

Rapporto incrementale e derivata

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Perché la derivata: un po' di storia

Il concetto di **derivata di una funzione** è tra i più importanti della matematica, e caratterizza quella disciplina che va sotto il nome di **analisi matematica**.

Perché la derivata: un po' di storia

Il concetto di **derivata di una funzione** è tra i più importanti della matematica, e caratterizza quella disciplina che va sotto il nome di **analisi matematica**.

Tale concetto ha sia un'origine “fisica” (più propriamente meccanica) che “geometrica”: la sua prima formalizzazione risale ai tempi di **Isaac Newton** (1643-1727) e **Gottfried Leibniz** (1646-1716).

Perché la derivata: un po' di storia

Il concetto di **derivata di una funzione** è tra i più importanti della matematica, e caratterizza quella disciplina che va sotto il nome di **analisi matematica**.

Tale concetto ha sia un'origine “fisica” (più propriamente meccanica) che “geometrica”: la sua prima formalizzazione risale ai tempi di **Isaac Newton** (1643-1727) e **Gottfried Leibniz** (1646-1716).

Newton lo elaborò per risolvere il problema della dimostrazione delle leggi di Keplero, in particolare per studiare le orbite coniche dei pianeti.

Perché la derivata: un po' di storia

Il concetto di **derivata di una funzione** è tra i più importanti della matematica, e caratterizza quella disciplina che va sotto il nome di **analisi matematica**.

Tale concetto ha sia un'origine "fisica" (più propriamente meccanica) che "geometrica": la sua prima formalizzazione risale ai tempi di **Isaac Newton** (1643-1727) e **Gottfried Leibniz** (1646-1716).

Newton lo elaborò per risolvere il problema della dimostrazione delle leggi di Keplero, in particolare per studiare le orbite coniche dei pianeti.

Leibniz invece era più interessato al problema geometrico di trovare le rette tangenti e le aree racchiuse da una curva.

Eccesso di velocità: tutor o autovelox?

Prendiamo un problema tipico nello studio del movimento: definire la **velocità** di un punto.

Eccesso di velocità: tutor o autovelox?

Prendiamo un problema tipico nello studio del movimento: definire la **velocità** di un punto.

Dal punto di vista fisico, tutti (o quasi. . .) ricorderanno che la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Questa è la definizione di velocità **media**.

Eccesso di velocità: tutor o autovelox?

Prendiamo un problema tipico nello studio del movimento: definire la **velocità** di un punto.

Dal punto di vista fisico, tutti (o quasi. . .) ricorderanno che la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Questa è la definizione di velocità **media**.

Un concetto più difficile da definire è invece quello di **velocità istantanea**, anche se sembra un concetto molto naturale. La velocità istantanea non ha bisogno di uno spazio percorso e di un tempo impiegato, ma dice *in un dato istante* qual'è la velocità di un oggetto.

Eccesso di velocità: tutor o autovelox?

Prendiamo un problema tipico nello studio del movimento: definire la **velocità** di un punto.

Dal punto di vista fisico, tutti (o quasi. . .) ricorderanno che la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Questa è la definizione di velocità **media**.

Un concetto più difficile da definire è invece quello di **velocità istantanea**, anche se sembra un concetto molto naturale. La velocità istantanea non ha bisogno di uno spazio percorso e di un tempo impiegato, ma dice *in un dato istante* qual'è la velocità di un oggetto.

Quando veniamo multati per eccesso di velocità, quella che viene rilevata dall'autovelox è proprio la velocità istantanea (o quasi, saremo più precisi in seguito).

Eccesso di velocità: tutor o autovelox?

Prendiamo un problema tipico nello studio del movimento: definire la **velocità** di un punto.

Dal punto di vista fisico, tutti (o quasi. . .) ricorderanno che la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Questa è la definizione di velocità **media**.

Un concetto più difficile da definire è invece quello di **velocità istantanea**, anche se sembra un concetto molto naturale. La velocità istantanea non ha bisogno di uno spazio percorso e di un tempo impiegato, ma dice *in un dato istante* qual'è la velocità di un oggetto.

Quando veniamo multati per eccesso di velocità, quella che viene rilevata dall'autovelox è proprio la velocità istantanea (o quasi, saremo più precisi in seguito).

Solo di recente è apparso su alcune autostrade il sistema Tutor, che invece è più legato alla velocità media che a quella istantanea.

La velocità istantanea

Per suggerire il concetto di velocità istantanea (che potremo formalizzare solo grazie all'uso della derivata), di solito i libri di fisica fanno così:

La velocità istantanea

Per suggerire il concetto di velocità istantanea (che potremo formalizzare solo grazie all'uso della derivata), di solito i libri di fisica fanno così: denotando con Δs lo spazio percorso, e con Δt il tempo impiegato a percorrerlo, si ha

$$\text{velocità media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

La velocità istantanea

Per suggerire il concetto di velocità istantanea (che potremo formalizzare solo grazie all'uso della derivata), di solito i libri di fisica fanno così: denotando con Δs lo spazio percorso, e con Δt il tempo impiegato a percorrerlo, si ha

$$\text{velocità media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Se invece si considera un intervallo di tempo *molto* piccolo dt e quindi uno spazio percorso *molto* piccolo ds , si ottiene

$$\text{velocità istantanea} = \frac{ds}{dt}.$$

La velocità istantanea

Per suggerire il concetto di velocità istantanea (che potremo formalizzare solo grazie all'uso della derivata), di solito i libri di fisica fanno così: denotando con Δs lo spazio percorso, e con Δt il tempo impiegato a percorrerlo, si ha

$$\text{velocità media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Se invece si considera un intervallo di tempo *molto* piccolo dt e quindi uno spazio percorso *molto* piccolo ds , si ottiene

$$\text{velocità istantanea} = \frac{ds}{dt}.$$

Non sembra esserci differenza, a parte la richiesta di avere intervalli *molto* piccoli. In effetti, viene suggerita l'idea che, se l'intervallo di tempo della misurazione è abbastanza piccolo, la velocità istantanea non dipende più dall'ampiezza dell'intervallo, ma resta costante.

Il rapporto incrementale

Questa è proprio l'idea del cosiddetto **rapporto incrementale**.

Il rapporto incrementale

Questa è proprio l'idea del cosiddetto **rapporto incrementale**.

Definizione

Data una funzione $s(t)$, si chiama rapporto incrementale la quantità

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Il rapporto incrementale

Questa è proprio l'idea del cosiddetto **rapporto incrementale**.

Definizione

Data una funzione $s(t)$, si chiama rapporto incrementale la quantità

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Chiaramente, il rapporto incrementale dipende dall'istante t in cui viene calcolato e dal passo h usato.

Il rapporto incrementale

Questa è proprio l'idea del cosiddetto **rapporto incrementale**.

