y significa $y = kx$. Poi, y divide esattamente z vuol dire $z = hy$, e quindi

$$z = hy = h(kx) = (hk)x$$

La relazione di “divide esattamente” tra numeri è una relazione d'ordine. Infatti x divide esattamente x (riflessiva), se x divide esattamente y e y divide esattamente x , allora $x = y$ (antisimmetrica). È vero?

Vediamo: se x divide y , allora y è un multiplo di x , cioè $y = kx$ con k intero. Allo stesso modo, allora, se y divide x , avremo $x = hy$, con h intero. Ne segue

$$y = kx = k(hy) = (kh)y.$$

Se vogliamo che questo sia vero *per ogni* y , dovrà essere $kh = 1$, e siccome h e k sono interi, avremo $k = h = 1$ e quindi $x = y$.

Vediamo che è transitiva. Adesso è facile: x divide esattamente y significa $y = kx$. Poi, y divide esattamente z vuol dire $z = hy$, e quindi

$$z = hy = h(kx) = (hk)x$$

e quindi z è multiplo di x , cioè x divide esattamente z .

Altre relazioni d'ordine sono:

Altre relazioni d'ordine sono:

- la relazione $\leq$ (minore o uguale) tra numeri;

Altre relazioni d'ordine sono:

- la relazione $\leq$ (minore o uguale) tra numeri;
- la relazione $\subseteq$ (inclusione) tra insiemi.

Altre relazioni d'ordine sono:

- la relazione $\leq$ (minore o uguale) tra numeri;
- la relazione $\subseteq$ (inclusione) tra insiemi.

La verifica è facile e può essere svolta per esercizio.

Altre relazioni d'ordine sono:

- la relazione $\leq$ (minore o uguale) tra numeri;
- la relazione $\subseteq$ (inclusione) tra insiemi.

La verifica è facile e può essere svolta per esercizio.

Una relazione si dice talvolta di *ordine stretto* se è *antiriflessiva*, cioè se non è mai vero che $x \mathcal{O} x$, *antisimmetrica stretta*, cioè se non è mai vero che $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} x$ e transitiva. Un esempio di questa è la relazione di minore stretto ($<$) tra numeri.

Le relazioni d'ordine si dividono poi in due grandi categorie: quelle *totali* e quelle *parziali*.

Le relazioni d'ordine si dividono poi in due grandi categorie: quelle *totali* e quelle *parziali*.

Una relazione d'ordine *totale* è tale che per ogni coppia di elementi si ha sempre almeno una delle due possibilità: $x \mathcal{O} y$ o $y \mathcal{O} x$.

Le relazioni d'ordine si dividono poi in due grandi categorie: quelle *totali* e quelle *parziali*.

Una relazione d'ordine *totale* è tale che per ogni coppia di elementi si ha sempre almeno una delle due possibilità: $x \mathcal{O} y$ o $y \mathcal{O} x$. L'esempio tipico è $\leq$ tra numeri. Presi infatti due numeri, si ha sempre $x \leq y$ o $y \leq x$.

Le relazioni d'ordine si dividono poi in due grandi categorie: quelle *totali* e quelle *parziali*.

Una relazione d'ordine *totale* è tale che per ogni coppia di elementi si ha sempre almeno una delle due possibilità: $x \mathcal{O} y$ o $y \mathcal{O} x$. L'esempio tipico è $\leq$ tra numeri. Presi infatti due numeri, si ha sempre $x \leq y$ o $y \leq x$.

Una relazione d'ordine non totale si dice invece *parziale*. Ciò vuol dire che esistono almeno due elementi per i quali non si ha né $x \mathcal{O} y$, né $y \mathcal{O} x$.

Le relazioni d'ordine si dividono poi in due grandi categorie: quelle *totali* e quelle *parziali*.

Una relazione d'ordine *totale* è tale che per ogni coppia di elementi si ha sempre almeno una delle due possibilità: $x \mathcal{O} y$ o $y \mathcal{O} x$. L'esempio tipico è $\leq$ tra numeri. Presi infatti due numeri, si ha sempre $x \leq y$ o $y \leq x$.

