Problemi risolubili con la trigonometria

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Cosa vogliamo fare

I problemi trigonometrici rappresentano spesso un argomento ostico per gli studenti: per poterli risolvere, bisogna far ricorso a tutte quelle nozioni di geometria sintetica che si sono vagamente imparate nel corso di lunghissimi anni di studio, nonché alcuni nuovi metodi che coinvolgono le funzioni trigonometriche.

Cosa vogliamo fare

I problemi trigonometrici rappresentano spesso un argomento ostico per gli studenti: per poterli risolvere, bisogna far ricorso a tutte quelle nozioni di geometria sintetica che si sono vagamente imparate nel corso di lunghissimi anni di studio, nonché alcuni nuovi metodi che coinvolgono le funzioni trigonometriche.
Inoltre, il problema trigonometrico, così come altri esercizi che vanno sotto il nome di "problemi" e che si sono incontrati in passato (i problemi di geometria, i problemi di primo e secondo grado, i problemi della geometria analitica), non è risolubile in modo meccanico, seguendo un algoritmo preconfezionato. Quindi alcuni studenti possono trovarsi piuttosto spiazzati in mancanza di una tecnica ripetitiva.

Cosa vogliamo fare

I problemi trigonometrici rappresentano spesso un argomento ostico per gli studenti: per poterli risolvere, bisogna far ricorso a tutte quelle nozioni di geometria sintetica che si sono vagamente imparate nel corso di lunghissimi anni di studio, nonché alcuni nuovi metodi che coinvolgono le funzioni trigonometriche.
Inoltre, il problema trigonometrico, così come altri esercizi che vanno sotto il nome di "problemi" e che si sono incontrati in passato (i problemi di geometria, i problemi di primo e secondo grado, i problemi della geometria analitica), non è risolubile in modo meccanico, seguendo un algoritmo preconfezionato. Quindi alcuni studenti possono trovarsi piuttosto spiazzati in mancanza di una tecnica ripetitiva.
A mio parere, invece, questo è proprio quello che può rendere interessante questo tipo di esercizi: bisogna usare un po' di **fantasia**.

Materiale introduttivo

Per risolvere i problemi trigonometrici occorre una buona conoscenza dei teoremi di trigonometria. Ma prima di fare un breve ripasso dei teoremi, fissiamo la notazione.

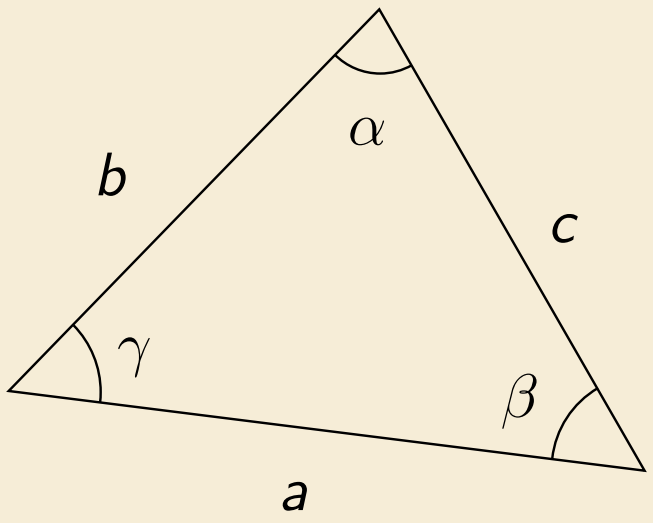
Materiale introduttivo

Per risolvere i problemi trigonometrici occorre una buona conoscenza dei teoremi di trigonometria. Ma prima di fare un breve ripasso dei teoremi, fissiamo la notazione.
Dato un triangolo, chiamiamo a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli, in modo che:

Materiale introduttivo

Per risolvere i problemi trigonometrici occorre una buona conoscenza dei teoremi di trigonometria. Ma prima di fare un breve ripasso dei teoremi, fissiamo la notazione.
Dato un triangolo, chiamiamo a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli, in modo che:

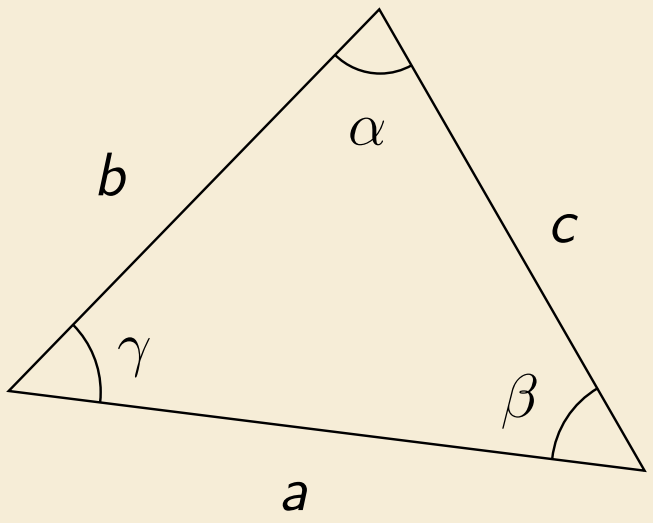
- a è il lato opposto ad α



Materiale introduttivo

Per risolvere i problemi trigonometrici occorre una buona conoscenza dei teoremi di trigonometria. Ma prima di fare un breve ripasso dei teoremi, fissiamo la notazione.
Dato un triangolo, chiamiamo a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli, in modo che:

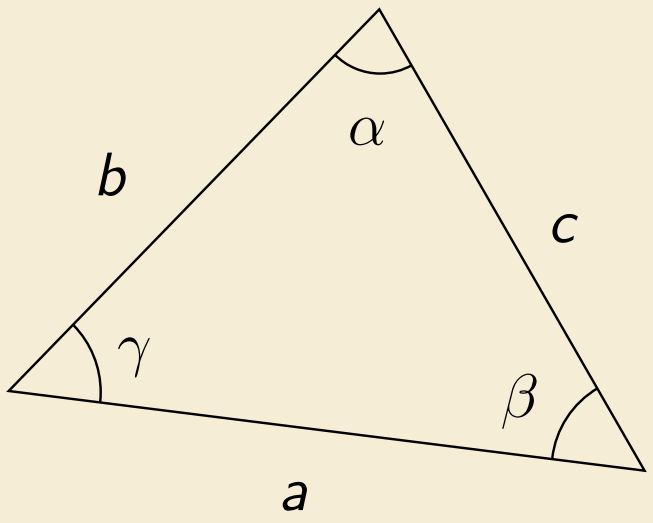
- a è il lato opposto ad α
- b è il lato opposto a β



Materiale introduttivo

Per risolvere i problemi trigonometrici occorre una buona conoscenza dei teoremi di trigonometria. Ma prima di fare un breve ripasso dei teoremi, fissiamo la notazione.
Dato un triangolo, chiamiamo a, b, c le lunghezze dei suoi lati, e α, β, γ le ampiezze dei suoi angoli, in modo che:

- a è il lato opposto ad α
- b è il lato opposto a β
- c è il lato opposto a γ



Triangoli rettangoli

Prendiamo un triangolo rettangolo con ipotenusa c (quindi $\gamma = 90°$).
Allora si ha

Triangoli rettangoli

Prendiamo un triangolo rettangolo con ipotenusa c (quindi $\gamma = 90°$).
Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema di Pitagora)

Triangoli rettangoli

Prendiamo un triangolo rettangolo con ipotenusa c (quindi $\gamma = 90°$).
Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema di Pitagora)
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$

Triangoli rettangoli

Prendiamo un triangolo rettangolo con ipotenusa c (quindi $\gamma = 90°$).
Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema di Pitagora)
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha$.

Triangoli rettangoli

Prendiamo un triangolo rettangolo con ipotenusa c (quindi $\gamma = 90°$). Allora si ha

- $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema di Pitagora)
- $a = c \operatorname{sen} \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$
- $b = c \operatorname{sen} \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha$.

Da queste relazioni si può ricavare, ad esempio, una formula per l'area di un triangolo generico:

L'area di un triangolo si può calcolare facendo

$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma,$$

ovvero "$\frac{1}{2}$ lato per lato per il seno dell'angolo compreso".

Il teorema della corda, dei seni, del coseno

Teorema della corda

In una circonferenza di raggio R, la corda che forma un angolo alla circonferenza ampio α ha lunghezza $2R \operatorname{sen} \alpha$.