Definizione

Data una funzione $s(t)$, si chiama rapporto incrementale la quantità

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Chiaramente, il rapporto incrementale dipende dall'istante t in cui viene calcolato e dal passo h usato.

Se $s(t)$ è lo spazio percorso da un punto, il rapporto incrementale è proprio la velocità media del punto nell'intervallo di tempo $[t, t+h]$.

Il rapporto incrementale

Questa è proprio l'idea del cosiddetto **rapporto incrementale**.

Definizione

Data una funzione $s(t)$, si chiama rapporto incrementale la quantità

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Chiaramente, il rapporto incrementale dipende dall'istante t in cui viene calcolato e dal passo h usato.

Se $s(t)$ è lo spazio percorso da un punto, il rapporto incrementale è proprio la velocità media del punto nell'intervallo di tempo $[t, t+h]$.

(Se h è negativo, si intende che la velocità media è calcolata in un intervallo di tempo che *precede* t .)

Dal rapporto incrementale alla derivata

Grazie al concetto di **limite** di una funzione, siamo in grado di formalizzare in modo preciso il vago concetto di “molto piccolo” che avevamo usato per introdurre la velocità istantanea.

Dal rapporto incrementale alla derivata

Grazie al concetto di **limite** di una funzione, siamo in grado di formalizzare in modo preciso il vago concetto di “molto piccolo” che avevamo usato per introdurre la velocità istantanea.

Se infatti la velocità media è data dal rapporto incrementale, la velocità istantanea si definisce prendendo il limite per $h \rightarrow 0$ del rapporto incrementale.

Definizione

Data una funzione $s(t)$, la sua derivata all'istante t è la quantità

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Dal rapporto incrementale alla derivata

Grazie al concetto di **limite** di una funzione, siamo in grado di formalizzare in modo preciso il vago concetto di “molto piccolo” che avevamo usato per introdurre la velocità istantanea.

Se infatti la velocità media è data dal rapporto incrementale, la velocità istantanea si definisce prendendo il limite per $h \rightarrow 0$ del rapporto incrementale.

Definizione

Data una funzione $s(t)$, la sua derivata all'istante t è la quantità

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

La derivata non dipende più dal valore di h , anzi in un certo senso (nel senso del limite), h è stato messo a 0.

Ancora autovelox!

Ora ci si può chiedere come faccia un dispositivo come l'autovelox ad essere così bravo da calcolare una derivata: bisogna infatti fare un limite, e risolvere una forma indeterminata. . .

Ancora autovelox!

Ora ci si può chiedere come faccia un dispositivo come l'autovelox ad essere così bravo da calcolare una derivata: bisogna infatti fare un limite, e risolvere una forma indeterminata. . .

In effetti, l'autovelox calcola un rapporto incrementale, cioè una velocità media, ma la calcola in un intervallo di tempo molto piccolo, tanto che può essere considerato un limite $\Delta t \rightarrow 0$.

Ancora autovelox!

Ora ci si può chiedere come faccia un dispositivo come l'autovelox ad essere così bravo da calcolare una derivata: bisogna infatti fare un limite, e risolvere una forma indeterminata. . .

In effetti, l'autovelox calcola un rapporto incrementale, cioè una velocità media, ma la calcola in un intervallo di tempo molto piccolo, tanto che può essere considerato un limite $\Delta t \rightarrow 0$.

Quindi, a rigore, anche l'autovelox misura una *velocità media*, ma lo fa con un livello di approssimazione tale da poterla considerare come *velocità istantanea*.

Notazione

La derivata della funzione $s(t)$ nel punto t si denota usualmente con $s'(t)$. Questa notazione è stata introdotta da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Notazione

La derivata della funzione $s(t)$ nel punto t si denota usualmente con $s'(t)$. Questa notazione è stata introdotta da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Esistono però altri simboli: se la variabile rispetto a cui si deriva è proprio il tempo, come nel nostro esempio, viene spesso usato il simbolo $\dot{s}(t)$ (si legge “s punto”), che è stato introdotto proprio da Newton.

Notazione

La derivata della funzione $s(t)$ nel punto t si denota usualmente con $s'(t)$. Questa notazione è stata introdotta da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Esistono però altri simboli: se la variabile rispetto a cui si deriva è proprio il tempo, come nel nostro esempio, viene spesso usato il simbolo $\dot{s}(t)$ (si legge “s punto”), che è stato introdotto proprio da Newton.

Un altro simbolo molto comune è $\frac{ds}{dt}$, che ricorda proprio il rapporto incrementale da cui la derivata proviene. Questa era la notazione usata da Leibniz.

Interpretazione geometrica

Oltre all'esigenza “meccanica” vista prima, la derivata ha anche un notevole significato geometrico. Stavolta consideriamo una funzione $y = f(x)$, che può essere rappresentata in un piano cartesiano.

Interpretazione geometrica

Oltre all'esigenza “meccanica” vista prima, la derivata ha anche un notevole significato geometrico. Stavolta consideriamo una funzione $y = f(x)$, che può essere rappresentata in un piano cartesiano.

Fissato un punto x_0 , la derivata della funzione nel punto x_0 fornisce il valore del coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$, ovvero

$$m = f'(x_0).$$

Interpretazione geometrica

Oltre all'esigenza "meccanica" vista prima, la derivata ha anche un notevole significato geometrico. Stavolta consideriamo una funzione $y = f(x)$, che può essere rappresentata in un piano cartesiano.

Fissato un punto x_0 , la derivata della funzione nel punto x_0 fornisce il valore del coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$, ovvero

$$m = f'(x_0).$$

Infatti, il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ricordando le formule della geometria analitica, è proprio il coefficiente angolare della retta che passa per i punti di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Interpretazione geometrica

Oltre all'esigenza “meccanica” vista prima, la derivata ha anche un notevole significato geometrico. Stavolta consideriamo una funzione $y = f(x)$, che può essere rappresentata in un piano cartesiano.