Una relazione d'ordine non totale si dice invece *parziale*. Ciò vuol dire che esistono almeno due elementi per i quali non si ha né $x \mathcal{O} y$, né $y \mathcal{O} x$. L'esempio tipico è $\subseteq$ tra insiemi o il “divide esattamente” di prima. Per esempio, 5 non divide esattamente 6 e 6 non divide esattamente 5.

Le relazioni d'ordine si dividono poi in due grandi categorie: quelle *totali* e quelle *parziali*.

Una relazione d'ordine *totale* è tale che per ogni coppia di elementi si ha sempre almeno una delle due possibilità: $x \mathcal{O} y$ o $y \mathcal{O} x$. L'esempio tipico è $\leq$ tra numeri. Presi infatti due numeri, si ha sempre $x \leq y$ o $y \leq x$.

Una relazione d'ordine non totale si dice invece *parziale*. Ciò vuol dire che esistono almeno due elementi per i quali non si ha né $x \mathcal{O} y$, né $y \mathcal{O} x$. L'esempio tipico è $\subseteq$ tra insiemi o il “divide esattamente” di prima. Per esempio, 5 non divide esattamente 6 e 6 non divide esattamente 5.

Nel caso di una relazione d'ordine stretto, le modifiche sono semplici: le possibilità salgono a tre per una relazione totale ($x \mathcal{O} y$, $x = y$ o $y \mathcal{O} x$, la cosiddetta *legge di tricotomia*) e non vi sono modifiche per quelle parziali.

Funzioni

Le *funzioni* sono le relazioni più importanti fra insiemi diversi.

Funzioni

Le *funzioni* sono le relazioni più importanti fra insiemi diversi.

Definizione

Funzioni

Le *funzioni* sono le relazioni più importanti fra insiemi diversi.

Definizione

Una *funzione* è una relazione $\mathcal{F}$ da X a Y tale che

Funzioni

Le *funzioni* sono le relazioni più importanti fra insiemi diversi.

Definizione

Una *funzione* è una relazione $\mathcal{F}$ da X a Y tale che

se $x \mathcal{F} y$ e $x \mathcal{F} z$, allora $y = z$.

Cosa significa?

Funzioni

Le *funzioni* sono le relazioni più importanti fra insiemi diversi.

Definizione

Una *funzione* è una relazione $\mathcal{F}$ da X a Y tale che

se $x \mathcal{F} y$ e $x \mathcal{F} z$, allora $y = z$.

Cosa significa?

Vuol dire questo: un generico elemento x di X non può essere in relazione con più di un y . Se ve ne sono due, allora devono coincidere (questo è un metodo contorto per dire che ce n'è al massimo uno).

Funzioni

Le *funzioni* sono le relazioni più importanti fra insiemi diversi.

Definizione

Una *funzione* è una relazione $\mathcal{F}$ da X a Y tale che

se $x \mathcal{F} y$ e $x \mathcal{F} z$, allora $y = z$.

Cosa significa?

Vuol dire questo: un generico elemento x di X non può essere in relazione con più di un y . Se ve ne sono due, allora devono coincidere (questo è un metodo contorto per dire che ce n'è al massimo uno).

La nostra relazione di esempio

$$\mathcal{P} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (c, B), (d, C)\}$$

Funzioni

Le *funzioni* sono le relazioni più importanti fra insiemi diversi.

Definizione

Una *funzione* è una relazione $\mathcal{F}$ da X a Y tale che

se $x \mathcal{F} y$ e $x \mathcal{F} z$, allora $y = z$.

Cosa significa?

Vuol dire questo: un generico elemento x di X non può essere in relazione con più di un y . Se ve ne sono due, allora devono coincidere (questo è un metodo contorto per dire che ce n'è al massimo uno).

