

Punti, rette e piani: geometria analitica tridimensionale

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Aumento di dimensione

L'obiettivo di questa lezione è quello di vedere come i metodi della Geometria Analitica possano applicarsi anche allo spazio tridimensionale.

Aumento di dimensione

L'obiettivo di questa lezione è quello di vedere come i metodi della Geometria Analitica possano applicarsi anche allo spazio tridimensionale. Basta aver bisogno di misurare un mobile della casa (o essere stati all'IKEA), per sapere che l'ambiente in cui viviamo ha tre dimensioni spaziali:

Aumento di dimensione

L'obiettivo di questa lezione è quello di vedere come i metodi della Geometria Analitica possano applicarsi anche allo spazio tridimensionale. Basta aver bisogno di misurare un mobile della casa (o essere stati all'IKEA), per sapere che l'ambiente in cui viviamo ha tre dimensioni spaziali: **larghezza**,

Aumento di dimensione

L'obiettivo di questa lezione è quello di vedere come i metodi della Geometria Analitica possano applicarsi anche allo spazio tridimensionale. Basta aver bisogno di misurare un mobile della casa (o essere stati all'IKEA), per sapere che l'ambiente in cui viviamo ha tre dimensioni spaziali: **larghezza**, **profondità**,

Aumento di dimensione

L'obiettivo di questa lezione è quello di vedere come i metodi della Geometria Analitica possano applicarsi anche allo spazio tridimensionale. Basta aver bisogno di misurare un mobile della casa (o essere stati all'IKEA), per sapere che l'ambiente in cui viviamo ha tre dimensioni spaziali: **larghezza**, **profondità**, **altezza**.

Aumento di dimensione

L'obiettivo di questa lezione è quello di vedere come i metodi della Geometria Analitica possano applicarsi anche allo spazio tridimensionale. Basta aver bisogno di misurare un mobile della casa (o essere stati all'IKEA), per sapere che l'ambiente in cui viviamo ha tre dimensioni spaziali: **larghezza**, **profondità**, **altezza**.

Da questo punto di vista quindi la geometria piana è una astrazione, un caso particolare, mentre la geometria “vera” dovrebbe essere sempre tridimensionale.

Aumento di dimensione

L'obiettivo di questa lezione è quello di vedere come i metodi della Geometria Analitica possano applicarsi anche allo spazio tridimensionale. Basta aver bisogno di misurare un mobile della casa (o essere stati all'IKEA), per sapere che l'ambiente in cui viviamo ha tre dimensioni spaziali: **larghezza, profondità, altezza**.

Da questo punto di vista quindi la geometria piana è una astrazione, un caso particolare, mentre la geometria “vera” dovrebbe essere sempre tridimensionale.

Come vedremo, però, compiere questo *salto dimensionale* non sarà indolore, poiché inevitabilmente la geometria tridimensionale (che viene anche chiamata **geometria solida**) diventa più ricca di situazioni, e quindi anche più complicata.

Approfondimento: Oltre le tre dimensioni

In realtà, in alcune teorie fisiche (ad esempio nella **Relatività Generale**) lo spazio geometrico ambiente ha addirittura **quattro** dimensioni, poiché anche lo scorrere del tempo viene “geometrizzato”.

Approfondimento: Oltre le tre dimensioni

In realtà, in alcune teorie fisiche (ad esempio nella **Relatività Generale**) lo spazio geometrico ambiente ha addirittura **quattro** dimensioni, poiché anche lo scorrere del tempo viene “geometrizzato”.

Addirittura, teorie fisiche molto recenti (e ben lontane dall'essere verificate sperimentalmente), come la **Teoria delle Stringhe**, prevedono che lo spazio ambiente debba avere 10, 26, o addirittura 42 dimensioni!

Approfondimento: Oltre le tre dimensioni

In realtà, in alcune teorie fisiche (ad esempio nella **Relatività Generale**) lo spazio geometrico ambiente ha addirittura **quattro** dimensioni, poiché anche lo scorrere del tempo viene “geometrizzato”.

Addirittura, teorie fisiche molto recenti (e ben lontane dall'essere verificate sperimentalmente), come la **Teoria delle Stringhe**, prevedono che lo spazio ambiente debba avere 10, 26, o addirittura 42 dimensioni!

Per fortuna il metodo delle coordinate cartesiane, una volta che si è ben compreso, permette di impostare in modo matematico anche lo studio di questi spazi di dimensione più alta, anche se intuitivamente sono troppo difficili da immaginare.

Approfondimento: Oltre le tre dimensioni

Ma per avere a che fare con uno spazio di dimensione maggiore di tre non serve scomodare una materia esotica come la Teoria delle Stringhe. Spesso in Matematica si ha a che fare con questi spazi semplicemente per economia di pensiero.

Approfondimento: Oltre le tre dimensioni

Ma per avere a che fare con uno spazio di dimensione maggiore di tre non serve scomodare una materia esotica come la Teoria delle Stringhe. Spesso in Matematica si ha a che fare con questi spazi semplicemente per economia di pensiero.

Pensiamo ad esempio a un punto che si muove liberamente nello spazio: la sua posizione può essere descritta appunto da tre coordinate.

Approfondimento: Oltre le tre dimensioni

Ma per avere a che fare con uno spazio di dimensione maggiore di tre non serve scomodare una materia esotica come la Teoria delle Stringhe. Spesso in Matematica si ha a che fare con questi spazi semplicemente per economia di pensiero.

Pensiamo ad esempio a un punto che si muove liberamente nello spazio: la sua posizione può essere descritta appunto da tre coordinate.

E se abbiamo **due** punti che si muovono liberamente nello spazio? Per descrivere la posizione di entrambi abbiamo bisogno di *sei* coordinate: tre per il primo e tre per il secondo.

Approfondimento: Oltre le tre dimensioni

Ma per avere a che fare con uno spazio di dimensione maggiore di tre non serve scomodare una materia esotica come la Teoria delle Stringhe. Spesso in Matematica si ha a che fare con questi spazi semplicemente per economia di pensiero.

Pensiamo ad esempio a un punto che si muove liberamente nello spazio: la sua posizione può essere descritta appunto da tre coordinate.

E se abbiamo **due** punti che si muovono liberamente nello spazio? Per descrivere la posizione di entrambi abbiamo bisogno di *sei* coordinate: tre per il primo e tre per il secondo.

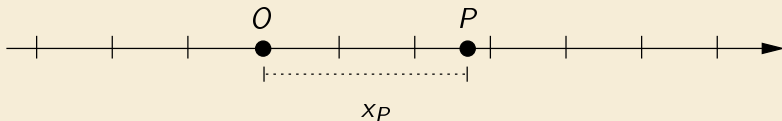
Ebbene, tante volte può essere più semplice (o comunque non più difficile) pensare di avere *un punto solo* che si muove in uno spazio a sei dimensioni, piuttosto che due punti che si muovono nello spazio ordinario a tre dimensioni. Le due situazioni sono perfettamente equivalenti.

Un passo indietro: geometria unidimensionale

Prima di tuffarci nel mondo tridimensionale, facciamo un passo indietro e proviamo a pensare alla geometria analitica della retta:

Un passo indietro: geometria unidimensionale

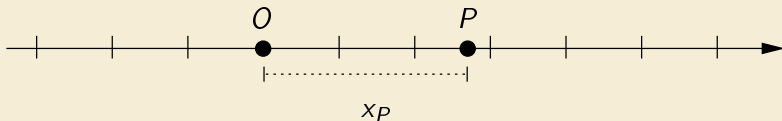
Prima di tuffarci nel mondo tridimensionale, facciamo un passo indietro e proviamo a pensare alla geometria analitica della retta:



Data una retta orientata e un'origine O , un punto P sulla retta è descritto da una sola coordinata, chiamiamola x_P , che misura la distanza da O ed è positiva se P sta alla destra di O e negativa altrimenti.