Fissato un punto x_0 , la derivata della funzione nel punto x_0 fornisce il valore del coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$, ovvero

$$m = f'(x_0).$$

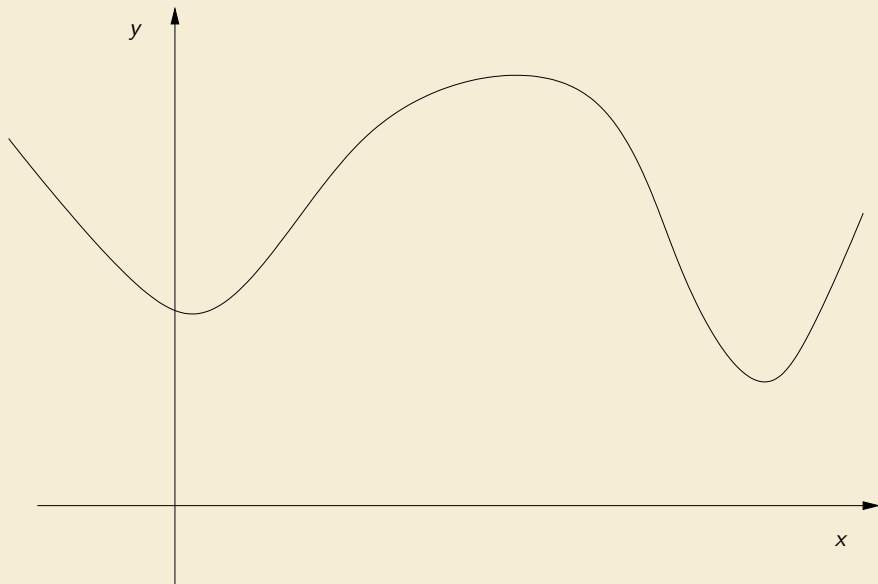
Infatti, il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

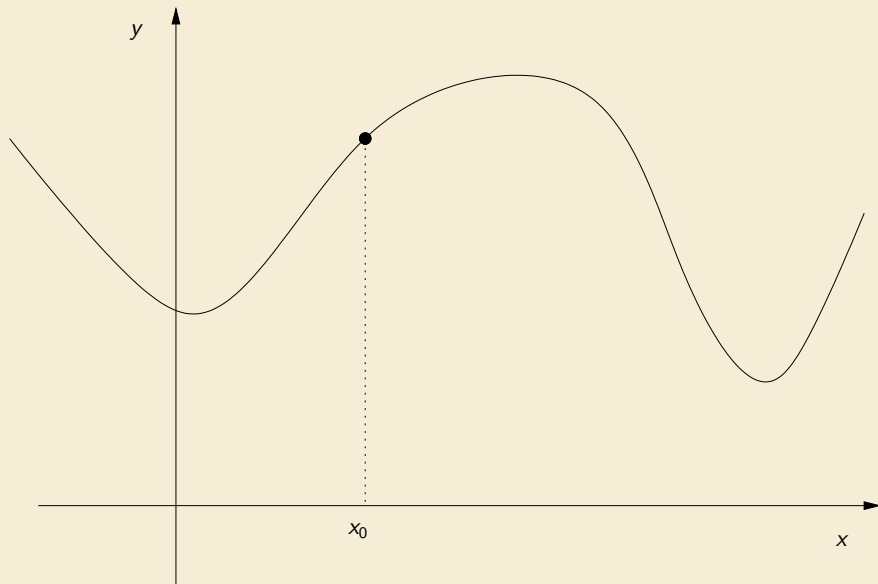
ricordando le formule della geometria analitica, è proprio il coefficiente angolare della retta che passa per i punti di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Mandando al limite questo rapporto, viene proprio il coefficiente angolare della retta tangente.