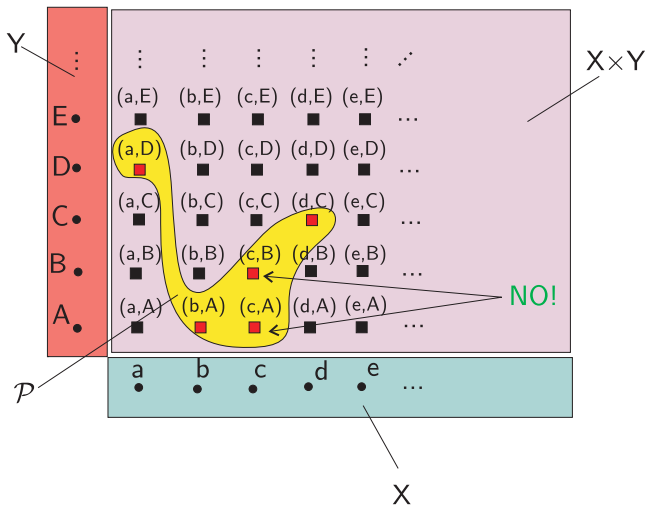
La nostra relazione di esempio

$$\mathcal{P} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (c, B), (d, C)\}$$

non è una funzione, perché c è in relazione sia con A che con B (la casa era di proprietà sia di Anna che di Bruno).

Questo è ben visibile dal grafico: sopra a c vi sono *due* quadretti nella relazione:

Questo è ben visibile dal grafico: sopra a c vi sono *due* quadretti nella relazione:



Però, se modifichiamo la relazione come segue

Però, se modifichiamo la relazione come segue

$$\mathcal{F} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (d, C)\}$$

Però, se modifichiamo la relazione come segue

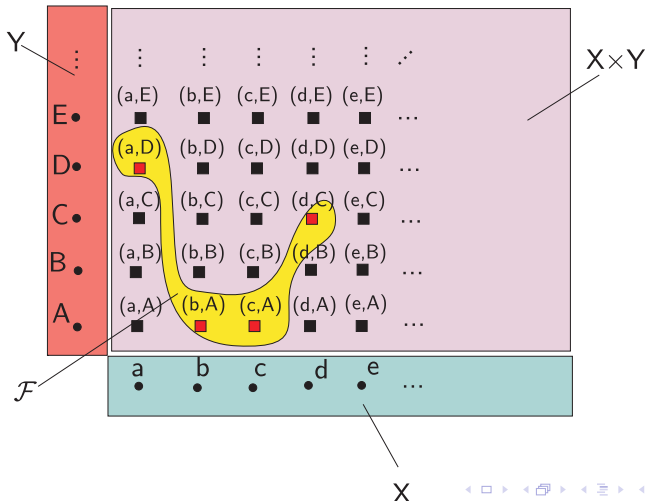
$$\mathcal{F} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (d, C)\}$$

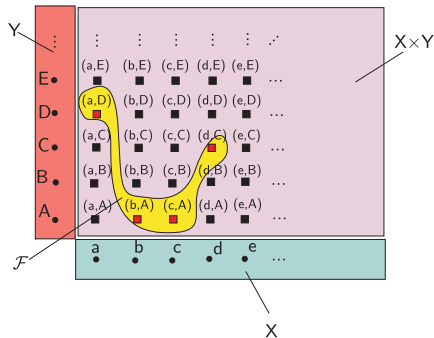
allora otteniamo una funzione, come possiamo vedere dal grafico:

Però, se modifichiamo la relazione come segue

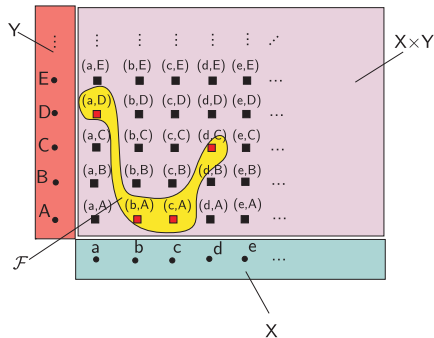
$$\mathcal{F} = \{(a, D), (b, A), (c, A), (d, C)\}$$

allora otteniamo una funzione, come possiamo vedere dal grafico:



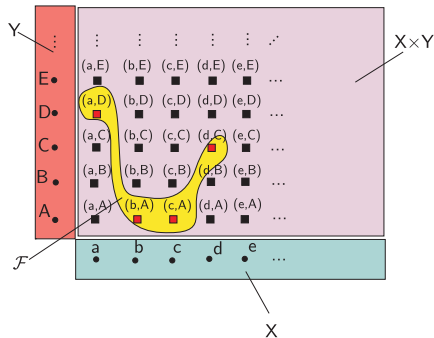


La funzione traduce in maniera matematica l'idea intuitiva di "corrispondenza".