Un passo indietro: geometria unidimensionale

Prima di tuffarci nel mondo tridimensionale, facciamo un passo indietro e proviamo a pensare alla geometria analitica della retta:

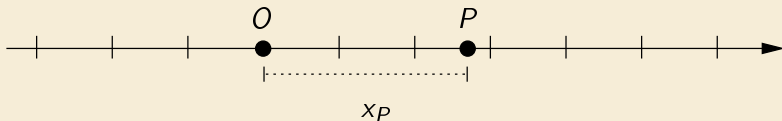


Data una retta orientata e un'origine O , un punto P sulla retta è descritto da una sola coordinata, chiamiamola x_P , che misura la distanza da O ed è positiva se P sta alla destra di O e negativa altrimenti.

In questo contesto si possono fare poche operazioni geometriche: gli unici enti geometrici significativi sono i punti e i segmenti, per cui si può parlare di distanza tra due punti, di punto medio, ma poco altro.

Un passo indietro: geometria unidimensionale

Prima di tuffarci nel mondo tridimensionale, facciamo un passo indietro e proviamo a pensare alla geometria analitica della retta:



Data una retta orientata e un'origine O , un punto P sulla retta è descritto da una sola coordinata, chiamiamola x_P , che misura la distanza da O ed è positiva se P sta alla destra di O e negativa altrimenti.

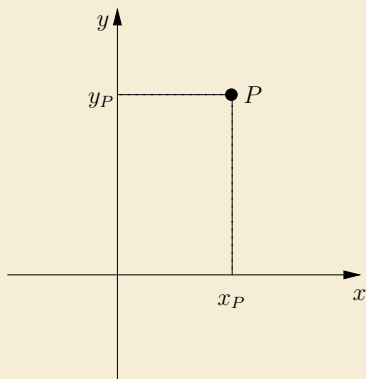
In questo contesto si possono fare poche operazioni geometriche: gli unici enti geometrici significativi sono i punti e i segmenti, per cui si può parlare di distanza tra due punti, di punto medio, ma poco altro.

In questo mondo non ci sono rette (a parte l'unica retta esistente), non ci sono curve, ecc. ecc.

È un mondo geometricamente piuttosto povero.

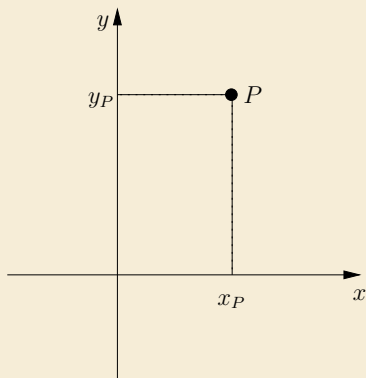
La geometria analitica del piano

Nel piano cartesiano invece, come ben sappiamo, la posizione di un punto P è descritta da una coppia ordinata di numeri: $(x_P; y_P)$.



La geometria analitica del piano

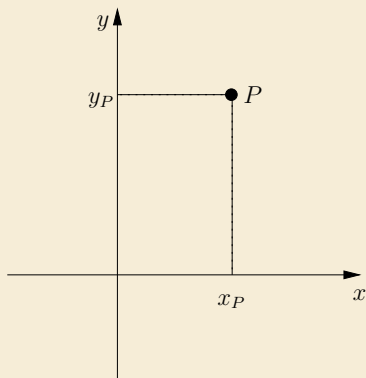
Nel piano cartesiano invece, come ben sappiamo, la posizione di un punto P è descritta da una coppia ordinata di numeri: $(x_P; y_P)$.



Stavolta la geometria è molto più ricca: ci sono le rette, il parallelismo, la perpendicolarità, i poligoni, le coniche. . .

La geometria analitica del piano

Nel piano cartesiano invece, come ben sappiamo, la posizione di un punto P è descritta da una coppia ordinata di numeri: $(x_P; y_P)$.

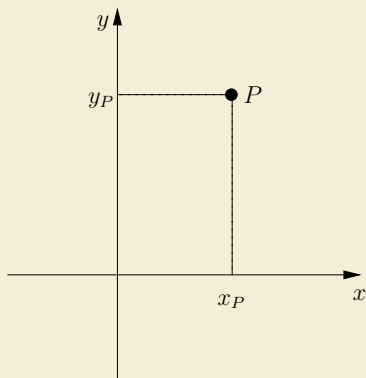


Stavolta la geometria è molto più ricca: ci sono le rette, il parallelismo, la perpendicolarità, i poligoni, le coniche. . .

Insomma, c'è quasi tutto il mondo geometrico che abbiamo studiato in tanti anni: la **geometria piana**.

La geometria analitica del piano

Nel piano cartesiano invece, come ben sappiamo, la posizione di un punto P è descritta da una coppia ordinata di numeri: $(x_P; y_P)$.



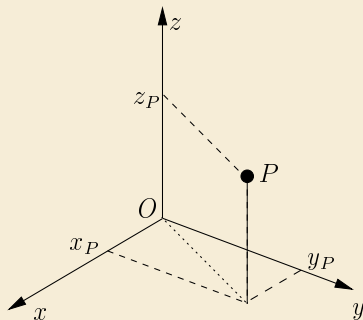
Stavolta la geometria è molto più ricca: ci sono le rette, il parallelismo, la perpendicolarità, i poligoni, le coniche. . .

Insomma, c'è quasi tutto il mondo geometrico che abbiamo studiato in tanti anni: la **geometria piana**.

E c'è anche un mondo più profondo, su cui tuttora i matematici lavorano: le curve algebriche, le curve ellittiche, il piano complesso. . .

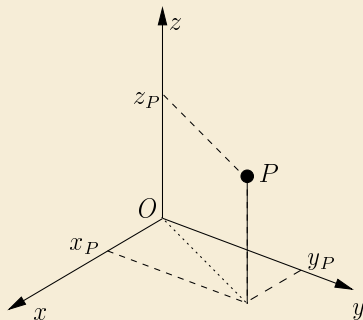
La geometria analitica dello spazio tridimensionale

Per descrivere la posizione di un punto nello spazio tridimensionale, avremo quindi bisogno di una **terna** ordinata di numeri: $P(x_P; y_P; z_P)$.



La geometria analitica dello spazio tridimensionale

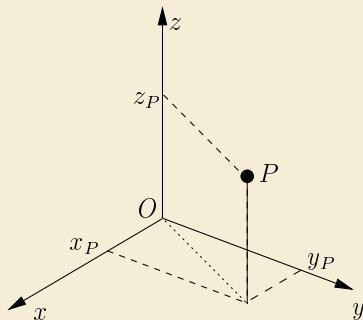
Per descrivere la posizione di un punto nello spazio tridimensionale, avremo quindi bisogno di una **terna** ordinata di numeri: $P(x_P; y_P; z_P)$.



Prendendo un punto O come origine e tre rette orientate mutuamente perpendicolari, le coordinate di un punto P saranno le misure (orientate) delle proiezioni ortogonali di P sulle tre rette di riferimento.

La geometria analitica dello spazio tridimensionale

Per descrivere la posizione di un punto nello spazio tridimensionale, avremo quindi bisogno di una **terna** ordinata di numeri: $P(x_P; y_P; z_P)$.



Prendendo un punto O come origine e tre rette orientate mutuamente perpendicolari, le coordinate di un punto P saranno le misure (orientate) delle proiezioni ortogonali di P sulle tre rette di riferimento.