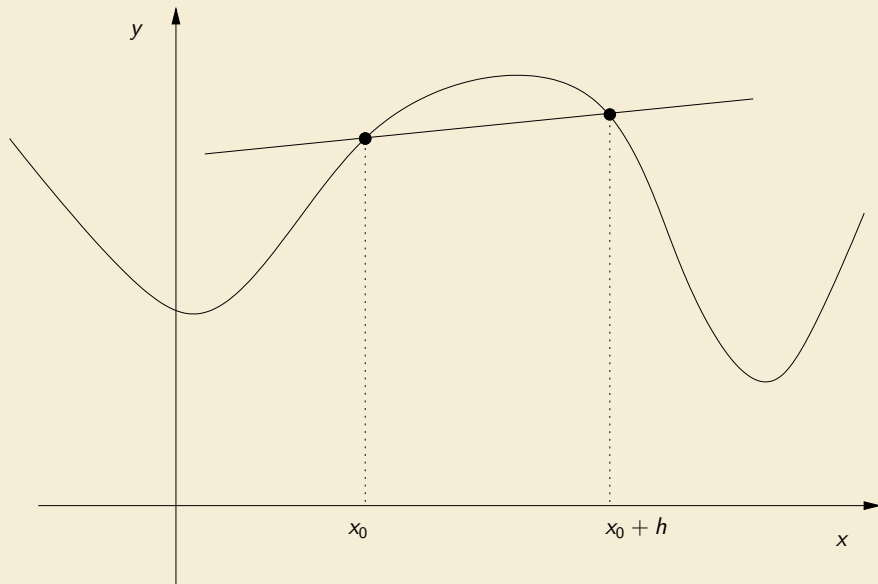
Retta tangente



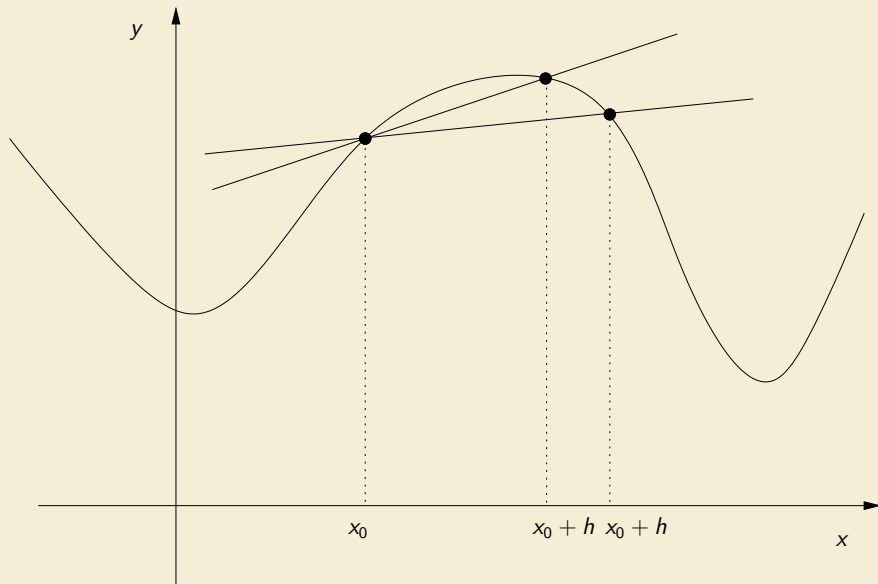
Retta tangente



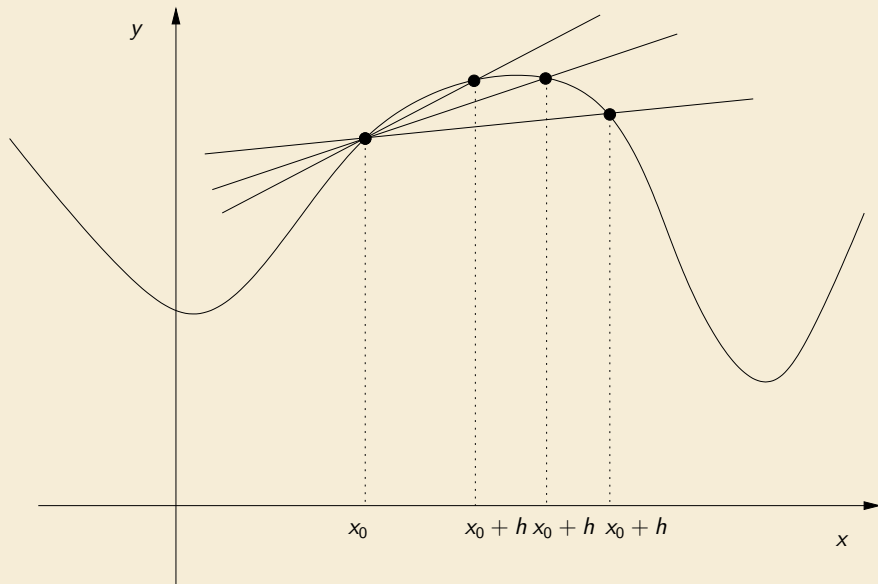
Retta tangente



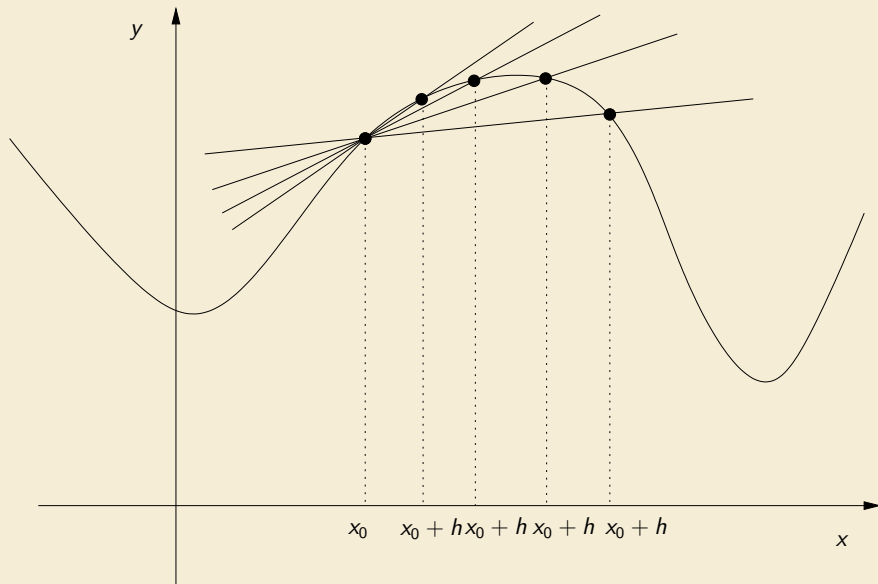
Retta tangente



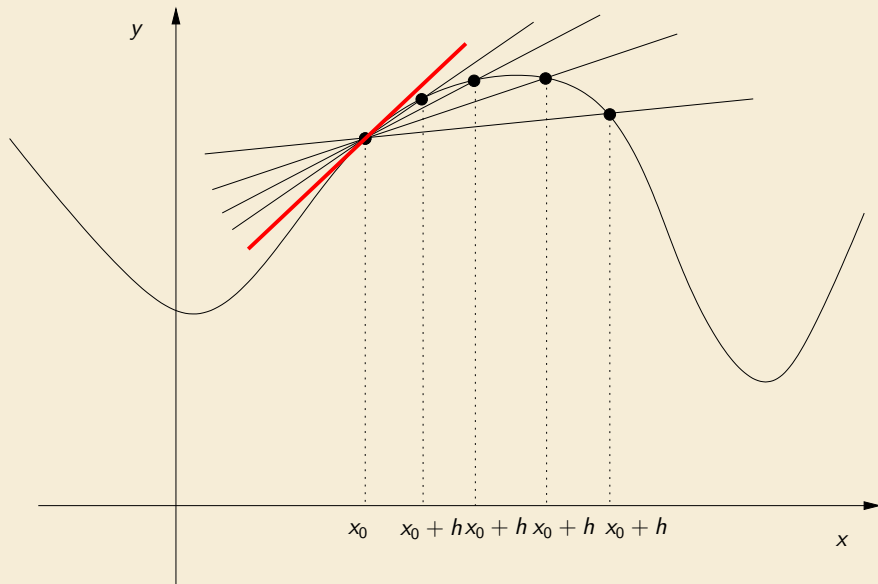
Retta tangente



Retta tangente



Retta tangente



Attenzione alle patologie

Quando si prende il limite di una funzione (in questo caso del rapporto incrementale), bisogna sempre stare attenti a non dare per scontato che tale limite esista.

Attenzione alle patologie

Quando si prende il limite di una funzione (in questo caso del rapporto incrementale), bisogna sempre stare attenti a non dare per scontato che tale limite esista.

Se il limite non esiste, si dice che la funzione **non è derivabile** in quel punto.

Attenzione alle patologie

Quando si prende il limite di una funzione (in questo caso del rapporto incrementale), bisogna sempre stare attenti a non dare per scontato che tale limite esista.

Se il limite non esiste, si dice che la funzione **non è derivabile** in quel punto.

Ad esempio, può capitare che si ottengano valori diversi del limite a seconda che h sia positivo oppure negativo. In questo caso si dice che la funzione ha un **punto angoloso**.

Attenzione alle patologie

Quando si prende il limite di una funzione (in questo caso del rapporto incrementale), bisogna sempre stare attenti a non dare per scontato che tale limite esista.

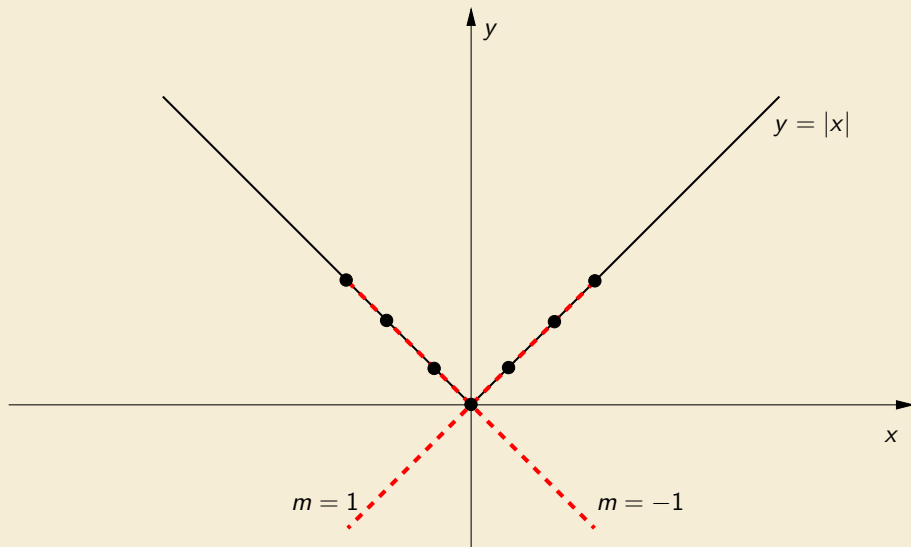
Se il limite non esiste, si dice che la funzione **non è derivabile** in quel punto.