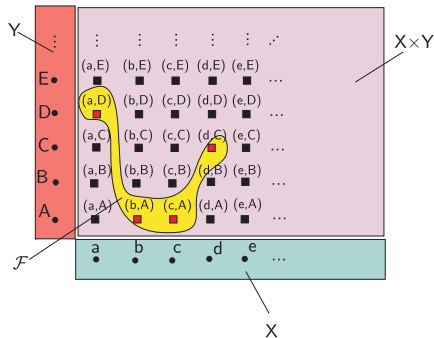
La funzione traduce in maniera matematica l'idea intuitiva di "corrispondenza".

Nell'esempio appena visto, ad alcuni degli elementi minuscoli (a, b, c, d) *corrispondono* degli elementi maiuscoli: l'accendino è di Daniele, il bicchiere di Anna, la casa di Anna e il diario di Chiara.



La funzione traduce in maniera matematica l'idea intuitiva di "corrispondenza".

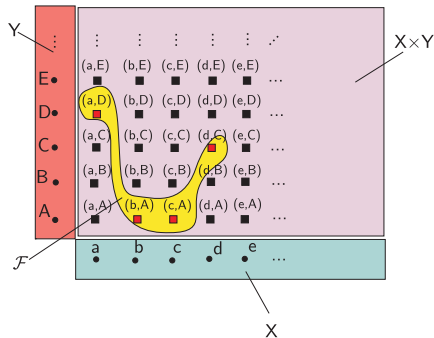
Nell'esempio appena visto, ad alcuni degli elementi minuscoli (a, b, c, d) *corrispondono* degli elementi maiuscoli: l'accendino è di Daniele, il bicchiere di Anna, la casa di Anna e il diario di Chiara. La funzione *associa* a questi oggetti il loro *proprietario*.



La funzione traduce in maniera matematica l'idea intuitiva di "corrispondenza".

Nell'esempio appena visto, ad alcuni degli elementi minuscoli (a, b, c, d) *corrispondono* degli elementi maiuscoli: l'accendino è di Daniele, il bicchiere di Anna, la casa di Anna e il diario di Chiara. La funzione *associa* a questi oggetti il loro *proprietario*.

Come si vede, c'è un elemento, l'**e**lefante, che non appartiene a nessuno, dunque la funzione "proprietario" non è definita per lui (l'elefante non è di nessuno).



La funzione traduce in maniera matematica l'idea intuitiva di “corrispondenza”.

Nell'esempio appena visto, ad alcuni degli elementi minuscoli (a, b, c, d) *corrispondono* degli elementi maiuscoli: l'accendino è di Daniele, il bicchiere di Anna, la casa di Anna e il diario di Chiara. La funzione *associa* a questi oggetti il loro *proprietario*.

Come si vede, c'è un elemento, l'**e**lefante, che non appartiene a nessuno, dunque la funzione “proprietario” non è definita per lui (l'elefante non è di nessuno). In maniera simmetrica, **E**rnesto non è proprietario di niente: non ha niente, come Bruno.

Si definiscono allora due particolari sottoinsiemi, uno di X e uno di Y .

Si definiscono allora due particolari sottoinsiemi, uno di X e uno di Y .

$$D = \{x \in X : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } y \in Y\},$$

Si definiscono allora due particolari sottoinsiemi, uno di X e uno di Y .

$$D = \{x \in X : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } y \in Y\},$$

$$I = \{y \in Y : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } x \in X\}.$$

Si definiscono allora due particolari sottoinsiemi, uno di X e uno di Y .

$$D = \{x \in X : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } y \in Y\},$$

$$I = \{y \in Y : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } x \in X\}.$$

D si chiama *dominio* di $\mathcal{F}$ e I si chiama *immagine* di $\mathcal{F}$, mentre Y si chiama *codominio*.