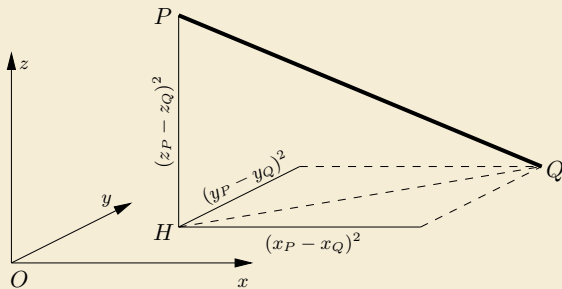
Di solito i tre assi si chiamano, rispettivamente, asse delle **ascisse**, delle **ordinate**, delle **quote**. Inoltre convenzionalmente si pone l'asse z in direzione “verticale”, mentre gli assi x e y stanno in “orizzontale”.

Formule: distanza e punto medio

Alcune formule della geometria analitica piana si estendono immediatamente anche a quella tridimensionale: ad esempio, poiché il Teorema di Pitagora vale anche in dimensioni più alte, è facile calcolare la distanza tra due punti P e Q :

Formule: distanza e punto medio

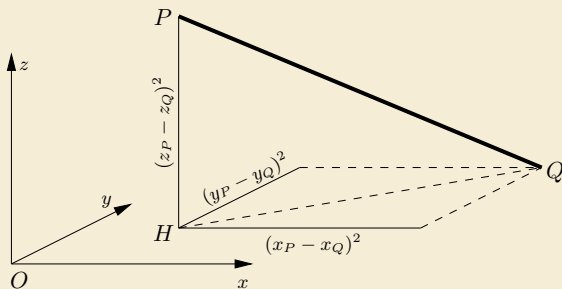
Alcune formule della geometria analitica piana si estendono immediatamente anche a quella tridimensionale: ad esempio, poiché il Teorema di Pitagora vale anche in dimensioni più alte, è facile calcolare la distanza tra due punti P e Q :



$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Formule: distanza e punto medio

Alcune formule della geometria analitica piana si estendono immediatamente anche a quella tridimensionale: ad esempio, poiché il Teorema di Pitagora vale anche in dimensioni più alte, è facile calcolare la distanza tra due punti P e Q :



$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Inoltre anche il punto medio di un segmento si calcola come nel caso piano:

$$M_{PQ} = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2} \right).$$

I piani coordinati

Se nel piano cartesiano l'oggetto più semplice di cui trovare l'equazione, dopo il punto, era la retta, questo non è più vero in tre dimensioni.

I piani coordinati

Se nel piano cartesiano l'oggetto più semplice di cui trovare l'equazione, dopo il punto, era la retta, questo non è più vero in tre dimensioni. Qui invece è più semplice cercare l'equazione del **piano**.

I piani coordinati

Se nel piano cartesiano l'oggetto più semplice di cui trovare l'equazione, dopo il punto, era la retta, questo non è più vero in tre dimensioni.

Qui invece è più semplice cercare l'equazione del **piano**.

Ci sono dei piani particolari che hanno equazioni molto semplici: ad esempio, il piano xy , cioè quello che contiene l'asse delle ascisse e delle ordinate (i due assi "orizzontali") è formato da tutti e soli i punti di coordinate

$$(x, y, 0)$$

I piani coordinati

Se nel piano cartesiano l'oggetto più semplice di cui trovare l'equazione, dopo il punto, era la retta, questo non è più vero in tre dimensioni.

Qui invece è più semplice cercare l'equazione del **piano**.

Ci sono dei piani particolari che hanno equazioni molto semplici: ad esempio, il piano xy , cioè quello che contiene l'asse delle ascisse e delle ordinate (i due assi "orizzontali") è formato da tutti e soli i punti di coordinate

$$(x, y, 0)$$

e quindi la sua equazione è

$$\boxed{z = 0}.$$

I piani coordinati

Se nel piano cartesiano l'oggetto più semplice di cui trovare l'equazione, dopo il punto, era la retta, questo non è più vero in tre dimensioni.

Qui invece è più semplice cercare l'equazione del **piano**.

Ci sono dei piani particolari che hanno equazioni molto semplici: ad esempio, il piano xy , cioè quello che contiene l'asse delle ascisse e delle ordinate (i due assi "orizzontali") è formato da tutti e soli i punti di coordinate

$$(x, y, 0)$$

e quindi la sua equazione è

$$\boxed{z = 0}.$$

Allo stesso modo, i piani xz e yz hanno equazione, rispettivamente,

$$\boxed{y = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{x = 0}.$$

I piani coordinati

Se nel piano cartesiano l'oggetto più semplice di cui trovare l'equazione, dopo il punto, era la retta, questo non è più vero in tre dimensioni.

Qui invece è più semplice cercare l'equazione del **piano**.

Ci sono dei piani particolari che hanno equazioni molto semplici: ad esempio, il piano xy , cioè quello che contiene l'asse delle ascisse e delle ordinate (i due assi "orizzontali") è formato da tutti e soli i punti di coordinate

$$(x, y, 0)$$

e quindi la sua equazione è

$$\boxed{z = 0}.$$

Allo stesso modo, i piani xz e yz hanno equazione, rispettivamente,

$$\boxed{y = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{x = 0}.$$

Questi tre piani sono chiamati **piani coordinati**.

L'equazione del piano

Vogliamo ora trovare l'equazione di un generico piano. I punti P di un piano **non contenente l'origine** si possono caratterizzare mediante una condizione di perpendicolarità:

L'equazione del piano

Vogliamo ora trovare l'equazione di un generico piano. I punti P di un piano **non contenente l'origine** si possono caratterizzare mediante una condizione di perpendicolarità:

- fissiamo un punto Q diverso dall'origine

L'equazione del piano

Vogliamo ora trovare l'equazione di un generico piano. I punti P di un piano **non contenente l'origine** si possono caratterizzare mediante una condizione di perpendicolarità:

- fissiamo un punto Q diverso dall'origine
- cerchiamo tutti i punti P tali che il segmento PQ sia perpendicolare a QO :