Ad esempio, può capitare che si ottengano valori diversi del limite a seconda che h sia positivo oppure negativo. In questo caso si dice che la funzione ha un **punto angoloso**.

Succede questo per la funzione $y = |x|$ nel punto 0: in questo caso il rapporto incrementale ha limite 1 se $h > 0$, e ha limite -1 se $h < 0$.

Punto angoloso

Vediamone un disegno:



Attenzione alle patologie

Può anche capitare che il rapporto incrementale tenda all'infinito. Anche in questo caso si dice che la funzione **non è derivabile** nel punto considerato e, a seconda del segno dell'infinito, si distingue tra **flessi a tangente verticale** e **cuspidi**.

Attenzione alle patologie

Può anche capitare che il rapporto incrementale tenda all'infinito. Anche in questo caso si dice che la funzione **non è derivabile** nel punto considerato e, a seconda del segno dell'infinito, si distingue tra **flessi a tangente verticale** e **cuspidi**.

Si ha un flesso a tangente verticale quando il rapporto incrementale tende all'infinito mantenendo lo stesso segno sia da destra che da sinistra (ovvero per $h > 0$ e per $h < 0$).

Attenzione alle patologie

Può anche capitare che il rapporto incrementale tenda all'infinito. Anche in questo caso si dice che la funzione **non è derivabile** nel punto considerato e, a seconda del segno dell'infinito, si distingue tra **flessi a tangente verticale** e **cuspidi**.

Si ha un flesso a tangente verticale quando il rapporto incrementale tende all'infinito mantenendo lo stesso segno sia da destra che da sinistra (ovvero per $h > 0$ e per $h < 0$).

In questo caso la funzione ammette la retta tangente, ma tale retta è verticale e dunque il suo coefficiente angolare è ∞ .

Attenzione alle patologie

Può anche capitare che il rapporto incrementale tenda all'infinito. Anche in questo caso si dice che la funzione **non è derivabile** nel punto considerato e, a seconda del segno dell'infinito, si distingue tra **flessi a tangente verticale** e **cuspidi**.

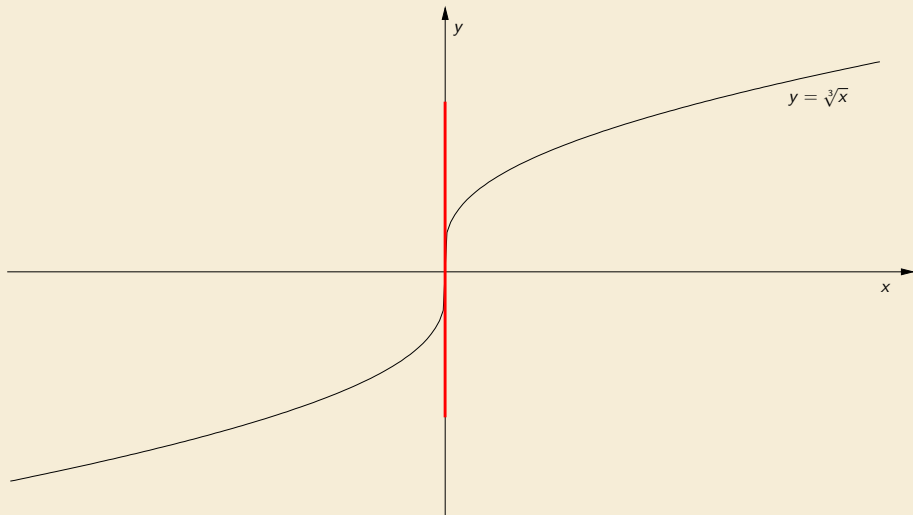
Si ha un flesso a tangente verticale quando il rapporto incrementale tende all'infinito mantenendo lo stesso segno sia da destra che da sinistra (ovvero per $h > 0$ e per $h < 0$).

In questo caso la funzione ammette la retta tangente, ma tale retta è verticale e dunque il suo coefficiente angolare è ∞ .

Si parla di flesso verticale **ascendente** quando il limite tende a $+\infty$, e di flesso verticale **discendente** quando il limite tende a $-\infty$.

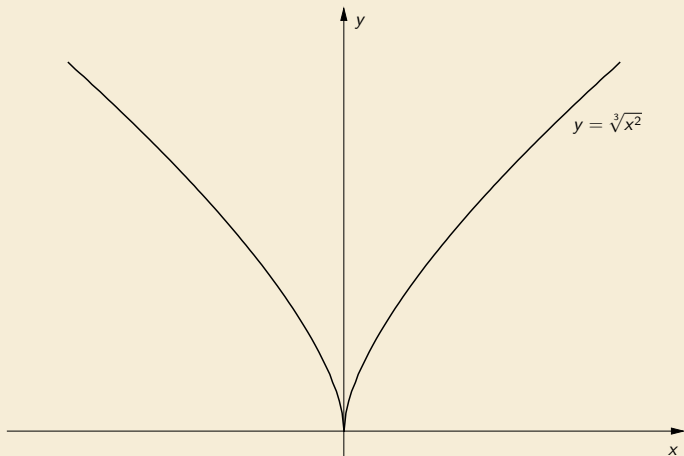
Flesso verticale

Ad esempio, la funzione $y = \sqrt[3]{x}$ ha un flesso verticale ascendente in 0, poiché il rapporto incrementale tende a $+\infty$:



Flesso verticale

Invece la funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$ ha una cuspidine in 0, poiché il rapporto incrementale tende a $-\infty$ per h negativo e a $+\infty$ per h positivo:



Forma indeterminata

Per come è stato definito, il limite del rapporto incrementale si presenta sempre nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Forma indeterminata

Per come è stato definito, il limite del rapporto incrementale si presenta sempre nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Questo significa che per poter calcolare le derivate bisogna saper risolvere questa forma indeterminata, eventualmente anche mediante l'uso dei limiti notevoli.