Si definiscono allora due particolari sottoinsiemi, uno di X e uno di Y .

$$D = \{x \in X : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } y \in Y\},$$

$$I = \{y \in Y : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } x \in X\}.$$

D si chiama *dominio* di $\mathcal{F}$ e I si chiama *immagine* di $\mathcal{F}$, mentre Y si chiama *codominio*. Cosa significano?

Si definiscono allora due particolari sottoinsiemi, uno di X e uno di Y .

$$D = \{x \in X : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } y \in Y\},$$

$$I = \{y \in Y : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } x \in X\}.$$

D si chiama *dominio* di $\mathcal{F}$ e I si chiama *immagine* di $\mathcal{F}$, mentre Y si chiama *codominio*. Cosa significano?

D è l'insieme degli elementi di X che corrispondono a qualcosa nella relazione, cioè, nel nostro esempio, che hanno un proprietario.

Nell'esempio, D è l'insieme $\{a, b, c, d\}$ (l'elefante no perché non è di nessuno).

Si definiscono allora due particolari sottoinsiemi, uno di X e uno di Y .

$$D = \{x \in X : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } y \in Y\},$$

$$I = \{y \in Y : x \mathcal{F} y \quad \text{per qualche } x \in X\}.$$

D si chiama *dominio* di $\mathcal{F}$ e I si chiama *immagine* di $\mathcal{F}$, mentre Y si chiama *codominio*. Cosa significano?

D è l'insieme degli elementi di X che corrispondono a qualcosa nella relazione, cioè, nel nostro esempio, che hanno un proprietario.

Nell'esempio, D è l'insieme $\{a, b, c, d\}$ (l'elefante no perché non è di nessuno).

I è invece l'insieme degli elementi di Y che corrispondono a qualcosa nella relazione, cioè, nel nostro esempio, che sono proprietari di qualcosa.

Nell'esempio, I è l'insieme $\{A, C, D\}$ (Ernesto e Bruno no perché non hanno niente).

Questi insiemi sono molto importanti quando la funzione è definita da una *legge*, cioè una regola che associa ad ogni x un valore y , tipicamente nelle funzioni numeriche, che vedremo in una prossima lezione.

Questi insiemi sono molto importanti quando la funzione è definita da una *legge*, cioè una regola che associa ad ogni x un valore y , tipicamente nelle funzioni numeriche, che vedremo in una prossima lezione.

Se una funzione da X a Y è tale che la sua immagine è tutto Y , si dirà poi *suriettiva*. E' il caso in cui tutte e cinque le persone sono proprietari (nella funzione data ciò non avviene, per cui non è suriettiva).

Questi insiemi sono molto importanti quando la funzione è definita da una *legge*, cioè una regola che associa ad ogni x un valore y , tipicamente nelle funzioni numeriche, che vedremo in una prossima lezione.

Se una funzione da X a Y è tale che la sua immagine è tutto Y , si dirà poi *suriettiva*. E' il caso in cui tutte e cinque le persone sono proprietari (nella funzione data ciò non avviene, per cui non è suriettiva).

Siccome una funzione è una relazione, si può sempre considerarne la relazione inversa $\mathcal{F}^{-1}$, che però non è assolutamente detto che sia una funzione.

Questi insiemi sono molto importanti quando la funzione è definita da una *legge*, cioè una regola che associa ad ogni x un valore y , tipicamente nelle funzioni numeriche, che vedremo in una prossima lezione.

Se una funzione da X a Y è tale che la sua immagine è tutto Y , si dirà poi *suriettiva*. E' il caso in cui tutte e cinque le persone sono proprietari (nella funzione data ciò non avviene, per cui non è suriettiva).

Siccome una funzione è una relazione, si può sempre considerarne la relazione inversa $\mathcal{F}^{-1}$, che però non è assolutamente detto che sia una funzione. Nel nostro caso, infatti, essa è

Questi insiemi sono molto importanti quando la funzione è definita da una *legge*, cioè una regola che associa ad ogni x un valore y , tipicamente nelle funzioni numeriche, che vedremo in una prossima lezione.

Se una funzione da X a Y è tale che la sua immagine è tutto Y , si dirà poi *suriettiva*. E' il caso in cui tutte e cinque le persone sono proprietari (nella funzione data ciò non avviene, per cui non è suriettiva).