$$PQ \perp QO$$

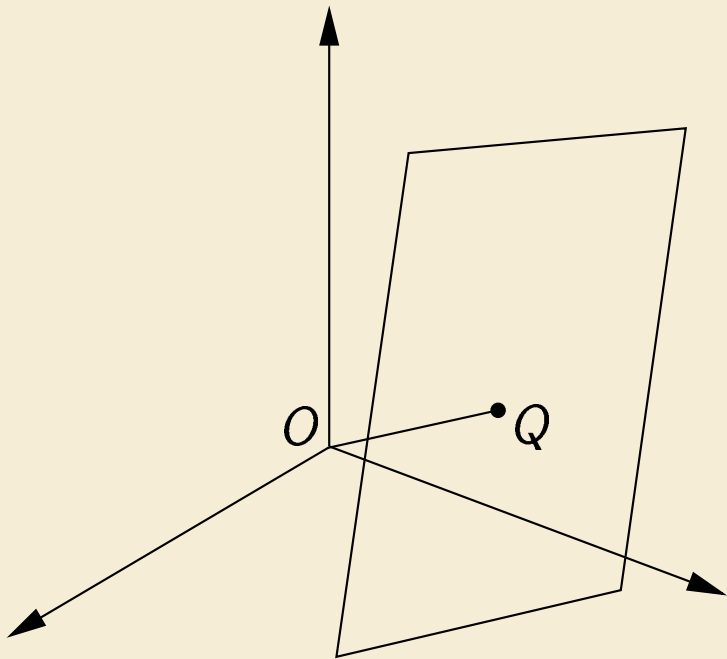
L'equazione del piano

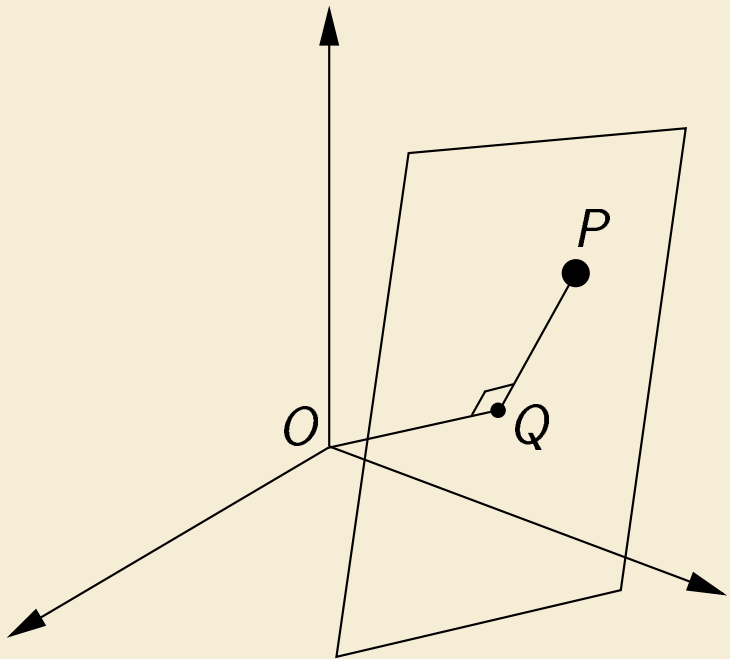
Vogliamo ora trovare l'equazione di un generico piano. I punti P di un piano **non contenente l'origine** si possono caratterizzare mediante una condizione di perpendicolarità:

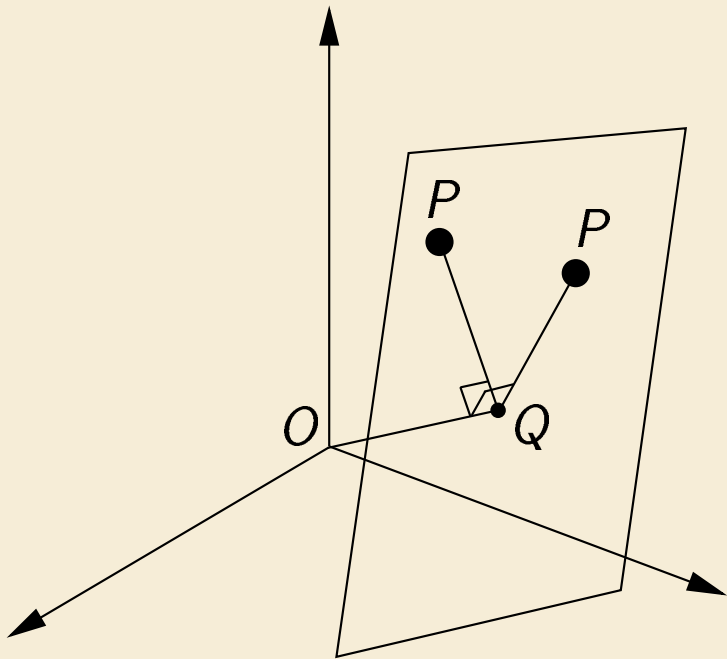
- fissiamo un punto Q diverso dall'origine
- cerchiamo tutti i punti P tali che il segmento PQ sia perpendicolare a QO :

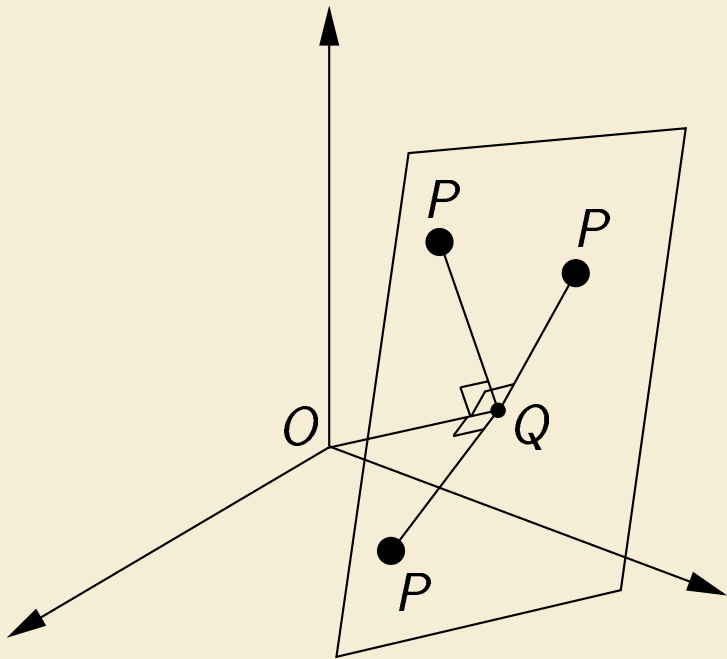
$$PQ \perp QO$$

- l'insieme di tutti i punti P forma il piano passante per Q e perpendicolare a QO .









Denotiamo con $Q(a; b; c)$ le coordinate del punto fissato Q , e con $P(x; y; z)$ quelle del punto generico P .

Denotiamo con $Q(a; b; c)$ le coordinate del punto fissato Q , e con $P(x; y; z)$ quelle del punto generico P . Imponiamo che $PQ \perp QO$ mediante il Teorema di Pitagora:

$$PQ \perp QO \iff PQ^2 + QO^2 = PO^2.$$

Denotiamo con $Q(a; b; c)$ le coordinate del punto fissato Q , e con $P(x; y; z)$ quelle del punto generico P . Imponiamo che $PQ \perp QO$ mediante il Teorema di Pitagora:

$$PQ \perp QO \iff PQ^2 + QO^2 = PO^2.$$

Poiché si ha

- $PQ^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$

Denotiamo con $Q(a; b; c)$ le coordinate del punto fissato Q , e con $P(x; y; z)$ quelle del punto generico P . Imponiamo che $PQ \perp QO$ mediante il Teorema di Pitagora:

$$PQ \perp QO \iff PQ^2 + QO^2 = PO^2.$$

Poiché si ha

- $PQ^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$
- $QO^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Denotiamo con $Q(a; b; c)$ le coordinate del punto fissato Q , e con $P(x; y; z)$ quelle del punto generico P . Imponiamo che $PQ \perp QO$ mediante il Teorema di Pitagora:

$$PQ \perp QO \iff PQ^2 + QO^2 = PO^2.$$

Poiché si ha

- $PQ^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$
- $QO^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- $PO^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Denotiamo con $Q(a; b; c)$ le coordinate del punto fissato Q , e con $P(x; y; z)$ quelle del punto generico P . Imponiamo che $PQ \perp QO$ mediante il Teorema di Pitagora:

$$PQ \perp QO \iff PQ^2 + QO^2 = PO^2.$$

Poiché si ha

- $PQ^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$
- $QO^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- $PO^2 = x^2 + y^2 + z^2$

dal Teorema di Pitagora troviamo l'equazione

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Denotiamo con $Q(a; b; c)$ le coordinate del punto fissato Q , e con $P(x; y; z)$ quelle del punto generico P . Imponiamo che $PQ \perp QO$ mediante il Teorema di Pitagora:

$$PQ \perp QO \iff PQ^2 + QO^2 = PO^2.$$

Poiché si ha

- $PQ^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$
- $QO^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- $PO^2 = x^2 + y^2 + z^2$

dal Teorema di Pitagora troviamo l'equazione

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Sviluppando i quadrati dei binomi e semplificando otteniamo

$$2ax + 2by + 2cz = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

da cui

$$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2.$$

L'equazione del piano

Denotando genericamente con d la quantità $-a^2 - b^2 - c^2$, otteniamo

$$ax + by + cz + d = 0,$$

che è l'**equazione del piano**.