Forma indeterminata

Per come è stato definito, il limite del rapporto incrementale si presenta sempre nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Questo significa che per poter calcolare le derivate bisogna saper risolvere questa forma indeterminata, eventualmente anche mediante l'uso dei limiti notevoli.

Per fortuna quasi tutte le derivate delle funzioni elementari sono riconducibili a poche formule, che vengono dimostrate una volta per tutte e poi memorizzate, e ad alcuni teoremi sulla composizione di funzioni.

Forma indeterminata

Per come è stato definito, il limite del rapporto incrementale si presenta sempre nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Questo significa che per poter calcolare le derivate bisogna saper risolvere questa forma indeterminata, eventualmente anche mediante l'uso dei limiti notevoli.

Per fortuna quasi tutte le derivate delle funzioni elementari sono riconducibili a poche formule, che vengono dimostrate una volta per tutte e poi memorizzate, e ad alcuni teoremi sulla composizione di funzioni. Ora ne vedremo una breve carrellata, con qualche dimostrazione.

Derivata di una costante

Un primo esempio, facilissimo ma comunque importante, è il calcolo della derivata di una funzione costante. Siccome la funzione costante ha come grafico una retta orizzontale, la geometria ci suggerisce che in ogni punto la retta tangente è quella stessa retta orizzontale, che ha coefficiente angolare nullo, e dunque la derivata è nulla in tutti i punti.

Derivata di una costante

Un primo esempio, facilissimo ma comunque importante, è il calcolo della derivata di una funzione costante. Siccome la funzione costante ha come grafico una retta orizzontale, la geometria ci suggerisce che in ogni punto la retta tangente è quella stessa retta orizzontale, che ha coefficiente angolare nullo, e dunque la derivata è nulla in tutti i punti.

Infatti, il rapporto incrementale della funzione $y = c$ in un punto qualsiasi è

$$\frac{c - c}{h}$$

che fa sempre 0, dunque anche il limite fa 0.

Derivata di una costante

Un primo esempio, facilissimo ma comunque importante, è il calcolo della derivata di una funzione costante. Siccome la funzione costante ha come grafico una retta orizzontale, la geometria ci suggerisce che in ogni punto la retta tangente è quella stessa retta orizzontale, che ha coefficiente angolare nullo, e dunque la derivata è nulla in tutti i punti.

Infatti, il rapporto incrementale della funzione $y = c$ in un punto qualsiasi è

$$\frac{c - c}{h}$$

che fa sempre 0, dunque anche il limite fa 0.

Abbiamo scoperto che

la derivata della funzione costante è 0 in ogni punto.

Derivata di una potenza

Consideriamo ora la funzione $y = x^k$, con $k \geq 1$ numero naturale. Scriviamo il rapporto incrementale in un punto x_0 :

$$\frac{(x_0 + h)^k - x_0^k}{h}.$$

Se sviluppiamo il binomio $(x_0 + h)^k$ (usando, ad esempio, il triangolo di Tartaglia), abbiamo che il primo termine x_0^k si cancella con $-x_0^k$. Se poi dividiamo tutto per h , rimane il termine kx_0^{k-1} e poi tanti altri termini che contengono potenze di h .

Derivata di una potenza

Consideriamo ora la funzione $y = x^k$, con $k \geq 1$ numero naturale. Scriviamo il rapporto incrementale in un punto x_0 :

$$\frac{(x_0 + h)^k - x_0^k}{h}.$$

Se sviluppiamo il binomio $(x_0 + h)^k$ (usando, ad esempio, il triangolo di Tartaglia), abbiamo che il primo termine x_0^k si cancella con $-x_0^k$. Se poi dividiamo tutto per h , rimane il termine kx_0^{k-1} e poi tanti altri termini che contengono potenze di h .

Nel mandare $h \rightarrow 0$ tutti gli altri termini scompaiono, quindi il limite fa kx_0^{k-1} .

Derivata di una potenza

Consideriamo ora la funzione $y = x^k$, con $k \geq 1$ numero naturale. Scriviamo il rapporto incrementale in un punto x_0 :

$$\frac{(x_0 + h)^k - x_0^k}{h}.$$

Se sviluppiamo il binomio $(x_0 + h)^k$ (usando, ad esempio, il triangolo di Tartaglia), abbiamo che il primo termine x_0^k si cancella con $-x_0^k$. Se poi dividiamo tutto per h , rimane il termine kx_0^{k-1} e poi tanti altri termini che contengono potenze di h .

Nel mandare $h \rightarrow 0$ tutti gli altri termini scompaiono, quindi il limite fa kx_0^{k-1} .

Abbiamo scoperto che

la derivata della funzione $y = x^k$ è kx^{k-1} .

Derivata della somma di funzioni

Se una funzione si può scrivere come somma di due funzioni, ovvero

$$y = f(x) + g(x),$$

allora la derivata è la somma delle derivate di f e g , ovvero

Derivata della somma di funzioni

Se una funzione si può scrivere come somma di due funzioni, ovvero

$$y = f(x) + g(x),$$

allora la derivata è la somma delle derivate di f e g , ovvero

$$y' = f'(x) + g'(x).$$

Derivata della somma di funzioni

Se una funzione si può scrivere come somma di due funzioni, ovvero

$$y = f(x) + g(x),$$

allora la derivata è la somma delle derivate di f e g , ovvero

$$y' = f'(x) + g'(x).$$

Infatti il rapporto incrementale si può scrivere

$$\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Derivata della somma di funzioni

Se una funzione si può scrivere come somma di due funzioni, ovvero

$$y = f(x) + g(x),$$

allora la derivata è la somma delle derivate di f e g , ovvero

$$y' = f'(x) + g'(x).$$

Infatti il rapporto incrementale si può scrivere

$$\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

e il limite di tale rapporto dà la somma delle derivate di f e g .

Derivata della somma di funzioni

Se una funzione si può scrivere come somma di due funzioni, ovvero

$$y = f(x) + g(x),$$

allora la derivata è la somma delle derivate di f e g , ovvero

$$y' = f'(x) + g'(x).$$

Infatti il rapporto incrementale si può scrivere

$$\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

e il limite di tale rapporto dà la somma delle derivate di f e g .

Ovviamente la stessa cosa vale per la somma di tre o più funzioni.

Costante per una funzione

Se una funzione si scrive come prodotto di una costante k per una funzione f , cioè

$$y = kf(x),$$

allora la costante k si può “portare fuori dalla derivata”, ovvero

Costante per una funzione

Se una funzione si scrive come prodotto di una costante k per una funzione f , cioè

$$y = kf(x),$$

allora la costante k si può “portare fuori dalla derivata”, ovvero

$$y' = kf'(x).$$

Costante per una funzione

Se una funzione si scrive come prodotto di una costante k per una funzione f , cioè

$$y = kf(x),$$

allora la costante k si può “portare fuori dalla derivata”, ovvero

$$y' = kf'(x).$$

Questo si dimostra subito scrivendo il rapporto incrementale come

$$\frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = k \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Derivata di un polinomio

Tutto quello che abbiamo dimostrato fino ad ora ci permette di dare una formula per la derivata di una classe molto importante di funzioni: i **polinomi**.