Siccome una funzione è una relazione, si può sempre considerarne la relazione inversa $\mathcal{F}^{-1}$, che però non è assolutamente detto che sia una funzione. Nel nostro caso, infatti, essa è

$$\mathcal{F}^{-1} = \{(D, a), (A, b), (A, c), (C, d)\}$$

Questi insiemi sono molto importanti quando la funzione è definita da una *legge*, cioè una regola che associa ad ogni x un valore y , tipicamente nelle funzioni numeriche, che vedremo in una prossima lezione.

Se una funzione da X a Y è tale che la sua immagine è tutto Y , si dirà poi *suriettiva*. E' il caso in cui tutte e cinque le persone sono proprietari (nella funzione data ciò non avviene, per cui non è suriettiva).

Siccome una funzione è una relazione, si può sempre considerarne la relazione inversa $\mathcal{F}^{-1}$, che però non è assolutamente detto che sia una funzione. Nel nostro caso, infatti, essa è

$$\mathcal{F}^{-1} = \{(D, a), (A, b), (A, c), (C, d)\}$$

e non è una funzione, perché Anna possiede sia il bicchiere che la casa.

Questi insiemi sono molto importanti quando la funzione è definita da una *legge*, cioè una regola che associa ad ogni x un valore y , tipicamente nelle funzioni numeriche, che vedremo in una prossima lezione.

Se una funzione da X a Y è tale che la sua immagine è tutto Y , si dirà poi *suriettiva*. E' il caso in cui tutte e cinque le persone sono proprietari (nella funzione data ciò non avviene, per cui non è suriettiva).

Siccome una funzione è una relazione, si può sempre considerarne la relazione inversa $\mathcal{F}^{-1}$, che però non è assolutamente detto che sia una funzione. Nel nostro caso, infatti, essa è

$$\mathcal{F}^{-1} = \{(D, a), (A, b), (A, c), (C, d)\}$$

e non è una funzione, perché Anna possiede sia il bicchiere che la casa. Se l'inversa di una funzione è anch'essa una funzione, allora essa si dice *iniettiva*.

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.
Per una funzione, la definizione era

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

se $x \mathcal{F} y$ e $x \mathcal{F} z$, allora $y = z$.

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

se $x \mathcal{F} y$ e $x \mathcal{F} z$, allora $y = z$.

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

se $x \mathcal{F} y$ e $x \mathcal{F} z$, allora $y = z$.

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

se $x \mathcal{F}^{-1} y$ e $x \mathcal{F}^{-1} z$, allora $y = z$.

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

$$\text{se } x \mathcal{F} y \text{ e } x \mathcal{F} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

$$\text{se } x \mathcal{F}^{-1} y \text{ e } x \mathcal{F}^{-1} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Adesso, $x \mathcal{F}^{-1} y$ vuol dire $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}$,

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

$$\text{se } x \mathcal{F} y \text{ e } x \mathcal{F} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

$$\text{se } x \mathcal{F}^{-1} y \text{ e } x \mathcal{F}^{-1} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Adesso, $x \mathcal{F}^{-1} y$ vuol dire $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}$, cioè $(y, x) \in \mathcal{F}$,

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

$$\text{se } x \mathcal{F} y \text{ e } x \mathcal{F} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

$$\text{se } x \mathcal{F}^{-1} y \text{ e } x \mathcal{F}^{-1} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Adesso, $x \mathcal{F}^{-1} y$ vuol dire $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}$, cioè $(y, x) \in \mathcal{F}$, cioè $y \mathcal{F} x$ e analogamente per z .

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

$$\text{se } x \mathcal{F} y \text{ e } x \mathcal{F} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

$$\text{se } x \mathcal{F}^{-1} y \text{ e } x \mathcal{F}^{-1} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Adesso, $x \mathcal{F}^{-1} y$ vuol dire $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}$, cioè $(y, x) \in \mathcal{F}$, cioè $y \mathcal{F} x$ e analogamente per z .