L'equazione del piano

Denotando genericamente con d la quantità $-a^2 - b^2 - c^2$, otteniamo

$$ax + by + cz + d = 0,$$

che è l'**equazione del piano**. Se permettiamo che d possa essere nullo, allora recuperiamo anche tutti i piani passanti per l'origine (che prima erano stati esclusi). Un piano infatti passa per l'origine se e solo se il suo termine noto d è nullo.

L'equazione del piano

Denotando genericamente con d la quantità $-a^2 - b^2 - c^2$, otteniamo

$$ax + by + cz + d = 0,$$

che è l'**equazione del piano**. Se permettiamo che d possa essere nullo, allora recuperiamo anche tutti i piani passanti per l'origine (che prima erano stati esclusi). Un piano infatti passa per l'origine se e solo se il suo termine noto d è nullo.

Quindi l'equazione di un piano è un polinomio **di primo grado** nelle variabili x, y, z . Avviene per il piano esattamente quello che avveniva per la retta in due dimensioni.

L'equazione del piano

Denotando genericamente con d la quantità $-a^2 - b^2 - c^2$, otteniamo

$$ax + by + cz + d = 0,$$

che è l'**equazione del piano**. Se permettiamo che d possa essere nullo, allora recuperiamo anche tutti i piani passanti per l'origine (che prima erano stati esclusi). Un piano infatti passa per l'origine se e solo se il suo termine noto d è nullo.

Quindi l'equazione di un piano è un polinomio **di primo grado** nelle variabili x, y, z . Avviene per il piano esattamente quello che avveniva per la retta in due dimensioni.

Naturalmente, se moltiplichiamo tutti i coefficienti dell'equazione per uno stesso fattore non nullo, il piano non cambia, esattamente come avveniva per la retta, quindi l'equazione

$$kax + kby + kcz + kd = 0, \quad k \neq 0$$

rappresenta sempre lo stesso piano.

Piano per tre punti

Dati tre punti *non allineati*, esiste sempre uno e un solo piano che li contiene (si dice “che passa per i tre punti”).
Come si può fare a determinarne l'equazione?

Piano per tre punti

Dati tre punti *non allineati*, esiste sempre uno e un solo piano che li contiene (si dice “che passa per i tre punti”).

Come si può fare a determinarne l'equazione?

Il problema è abbastanza semplice: si sostituiscono le coordinate dei tre punti nell'equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

e si risolve il sistema ottenuto.

Piano per tre punti

Dati tre punti *non allineati*, esiste sempre uno e un solo piano che li contiene (si dice “che passa per i tre punti”).

Come si può fare a determinarne l'equazione?

Il problema è abbastanza semplice: si sostituiscono le coordinate dei tre punti nell'equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

e si risolve il sistema ottenuto.

Attenzione però: il sistema avrà tre equazioni ma **quattro** incognite: a, b, c, d . Rimarrà sempre un coefficiente non determinato (è il solito problema di non avere un'unica equazione che determina il piano).

Esempio

Si trovi l'equazione del piano passante per $(1; 1; 0)$, $(2; 0; 1)$, $(0; 0; -3)$.

Esempio

Si trovi l'equazione del piano passante per $(1; 1; 0)$, $(2; 0; 1)$, $(0; 0; -3)$.

Sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ troviamo il sistema

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ 2a + c + d = 0 \\ -3c + d = 0. \end{cases}$$

Esempio

Si trovi l'equazione del piano passante per $(1; 1; 0)$, $(2; 0; 1)$, $(0; 0; -3)$.

Sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ troviamo il sistema

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ 2a + c + d = 0 \\ -3c + d = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione troviamo $d = 3c$ che, sostituito nella seconda, dà

$$2a + 4c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2c.$$

Esempio

Si trovi l'equazione del piano passante per $(1; 1; 0)$, $(2; 0; 1)$, $(0; 0; -3)$.

Sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ troviamo il sistema

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ 2a + c + d = 0 \\ -3c + d = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione troviamo $d = 3c$ che, sostituito nella seconda, dà

$$2a + 4c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2c.$$

Se ora sostituiamo tutto nella prima troviamo

$$-2c + b + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -c.$$

Esempio

Si trovi l'equazione del piano passante per $(1; 1; 0)$, $(2; 0; 1)$, $(0; 0; -3)$.

Sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ troviamo il sistema

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ 2a + c + d = 0 \\ -3c + d = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione troviamo $d = 3c$ che, sostituito nella seconda, dà

$$2a + 4c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2c.$$

Se ora sostituiamo tutto nella prima troviamo

$$-2c + b + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -c.$$

Quindi abbiamo trovato tutto in funzione di c . Dando un valore non nullo a c , ad esempio $c = 1$, abbiamo $a = -2$, $b = -1$, $d = 3$, e il piano ha equazione

$$\boxed{-2x - y + z + 3 = 0.}$$

Piani paralleli

Due piani distinti si dicono **paralleli** se non hanno nessun punto in comune o se sono coincidenti.

Piani paralleli

Due piani distinti si dicono **paralleli** se non hanno nessun punto in comune o se sono coincidenti.

Prendiamo dunque due piani di equazioni

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Ci chiediamo: quando sono paralleli?

Piani paralleli

Due piani distinti si dicono **paralleli** se non hanno nessun punto in comune o se sono coincidenti.

Prendiamo dunque due piani di equazioni

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Ci chiediamo: quando sono paralleli?

Poiché i punti comuni ai due piani si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

vogliamo trovare in quali condizioni questo sistema non ammette nessuna soluzione.

Piani paralleli

Due piani distinti si dicono **paralleli** se non hanno nessun punto in comune o se sono coincidenti.

Prendiamo dunque due piani di equazioni

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Ci chiediamo: quando sono paralleli?

Poiché i punti comuni ai due piani si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

vogliamo trovare in quali condizioni questo sistema non ammette nessuna soluzione.

Se ad esempio facciamo la differenza delle due equazioni, trovando

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + d_1 - d_2 = 0,$$

per ottenere un'equazione impossibile dobbiamo imporre che

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 \neq d_2.$$

Quindi due piani che hanno gli stessi coefficienti a, b, c e termini noti d diversi sono paralleli.

Quindi due piani che hanno gli stessi coefficienti a, b, c e termini noti d diversi sono paralleli.

Ma poiché l'equazione di un piano non è unica, come abbiamo visto, e può essere moltiplicata per un fattore, chiedere che a, b, c siano uguali potrebbe essere troppo: basta chiedere che siano *proporzionali*, ovvero che esista $k \neq 0$ tale che

$$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1, \quad d_2 \neq kd_1.$$

Quindi due piani che hanno gli stessi coefficienti a, b, c e termini noti d diversi sono paralleli.

Ma poiché l'equazione di un piano non è unica, come abbiamo visto, e può essere moltiplicata per un fattore, chiedere che a, b, c siano uguali potrebbe essere troppo: basta chiedere che siano *proporzionali*, ovvero che esista $k \neq 0$ tale che

$$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1, \quad d_2 \neq kd_1.$$

Questa condizione si può anche scrivere come rapporto

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \neq \frac{d_2}{d_1},$$

a patto di escludere i rapporti del tipo $\frac{0}{0}$.