Derivata di un polinomio

Tutto quello che abbiamo dimostrato fino ad ora ci permette di dare una formula per la derivata di una classe molto importante di funzioni: i **polinomi**.

Applicando la derivata di una somma di funzioni, portando fuori le costanti e infine derivando le potenze, siamo in grado di derivare tutti i polinomi.

Derivata di un polinomio

Tutto quello che abbiamo dimostrato fino ad ora ci permette di dare una formula per la derivata di una classe molto importante di funzioni: i **polinomi**.

Applicando la derivata di una somma di funzioni, portando fuori le costanti e infine derivando le potenze, siamo in grado di derivare tutti i polinomi.

Un esempio: la derivata di

$$x^4 - \frac{13}{4}x^2 - \sqrt{2}x - 3$$

è

Derivata di un polinomio

Tutto quello che abbiamo dimostrato fino ad ora ci permette di dare una formula per la derivata di una classe molto importante di funzioni: i **polinomi**.

Applicando la derivata di una somma di funzioni, portando fuori le costanti e infine derivando le potenze, siamo in grado di derivare tutti i polinomi.

Un esempio: la derivata di

$$x^4 - \frac{13}{4}x^2 - \sqrt{2}x - 3$$

è

$$4x^3 - \frac{13}{2}x - \sqrt{2}.$$

Prodotto di funzioni

Ora vediamo cosa succede quando una funzione si scrive come **prodotto** di due funzioni: $y = f(x)g(x)$.

Prodotto di funzioni

Ora vediamo cosa succede quando una funzione si scrive come **prodotto** di due funzioni: $y = f(x)g(x)$.

Il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h};$$

Prodotto di funzioni

Ora vediamo cosa succede quando una funzione si scrive come **prodotto** di due funzioni: $y = f(x)g(x)$.

Il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h};$$

togliendo e aggiungendo a numeratore il termine $f(x+h)g(x)$ e raggruppando, si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Prodotto di funzioni

Ora vediamo cosa succede quando una funzione si scrive come **prodotto** di due funzioni: $y = f(x)g(x)$.

Il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h};$$

togliendo e aggiungendo a numeratore il termine $f(x+h)g(x)$ e raggruppando, si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Passando al limite si ottiene

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Prodotto di funzioni

La formula precedente, chiamata anche **regola di Leibniz**, si può applicare anche al prodotto di tre o più funzioni: si ottengono tanti addendi quante sono le funzioni di partenza, e in ogni addendo una funzione è derivata e tutte le altre sono riscritte.

Prodotto di funzioni

La formula precedente, chiamata anche **regola di Leibniz**, si può applicare anche al prodotto di tre o più funzioni: si ottengono tanti addendi quante sono le funzioni di partenza, e in ogni addendo una funzione è derivata e tutte le altre sono riscritte.

Ad esempio, la derivata di

$$x^2(x^3 - 1)$$

è

$$2x(x^3 - 1) + x^2(3x^2) = 5x^4 - 2x.$$

Prodotto di funzioni

La formula precedente, chiamata anche **regola di Leibniz**, si può applicare anche al prodotto di tre o più funzioni: si ottengono tanti addendi quante sono le funzioni di partenza, e in ogni addendo una funzione è derivata e tutte le altre sono riscritte.

Ad esempio, la derivata di

$$x^2(x^3 - 1)$$

è

$$2x(x^3 - 1) + x^2(3x^2) = 5x^4 - 2x.$$

(In questo caso potevamo ritrovare lo stesso risultato svolgendo *prima* il prodotto, ottenendo il polinomio $x^5 - x^2$, e *poi* derivando.)

Reciproco di una funzione

Infine, vediamo come esprimere la derivata della funzione reciproca

$$y = \frac{1}{f(x)}.$$

Reciproco di una funzione

Infine, vediamo come esprimere la derivata della funzione reciproca

$$y = \frac{1}{f(x)}.$$

Il rapporto incrementale è

$$\frac{1/f(x+h) - 1/f(x)}{h} = \frac{1}{f(x+h)f(x)} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

Reciproco di una funzione

Infine, vediamo come esprimere la derivata della funzione reciproca

$$y = \frac{1}{f(x)}.$$

Il rapporto incrementale è

$$\frac{1/f(x+h) - 1/f(x)}{h} = \frac{1}{f(x+h)f(x)} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$ si ottiene

$$y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Potenze negative

In questo modo possiamo, ad esempio, calcolare la derivata delle potenze negative di x . Se abbiamo

$$y = x^{-k} = \frac{1}{x^k},$$

Potenze negative

In questo modo possiamo, ad esempio, calcolare la derivata delle potenze negative di x . Se abbiamo

$$y = x^{-k} = \frac{1}{x^k},$$

allora, dalla formula precedente,

$$y' = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1}.$$

Potenze negative

In questo modo possiamo, ad esempio, calcolare la derivata delle potenze negative di x . Se abbiamo

$$y = x^{-k} = \frac{1}{x^k},$$

allora, dalla formula precedente,

$$y' = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1}.$$

In pratica, la regola

$$y = x^k \quad \Rightarrow \quad y' = kx^{k-1}$$

vale anche per k intero negativo (ma ovviamente non per $k = 0$).

Funzione composta

Esiste anche un modo per calcolare la derivata della **composizione** di due funzioni, ovvero della funzione $y = g(f(x))$.

Funzione composta

Esiste anche un modo per calcolare la derivata della **composizione** di due funzioni, ovvero della funzione $y = g(f(x))$.

Il rapporto incrementale è

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

Funzione composta

Esiste anche un modo per calcolare la derivata della **composizione** di due funzioni, ovvero della funzione $y = g(f(x))$.

Il rapporto incrementale è

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

e ponendo $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ possiamo riscrivere il rapporto incrementale come

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{\Delta f} \frac{\Delta f}{h}.$$

Funzione composta

Esiste anche un modo per calcolare la derivata della **composizione** di due funzioni, ovvero della funzione $y = g(f(x))$.

Il rapporto incrementale è

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

e ponendo $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ possiamo riscrivere il rapporto incrementale come

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{\Delta f} \frac{\Delta f}{h}.$$

Mandando $h \rightarrow 0$ otteniamo

$$y' = g'(f(x)) f'(x),$$

ovvero **la derivata della composizione è il prodotto delle derivate.**

Esponenziali

Per finire calcoliamo, mediante i limiti notevoli, la derivata di alcune funzioni importanti, cominciando dall'esponenziale.