Abbiamo quindi

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

$$\text{se } x \mathcal{F} y \text{ e } x \mathcal{F} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

$$\text{se } x \mathcal{F}^{-1} y \text{ e } x \mathcal{F}^{-1} z, \quad \text{allora } y = z.$$

Adesso, $x \mathcal{F}^{-1} y$ vuol dire $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}$, cioè $(y, x) \in \mathcal{F}$, cioè $y \mathcal{F} x$ e analogamente per z .

Abbiamo quindi

$$\text{se } y \mathcal{F} x \text{ e } z \mathcal{F} x, \quad \text{allora } y = z.$$

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

$$\text{se } x \mathcal{F} y \text{ e } x \mathcal{F} z, \text{ allora } y = z.$$

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

$$\text{se } x \mathcal{F}^{-1} y \text{ e } x \mathcal{F}^{-1} z, \text{ allora } y = z.$$

Adesso, $x \mathcal{F}^{-1} y$ vuol dire $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}$, cioè $(y, x) \in \mathcal{F}$, cioè $y \mathcal{F} x$ e analogamente per z .

Abbiamo quindi

$$\text{se } y \mathcal{F} x \text{ e } z \mathcal{F} x, \text{ allora } y = z.$$

Questo significa che se ad y e z la funzione $\mathcal{F}$ fa corrispondere lo stesso x , allora $y = z$.

Approfondimento

Vediamo come si scrive la condizione di iniettività.

Per una funzione, la definizione era

$$\text{se } x \mathcal{F} y \text{ e } x \mathcal{F} z, \text{ allora } y = z.$$

Ora dobbiamo scriverla per $\mathcal{F}^{-1}$, ossia

$$\text{se } x \mathcal{F}^{-1} y \text{ e } x \mathcal{F}^{-1} z, \text{ allora } y = z.$$

Adesso, $x \mathcal{F}^{-1} y$ vuol dire $(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}$, cioè $(y, x) \in \mathcal{F}$, cioè $y \mathcal{F} x$ e analogamente per z .

Abbiamo quindi

$$\text{se } y \mathcal{F} x \text{ e } z \mathcal{F} x, \text{ allora } y = z.$$

Questo significa che se ad y e z la funzione $\mathcal{F}$ fa corrispondere lo stesso x , allora $y = z$. Alternativamente, si può dire che ad elementi diversi corrispondono immagini diverse.

Esempi di funzioni non numeriche sono quella che fa corrispondere ad ogni persona la propria madre (non iniettiva), ad ogni libro il suo titolo (non iniettiva, ci possono essere libri diversi con titoli uguali), e così via.

Esempi di funzioni non numeriche sono quella che fa corrispondere ad ogni persona la propria madre (non iniettiva), ad ogni libro il suo titolo (non iniettiva, ci possono essere libri diversi con titoli uguali), e così via. Se una funzione da X a Y ha un dominio più piccolo di X , si tende a sostituirla con la stessa vista come relazione da D a Y .

Esempi di funzioni non numeriche sono quella che fa corrispondere ad ogni persona la propria madre (non iniettiva), ad ogni libro il suo titolo (non iniettiva, ci possono essere libri diversi con titoli uguali), e così via. Se una funzione da X a Y ha un dominio più piccolo di X , si tende a sostituirla con la stessa vista come relazione da D a Y . Ciò perché prevale l'idea della corrispondenza, e non servono a nulla elementi sui quali la funzione non è definita. Per esempio, spesso si dice che la funzione radice quadrata $\sqrt{}$ è definita sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Esempi di funzioni non numeriche sono quella che fa corrispondere ad ogni persona la propria madre (non iniettiva), ad ogni libro il suo titolo (non iniettiva, ci possono essere libri diversi con titoli uguali), e così via. Se una funzione da X a Y ha un dominio più piccolo di X , si tende a sostituirla con la stessa vista come relazione da D a Y . Ciò perché prevale l'idea della corrispondenza, e non servono a nulla elementi sui quali la funzione non è definita. Per esempio, spesso si dice che la funzione radice quadrata $\sqrt{}$ è definita sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Siccome però la radice quadrata di un numero negativo non ha senso in $\mathbb{R}$, il dominio di questa funzione è l'insieme $\{x \geq 0\}$ dei numeri reali non negativi.