Le superfici

L'equazione di un piano, in modo astratto, si può scrivere come

$$f(x, y, z) = 0,$$

dove f è un polinomio di primo grado. Che cosa succede se invece di prendere un polinomio di primo grado prendiamo una funzione più generale?

Le superfici

L'equazione di un piano, in modo astratto, si può scrivere come

$$f(x, y, z) = 0,$$

dove f è un polinomio di primo grado. Che cosa succede se invece di prendere un polinomio di primo grado prendiamo una funzione più generale?

Se fossimo in due dimensioni troveremmo una “curva” nel piano cartesiano, ad esempio una conica.

Le superfici

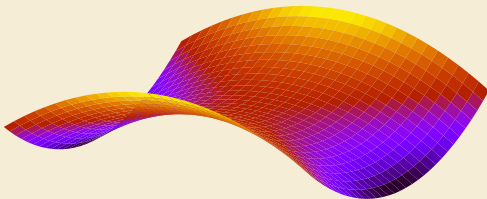
L'equazione di un piano, in modo astratto, si può scrivere come

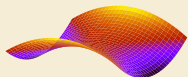
$$f(x, y, z) = 0,$$

dove f è un polinomio di primo grado. Che cosa succede se invece di prendere un polinomio di primo grado prendiamo una funzione più generale?

Se fossimo in due dimensioni troveremmo una “curva” nel piano cartesiano, ad esempio una conica.

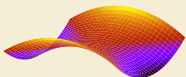
In tre dimensioni, invece, troveremo una **superficie**: una sorta di foglio di carta che però può essere “piegato” e “curvo”.





Le superfici sono delle strutture geometriche **bidimensionali**, perché in qualche senso sono dei “piani deformati”. Anche la superficie di una sfera, o di un cilindro, o di un cono, sono delle superfici, e quindi hanno delle equazioni del tipo

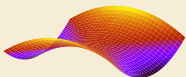
$$f(x, y, z) = 0.$$



Le superfici sono delle strutture geometriche **bidimensionali**, perché in qualche senso sono dei “piani deformati”. Anche la superficie di una sfera, o di un cilindro, o di un cono, sono delle superfici, e quindi hanno delle equazioni del tipo

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ma come sarà fatta l'equazione di una **curva** nello spazio? Ad esempio: come si trova l'equazione di una retta, che è tra le curve più semplici?



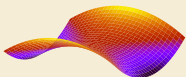
Le superfici sono delle strutture geometriche **bidimensionali**, perché in qualche senso sono dei “piani deformati”. Anche la superficie di una sfera, o di un cilindro, o di un cono, sono delle superfici, e quindi hanno delle equazioni del tipo

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ma come sarà fatta l'equazione di una **curva** nello spazio? Ad esempio: come si trova l'equazione di una retta, che è tra le curve più semplici?

Per trovarla, siamo costretti a *intersecare* due superfici: quindi l'equazione di una curva ha una struttura del tipo

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$



Le superfici sono delle strutture geometriche **bidimensionali**, perché in qualche senso sono dei “piani deformati”. Anche la superficie di una sfera, o di un cilindro, o di un cono, sono delle superfici, e quindi hanno delle equazioni del tipo

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ma come sarà fatta l'equazione di una **curva** nello spazio? Ad esempio: come si trova l'equazione di una retta, che è tra le curve più semplici?

Per trovarla, siamo costretti a *intersecare* due superfici: quindi l'equazione di una curva ha una struttura del tipo

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Come si vede, le cose diventano più complicate in questo caso.

Le rette nello spazio

L'equazione di una retta nello spazio viene data come intersezione di due piani, quindi come sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Le rette nello spazio

L'equazione di una retta nello spazio viene data come intersezione di due piani, quindi come sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché ci sono infiniti piani che passano per una retta data, questo modo di scrivere l'equazione della retta è piuttosto scomodo, perché la stessa retta si può scrivere in tantissimi modi diversi.

Le rette nello spazio

L'equazione di una retta nello spazio viene data come intersezione di due piani, quindi come sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché ci sono infiniti piani che passano per una retta data, questo modo di scrivere l'equazione della retta è piuttosto scomodo, perché la stessa retta si può scrivere in tantissimi modi diversi.

Diventa difficile persino capire se due sistemi rappresentano la stessa retta oppure no.

Le rette nello spazio

L'equazione di una retta nello spazio viene data come intersezione di due piani, quindi come sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché ci sono infiniti piani che passano per una retta data, questo modo di scrivere l'equazione della retta è piuttosto scomodo, perché la stessa retta si può scrivere in tantissimi modi diversi.

Diventa difficile persino capire se due sistemi rappresentano la stessa retta oppure no.

Ad esempio: i sistemi

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + z - 3 = 0 \\ 4x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

rappresentano la stessa retta oppure no? Non è immediato capirlo.

Le rette nello spazio

L'equazione di una retta nello spazio viene data come intersezione di due piani, quindi come sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché ci sono infiniti piani che passano per una retta data, questo modo di scrivere l'equazione della retta è piuttosto scomodo, perché la stessa retta si può scrivere in tantissimi modi diversi.

Diventa difficile persino capire se due sistemi rappresentano la stessa retta oppure no.

Ad esempio: i sistemi

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + z - 3 = 0 \\ 4x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

rappresentano la stessa retta oppure no? Non è immediato capirlo.

(Vedremo poi che la risposta è: sì!)

Forma parametrica della retta

L'equazione della retta scritta come intersezione di piani si chiama **forma cartesiana della retta**. Spesso invece si preferisce scrivere la retta in un'altra forma, detta **forma parametrica**.

Forma parametrica della retta

L'equazione della retta scritta come intersezione di piani si chiama **forma cartesiana della retta**. Spesso invece si preferisce scrivere la retta in un'altra forma, detta **forma parametrica**.

Si fa così: dato un punto $(x_0; y_0; z_0)$ appartenente alla retta, esistono tre numeri ℓ, m, n , detti **parametri direttori della retta**, per cui ogni punto della retta ha coordinate

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Forma parametrica della retta

L'equazione della retta scritta come intersezione di piani si chiama **forma cartesiana della retta**. Spesso invece si preferisce scrivere la retta in un'altra forma, detta **forma parametrica**.

Si fa così: dato un punto $(x_0; y_0; z_0)$ appartenente alla retta, esistono tre numeri ℓ, m, n , detti **parametri direttori della retta**, per cui ogni punto della retta ha coordinate

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Anche in questo caso i parametri direttori non hanno un valore univoco, perché se li moltiplichiamo tutti e tre per una stessa costante non nulla, la retta non cambia. Ad esempio, se $n \neq 0$ possiamo prendere come parametri direttori della retta i valori

$$\frac{\ell}{n}, \quad \frac{m}{n}, \quad 1.$$

Parallelismo tra rette

I parametri direttori di una retta non possono essere *contemporaneamente* nulli: almeno uno di essi deve essere diverso da zero, altrimenti la retta si ridurrebbe a un punto soltanto.

Parallelismo tra rette

I parametri direttori di una retta non possono essere *contemporaneamente* nulli: almeno uno di essi deve essere diverso da zero, altrimenti la retta si ridurrebbe a un punto soltanto.

Essi sono una generalizzazione del coefficiente angolare: stavolta abbiamo bisogno di più di un coefficiente per descrivere la pendenza di una retta.

Parallelismo tra rette

I parametri direttori di una retta non possono essere *contemporaneamente* nulli: almeno uno di essi deve essere diverso da zero, altrimenti la retta si ridurrebbe a un punto soltanto.

Essi sono una generalizzazione del coefficiente angolare: stavolta abbiamo bisogno di più di un coefficiente per descrivere la pendenza di una retta.