Esponenziali

Per finire calcoliamo, mediante i limiti notevoli, la derivata di alcune funzioni importanti, cominciando dall'esponenziale.

Se $y = e^x$, allora il rapporto incrementale è

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Esponenziali

Per finire calcoliamo, mediante i limiti notevoli, la derivata di alcune funzioni importanti, cominciando dall'esponenziale.

Se $y = e^x$, allora il rapporto incrementale è

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Dal limite notevole

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Esponenziali

Per finire calcoliamo, mediante i limiti notevoli, la derivata di alcune funzioni importanti, cominciando dall'esponenziale.

Se $y = e^x$, allora il rapporto incrementale è

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Dal limite notevole

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

otteniamo $y' = e^x$.

Esponenziali

Per finire calcoliamo, mediante i limiti notevoli, la derivata di alcune funzioni importanti, cominciando dall'esponenziale.

Se $y = e^x$, allora il rapporto incrementale è

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Dal limite notevole

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

otteniamo $y' = e^x$.

Quindi la funzione esponenziale coincide con la sua derivata!

Esponenziali

Per calcolare la derivata di $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$) basta scrivere, usando le proprietà dei logaritmi,

$$y = a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

e applicare la derivata della composizione.

Esponenziali

Per calcolare la derivata di $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$) basta scrivere, usando le proprietà dei logaritmi,

$$y = a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

e applicare la derivata della composizione.

Si ottiene

$$y' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Logaritmi

Consideriamo la funzione $y = \log x$ (la base è quella naturale).

Logaritmi

Consideriamo la funzione $y = \log x$ (la base è quella naturale).
Il rapporto incrementale è

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Logaritmi

Consideriamo la funzione $y = \log x$ (la base è quella naturale).
Il rapporto incrementale è

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Ponendo $z = \frac{h}{x}$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{x} \frac{\log(1+z)}{z}$$

Logaritmi

Consideriamo la funzione $y = \log x$ (la base è quella naturale).
Il rapporto incrementale è

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Ponendo $z = \frac{h}{x}$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{x} \frac{\log(1+z)}{z}$$

e mandando $h \rightarrow 0$ (quindi $z \rightarrow 0$) si ottiene, dal limite notevole sul logaritmo,

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Logaritmi

Anche qui, volendo calcolare la derivata di $y = \log_a x$, possiamo riscrivere, usando le proprietà dei logaritmi:

$$y = \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Logaritmi

Anche qui, volendo calcolare la derivata di $y = \log_a x$, possiamo riscrivere, usando le proprietà dei logaritmi:

$$y = \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

e quindi otteniamo subito

$$y' = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \log_a e .$$

Seno e coseno

Prendiamo $y = \sin x$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

Seno e coseno

Prendiamo $y = \sin x$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

e usando la formula di addizione del seno riscriviamo

$$\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Senso e coseno

Prendiamo $y = \sin x$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

e usando la formula di addizione del seno riscriviamo

$$\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Per $h \rightarrow 0$ il primo termine sparisce, e il secondo (per il limite notevole del seno) tende a $\cos x$.

Seno e coseno

Prendiamo $y = \sin x$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

e usando la formula di addizione del seno riscriviamo

$$\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Per $h \rightarrow 0$ il primo termine sparisce, e il secondo (per il limite notevole del seno) tende a $\cos x$.

Quindi otteniamo $y' = \cos x$, ovvero **la derivata del seno è il coseno**.

Seno e coseno

Prendiamo $y = \sin x$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

e usando la formula di addizione del seno riscriviamo

$$\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Per $h \rightarrow 0$ il primo termine sparisce, e il secondo (per il limite notevole del seno) tende a $\cos x$.

Quindi otteniamo $y' = \cos x$, ovvero **la derivata del seno è il coseno**.

In modo simile si può dimostrare che

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x,$$

ovvero **la derivata del coseno è l'opposto del seno**.

Potenze a esponente reale

Per finire, calcoliamo la derivata della funzione $y = x^a$, dove $a \in \mathbb{R}$ (naturalmente $a \neq 0$).

Potenze a esponente reale

Per finire, calcoliamo la derivata della funzione $y = x^a$, dove $a \in \mathbb{R}$ (naturalmente $a \neq 0$).

Usando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo la funzione come

$$y = x^a = e^{\log x^a} = e^{a \log x}.$$

Potenze a esponente reale

Per finire, calcoliamo la derivata della funzione $y = x^a$, dove $a \in \mathbb{R}$ (naturalmente $a \neq 0$).

Usando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo la funzione come

$$y = x^a = e^{\log x^a} = e^{a \log x}.$$

Ora deriviamo per composizione, ricordando che la derivata dell'esponenziale è l'esponenziale stessa, e poi bisogna derivare l'esponente: si ha

$$y' = e^{a \log x} \frac{a}{x}.$$

Potenze a esponente reale

Per finire, calcoliamo la derivata della funzione $y = x^a$, dove $a \in \mathbb{R}$ (naturalmente $a \neq 0$).

Usando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo la funzione come

$$y = x^a = e^{\log x^a} = e^{a \log x}.$$

Ora deriviamo per composizione, ricordando che la derivata dell'esponenziale è l'esponenziale stessa, e poi bisogna derivare l'esponente: si ha

$$y' = e^{a \log x} \frac{a}{x}.$$

Se adesso ritorniamo indietro (sempre con le proprietà dei logaritmi),

$$y' = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

Potenze a esponente reale

Per finire, calcoliamo la derivata della funzione $y = x^a$, dove $a \in \mathbb{R}$ (naturalmente $a \neq 0$).

Usando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo la funzione come

$$y = x^a = e^{\log x^a} = e^{a \log x}.$$

Ora deriviamo per composizione, ricordando che la derivata dell'esponenziale è l'esponenziale stessa, e poi bisogna derivare l'esponente: si ha

$$y' = e^{a \log x} \frac{a}{x}.$$

Se adesso ritorniamo indietro (sempre con le proprietà dei logaritmi),

$$y' = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

Quindi la regola

$$y = x^a \quad \Rightarrow \quad y' = ax^{a-1}$$

vale per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Derivata della radice

In particolare, dalla regola precedente troviamo la derivata della radice quadrata:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Derivata della radice

In particolare, dalla regola precedente troviamo la derivata della radice quadrata:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

Derivata della radice

In particolare, dalla regola precedente troviamo la derivata della radice quadrata:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Derivata della radice

In particolare, dalla regola precedente troviamo la derivata della radice quadrata:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivata della radice

In particolare, dalla regola precedente troviamo la derivata della radice quadrata:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Più in generale, se abbiamo una radice di indice n , otteniamo:

$$y = \sqrt[n]{x} = \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$