Esempi di funzioni non numeriche sono quella che fa corrispondere ad ogni persona la propria madre (non iniettiva), ad ogni libro il suo titolo (non iniettiva, ci possono essere libri diversi con titoli uguali), e così via. Se una funzione da X a Y ha un dominio più piccolo di X , si tende a sostituirla con la stessa vista come relazione da D a Y . Ciò perché prevale l'idea della corrispondenza, e non servono a nulla elementi sui quali la funzione non è definita. Per esempio, spesso si dice che la funzione radice quadrata $\sqrt{}$ è definita sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Siccome però la radice quadrata di un numero negativo non ha senso in $\mathbb{R}$, il dominio di questa funzione è l'insieme $\{x \geq 0\}$ dei numeri reali non negativi. Pertanto si intende la radice quadrata in quanto definita su questo insieme.

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*.

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*. Se essa si restringe al suo dominio, allora rappresenta l'esempio di corrispondenza “uno a uno”:

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*. Se essa si restringe al suo dominio, allora rappresenta l'esempio di corrispondenza “uno a uno”: ad ogni persona la sua impronta digitale e ad ogni impronta digitale la persona corrispondente, per esempio.

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*. Se essa si restringe al suo dominio, allora rappresenta l'esempio di corrispondenza “uno a uno”: ad ogni persona la sua impronta digitale e ad ogni impronta digitale la persona corrispondente, per esempio. Nell'ambito delle funzioni numeriche, cioè nei quali X e Y sono insiemi di numeri, la notazione delle funzioni è diversa.

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*. Se essa si restringe al suo dominio, allora rappresenta l'esempio di corrispondenza “uno a uno”: ad ogni persona la sua impronta digitale e ad ogni impronta digitale la persona corrispondente, per esempio. Nell'ambito delle funzioni numeriche, cioè nei quali X e Y sono insiemi di numeri, la notazione delle funzioni è diversa. Anziché scrivere $x \mathcal{F} y$ si scrive $y = \mathcal{F}(x)$ o più semplicemente $y = f(x)$.

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*. Se essa si restringe al suo dominio, allora rappresenta l'esempio di corrispondenza “uno a uno”: ad ogni persona la sua impronta digitale e ad ogni impronta digitale la persona corrispondente, per esempio. Nell'ambito delle funzioni numeriche, cioè nei quali X e Y sono insiemi di numeri, la notazione delle funzioni è diversa. Aniché scrivere $x \mathcal{F} y$ si scrive $y = \mathcal{F}(x)$ o più semplicemente $y = f(x)$. Questo deriva dal fatto che molte *espressioni* come polinomi e frazioni algebriche sono funzioni; per esempio

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*. Se essa si restringe al suo dominio, allora rappresenta l'esempio di corrispondenza “uno a uno”: ad ogni persona la sua impronta digitale e ad ogni impronta digitale la persona corrispondente, per esempio. Nell'ambito delle funzioni numeriche, cioè nei quali X e Y sono insiemi di numeri, la notazione delle funzioni è diversa. Anziché scrivere $x \mathcal{F} y$ si scrive $y = \mathcal{F}(x)$ o più semplicemente $y = f(x)$. Questo deriva dal fatto che molte *espressioni* come polinomi e frazioni algebriche sono funzioni; per esempio

$$f(x) = x^2 + 1, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \text{ecc.}$$

Una funzione che sia simultaneamente iniettiva e suriettiva è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*. Se essa si restringe al suo dominio, allora rappresenta l'esempio di corrispondenza “uno a uno”: ad ogni persona la sua impronta digitale e ad ogni impronta digitale la persona corrispondente, per esempio. Nell'ambito delle funzioni numeriche, cioè nei quali X e Y sono insiemi di numeri, la notazione delle funzioni è diversa. Anziché scrivere $x \mathcal{F} y$ si scrive $y = \mathcal{F}(x)$ o più semplicemente $y = f(x)$. Questo deriva dal fatto che molte *espressioni* come polinomi e frazioni algebriche sono funzioni; per esempio

$$f(x) = x^2 + 1, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \text{ecc.}$$

Questi saranno l'argomento di prossime lezioni.