In particolare, due rette sono parallele quando hanno i coefficienti direttori proporzionali, cioè quando

$$\ell_2 = k\ell_1, \quad m_2 = km_1, \quad n_2 = kn_1$$

per qualche $k \neq 0$.

Parallelismo tra rette

I parametri direttori di una retta non possono essere *contemporaneamente* nulli: almeno uno di essi deve essere diverso da zero, altrimenti la retta si ridurrebbe a un punto soltanto.

Essi sono una generalizzazione del coefficiente angolare: stavolta abbiamo bisogno di più di un coefficiente per descrivere la pendenza di una retta.

In particolare, due rette sono parallele quando hanno i coefficienti direttori proporzionali, cioè quando

$$\ell_2 = k\ell_1, \quad m_2 = km_1, \quad n_2 = kn_1$$

per qualche $k \neq 0$.

Tralasciando i rapporti del tipo $\frac{0}{0}$, la condizione di **parallelismo tra rette** si può anche scrivere come

$$\boxed{\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1}.}$$

Retta passante per due punti

Anche nello spazio tridimensionale per due punti distinti passa una e una sola retta.

Retta passante per due punti

Anche nello spazio tridimensionale per due punti distinti passa una e una sola retta.

Dati quindi due punti distinti $P(x_P; y_P; z_P)$ e $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$, come possiamo trovare l'equazione della retta che li contiene?

Retta passante per due punti

Anche nello spazio tridimensionale per due punti distinti passa una e una sola retta.

Dati quindi due punti distinti $P(x_P; y_P; z_P)$ e $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$, come possiamo trovare l'equazione della retta che li contiene?

Trovarla in forma parametrica è molto semplice: si può dimostrare infatti che i tre parametri direttori della retta in questione si possono trovare facendo la **differenza delle coordinate** di P e Q :

$$\ell = x_P - x_Q, \quad m = y_P - y_Q, \quad n = z_P - z_Q.$$

Retta passante per due punti

Anche nello spazio tridimensionale per due punti distinti passa una e una sola retta.

Dati quindi due punti distinti $P(x_P; y_P; z_P)$ e $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$, come possiamo trovare l'equazione della retta che li contiene?

Trovarla in forma parametrica è molto semplice: si può dimostrare infatti che i tre parametri direttori della retta in questione si possono trovare facendo la **differenza delle coordinate** di P e Q :

$$\ell = x_P - x_Q, \quad m = y_P - y_Q, \quad n = z_P - z_Q.$$

Quindi, imponendo che la retta passi per Q (oppure per P) e abbia quei parametri direttori troviamo

$$\begin{cases} x = x_Q + (x_P - x_Q)t \\ y = y_Q + (y_P - y_Q)t \\ z = z_Q + (z_P - z_Q)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ad esempio, troviamo l'equazione parametrica della retta passante per $(1; 2; 1)$ e $(0, -1, 2)$.

Ad esempio, troviamo l'equazione parametrica della retta passante per $(1; 2; 1)$ e $(0, -1, 2)$.

I parametri direttori sono dati da

$$\ell = 1 - 0 = 1, \quad m = 2 + 1 = 3, \quad n = 1 - 2 = -1$$

Ad esempio, troviamo l'equazione parametrica della retta passante per $(1; 2; 1)$ e $(0, -1, 2)$.

I parametri direttori sono dati da

$$\ell = 1 - 0 = 1, \quad m = 2 + 1 = 3, \quad n = 1 - 2 = -1$$

e dunque la retta ha equazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dalla forma parametrica a quella cartesiana

Il passaggio dalla forma parametrica a quella cartesiana per l'equazione di una retta non è difficile: basta ricavare il parametro t da una delle tre variabili e sostituirlo nelle altre due.

Dalla forma parametrica a quella cartesiana

Il passaggio dalla forma parametrica a quella cartesiana per l'equazione di una retta non è difficile: basta ricavare il parametro t da una delle tre variabili e sostituirlo nelle altre due.

Ad esempio, per metter in forma cartesiana la soluzione dell'esercizio precedente

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

facciamo così:

Dalla forma parametrica a quella cartesiana

Il passaggio dalla forma parametrica a quella cartesiana per l'equazione di una retta non è difficile: basta ricavare il parametro t da una delle tre variabili e sostituirlo nelle altre due.

Ad esempio, per metter in forma cartesiana la soluzione dell'esercizio precedente

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

facciamo così:

- dalla prima equazione ricaviamo immediatamente $t = x$;

Dalla forma parametrica a quella cartesiana

Il passaggio dalla forma parametrica a quella cartesiana per l'equazione di una retta non è difficile: basta ricavare il parametro t da una delle tre variabili e sostituirlo nelle altre due.

Ad esempio, per metter in forma cartesiana la soluzione dell'esercizio precedente

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

facciamo così:

- dalla prima equazione ricaviamo immediatamente $t = x$;
- sostituendo nelle altre due troviamo $y = -1 + 3x$, $z = 2 - x$;

Dalla forma parametrica a quella cartesiana

Il passaggio dalla forma parametrica a quella cartesiana per l'equazione di una retta non è difficile: basta ricavare il parametro t da una delle tre variabili e sostituirlo nelle altre due.

Ad esempio, per metter in forma cartesiana la soluzione dell'esercizio precedente

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

facciamo così:

- dalla prima equazione ricaviamo immediatamente $t = x$;
- sostituendo nelle altre due troviamo $y = -1 + 3x$, $z = 2 - x$;
- riordinando e mettendo a sistema troviamo la forma cartesiana

$$\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Dalla forma cartesiana a quella parametrica

Anche il passaggio dalla forma cartesiana a quella parametrica non è difficile: siccome ci sono due equazioni e tre incognite, basta chiamare t una delle tre incognite e ricavare le altre due incognite dalle equazioni.

Dalla forma cartesiana a quella parametrica

Anche il passaggio dalla forma cartesiana a quella parametrica non è difficile: siccome ci sono due equazioni e tre incognite, basta chiamare t una delle tre incognite e ricavare le altre due incognite dalle equazioni.

Per esempio: mettiamo in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Dalla forma cartesiana a quella parametrica

Anche il passaggio dalla forma cartesiana a quella parametrica non è difficile: siccome ci sono due equazioni e tre incognite, basta chiamare t una delle tre incognite e ricavare le altre due incognite dalle equazioni.

Per esempio: mettiamo in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Ponendo $x = t$ e sostituendo, la seconda equazione diventa $y = 2 - t$ e la terza $z = -3 + 3t$, quindi la forma parametrica si scrive

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$$

Dalla forma cartesiana a quella parametrica

Anche il passaggio dalla forma cartesiana a quella parametrica non è difficile: siccome ci sono due equazioni e tre incognite, basta chiamare t una delle tre incognite e ricavare le altre due incognite dalle equazioni.

Per esempio: mettiamo in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Ponendo $x = t$ e sostituendo, la seconda equazione diventa $y = 2 - t$ e la terza $z = -3 + 3t$, quindi la forma parametrica si scrive

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$$

La retta passa per $(0; 2; -3)$ e ha parametri direttori $\ell = 1$, $m = -1$, $n = 3$.

Proviamo a mettere in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} 3y + z - 3 = 0 \\ 4x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Proviamo a mettere in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} 3y + z - 3 = 0 \\ 4x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Poniamo sempre $x = t$. Ricavando z dalla prima equazione abbiamo $z = 3 - 3y$ e sostituendo nella seconda

$$4t + y - (3 - 3y) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - t.$$

Proviamo a mettere in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} 3y + z - 3 = 0 \\ 4x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Poniamo sempre $x = t$. Ricavando z dalla prima equazione abbiamo $z = 3 - 3y$ e sostituendo nella seconda

$$4t + y - (3 - 3y) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - t.$$

Quindi la forma parametrica si scrive

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$$

Proviamo a mettere in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} 3y + z - 3 = 0 \\ 4x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Poniamo sempre $x = t$. Ricavando z dalla prima equazione abbiamo $z = 3 - 3y$ e sostituendo nella seconda

$$4t + y - (3 - 3y) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - t.$$

Quindi la forma parametrica si scrive

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto la stessa retta di prima!

Proviamo a mettere in forma parametrica la retta

$$\begin{cases} 3y + z - 3 = 0 \\ 4x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Poniamo sempre $x = t$. Ricavando z dalla prima equazione abbiamo $z = 3 - 3y$ e sostituendo nella seconda

$$4t + y - (3 - 3y) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - t.$$

Quindi la forma parametrica si scrive

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto la stessa retta di prima!

(e questo risponde positivamente alla domanda se le due equazioni in forma cartesiana incontrate qualche lucido fa rappresentassero la stessa retta.)

Ancora sulla forma parametrica

Attenzione: anche la forma parametrica non è univoca: anche per la stessa retta possiamo scegliere due punti iniziali diversi, oppure moltiplicare i parametri direttori per una stessa costante non nulla.

Ancora sulla forma parametrica

Attenzione: anche la forma parametrica non è univoca: anche per la stessa retta possiamo scegliere due punti iniziali diversi, oppure moltiplicare i parametri direttori per una stessa costante non nulla.

Ad esempio, si provi a verificare che le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 + 4t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -6 + t \\ z = 9 - 2t. \end{cases}$$

rappresentano la stessa retta.

Ancora sulla forma parametrica

Attenzione: anche la forma parametrica non è univoca: anche per la stessa retta possiamo scegliere due punti iniziali diversi, oppure moltiplicare i parametri direttori per una stessa costante non nulla.

Ad esempio, si provi a verificare che le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 + 4t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -6 + t \\ z = 9 - 2t. \end{cases}$$

rappresentano la stessa retta.

(basta vedere che il punto iniziale $(-2; -6; 9)$ della seconda retta appartiene anche alla prima, e che i parametri direttori sono proporzionali)

Rette sghembe

In due dimensioni due rette distinte o sono parallele o sono incidenti, e infatti un modo per definire il parallelismo di rette distinte è quello di dire che non hanno punti in comune.

Rette sghembe

In due dimensioni due rette distinte o sono parallele o sono incidenti, e infatti un modo per definire il parallelismo di rette distinte è quello di dire che non hanno punti in comune.

In tre dimensioni invece la situazione cambia drasticamente, e infatti abbiamo definito **parallele** due rette se hanno i parametri direttori proporzionali.

Rette sghembe

In due dimensioni due rette distinte o sono parallele o sono incidenti, e infatti un modo per definire il parallelismo di rette distinte è quello di dire che non hanno punti in comune.

In tre dimensioni invece la situazione cambia drasticamente, e infatti abbiamo definito **parallele** due rette se hanno i parametri direttori proporzionali.

Esistono infatti coppie di rette che **non** sono parallele ma che non hanno punti in comune: si dice che e due rette sono **sghembe**.

Rette sghembe

In due dimensioni due rette distinte o sono parallele o sono incidenti, e infatti un modo per definire il parallelismo di rette distinte è quello di dire che non hanno punti in comune.

In tre dimensioni invece la situazione cambia drasticamente, e infatti abbiamo definito **parallele** due rette se hanno i parametri direttori proporzionali.

Esistono infatti coppie di rette che **non** sono parallele ma che non hanno punti in comune: si dice che e due rette sono **sghembe**.

Quindi in tre dimensioni due rette distinte possono essere:

- parallele, se hanno parametri direttori proporzionali;
- incidenti, se hanno un punto in comune;
- sghembe, se non hanno punti in comune e non sono parallele.

Rette sghembe

In due dimensioni due rette distinte o sono parallele o sono incidenti, e infatti un modo per definire il parallelismo di rette distinte è quello di dire che non hanno punti in comune.

In tre dimensioni invece la situazione cambia drasticamente, e infatti abbiamo definito **parallele** due rette se hanno i parametri direttori proporzionali.

Esistono infatti coppie di rette che **non** sono parallele ma che non hanno punti in comune: si dice che e due rette sono **sghembe**.

Quindi in tre dimensioni due rette distinte possono essere:

- parallele, se hanno parametri direttori proporzionali;
- incidenti, se hanno un punto in comune;
- sghembe, se non hanno punti in comune e non sono parallele.

Due rette distinte parallele o incidenti sono sempre **complanari**, cioè esiste un piano che le contiene, mentre quelle sghembe non lo sono mai.

Esempio di rette sghembe

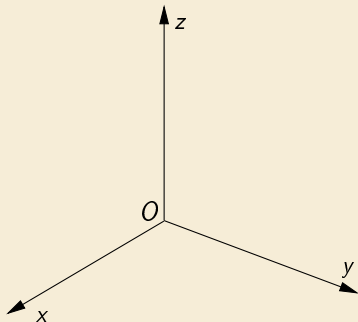
Si considerino ad esempio le rette

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1. \end{cases}$$

Esempio di rette sghembe

Si considerino ad esempio le rette

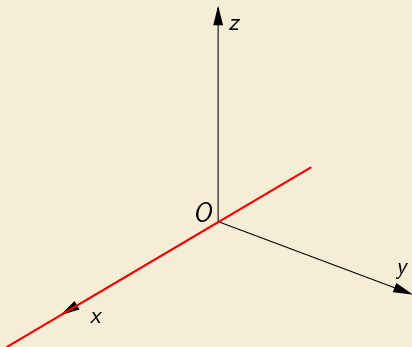
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1. \end{cases}$$



Esempio di rette sghembe

Si considerino ad esempio le rette

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1. \end{cases}$$

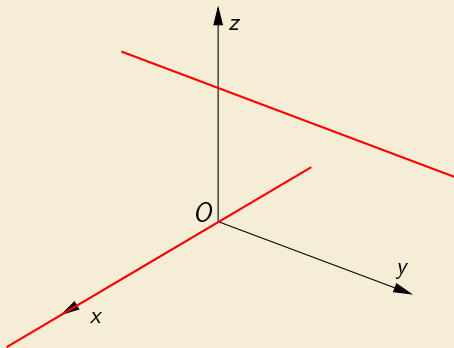


La prima è l'asse delle ascisse.

Esempio di rette sghembe

Si considerino ad esempio le rette

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1. \end{cases}$$



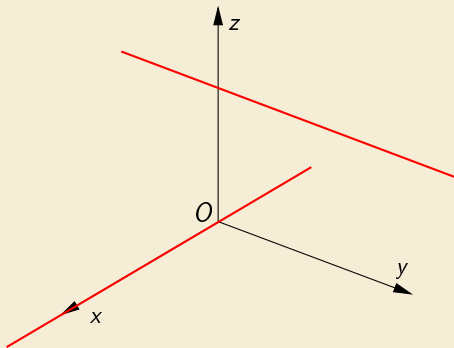
La prima è l'asse delle ascisse.

La seconda è parallela all'asse delle ordinate e passa per il punto $(0; 0; 1)$.

Esempio di rette sghembe

Si considerino ad esempio le rette

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1. \end{cases}$$



La prima è l'asse delle ascisse.
La seconda è parallela all'asse delle ordinate e passa per il punto $(0; 0; 1)$.

Tali rette non sono evidentemente parallele, e non hanno punti in comune, quindi sono sghembe.