Il teorema della corda, dei seni, del coseno

Teorema della corda

In una circonferenza di raggio R, la corda che forma un angolo alla circonferenza ampio α ha lunghezza $2R \operatorname{sen} \alpha$.

Teorema dei seni

In un triangolo, i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, ovvero

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Il teorema della corda, dei seni, del coseno

Teorema della corda

In una circonferenza di raggio R, la corda che forma un angolo alla circonferenza ampio α ha lunghezza $2R \operatorname{sen} \alpha$.

Teorema dei seni

In un triangolo, i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, ovvero

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Teorema del coseno

In un triangolo si ha

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \,.$$

Le equazioni goniometriche

Inoltre, un problema di trigonometria porta sempre a dover risolvere un'equazione goniometrica, per cui bisogna saper risolvere tali equazioni:

Le equazioni goniometriche

Inoltre, un problema di trigonometria porta sempre a dover risolvere un'equazione goniometrica, per cui bisogna saper risolvere tali equazioni:

- le equazioni goniometriche elementari;

Le equazioni goniometriche

Inoltre, un problema di trigonometria porta sempre a dover risolvere un'equazione goniometrica, per cui bisogna saper risolvere tali equazioni:

- le equazioni goniometriche elementari;
- le equazioni lineari;

Le equazioni goniometriche

Inoltre, un problema di trigonometria porta sempre a dover risolvere un'equazione goniometrica, per cui bisogna saper risolvere tali equazioni:

- le equazioni goniometriche elementari;
- le equazioni lineari;
- le equazioni in una sola funzione goniometrica;

Le equazioni goniometriche

Inoltre, un problema di trigonometria porta sempre a dover risolvere un'equazione goniometrica, per cui bisogna saper risolvere tali equazioni:

- le equazioni goniometriche elementari;
- le equazioni lineari;
- le equazioni in una sola funzione goniometrica;
- le equazioni omogenee di secondo grado;

Le equazioni goniometriche

Inoltre, un problema di trigonometria porta sempre a dover risolvere un'equazione goniometrica, per cui bisogna saper risolvere tali equazioni:

- le equazioni goniometriche elementari;
- le equazioni lineari;
- le equazioni in una sola funzione goniometrica;
- le equazioni omogenee di secondo grado;
- ...

Il problema trigonometrico

Tipicamente in un problema di trigonometria bisogna, partendo dai dati forniti dal problema, determinare una certa quantità, che può essere la lunghezza di un segmento, l'ampiezza di un angolo, il perimetro o l'area di una figura piana, ecc. ecc.

Il problema trigonometrico

Tipicamente in un problema di trigonometria bisogna, partendo dai dati forniti dal problema, determinare una certa quantità, che può essere la lunghezza di un segmento, l'ampiezza di un angolo, il perimetro o l'area di una figura piana, ecc. ecc.
Per risolvere il problema:

Il problema trigonometrico

Tipicamente in un problema di trigonometria bisogna, partendo dai dati forniti dal problema, determinare una certa quantità, che può essere la lunghezza di un segmento, l'ampiezza di un angolo, il perimetro o l'area di una figura piana, ecc. ecc.
Per risolvere il problema:

- si denota una quantità incognita con x (nei problemi di trigonometria tale incognita è spesso l'ampiezza di un angolo);

Il problema trigonometrico

Tipicamente in un problema di trigonometria bisogna, partendo dai dati forniti dal problema, determinare una certa quantità, che può essere la lunghezza di un segmento, l'ampiezza di un angolo, il perimetro o l'area di una figura piana, ecc. ecc.
Per risolvere il problema:

- si denota una quantità incognita con x (nei problemi di trigonometria tale incognita è spesso l'ampiezza di un angolo);
- si trova l'intervallo di definizione dell'incognita (ad esempio, una lunghezza non potrà mai essere negativa);

Il problema trigonometrico

Tipicamente in un problema di trigonometria bisogna, partendo dai dati forniti dal problema, determinare una certa quantità, che può essere la lunghezza di un segmento, l'ampiezza di un angolo, il perimetro o l'area di una figura piana, ecc. ecc.
Per risolvere il problema:

- si denota una quantità incognita con x (nei problemi di trigonometria tale incognita è spesso l'ampiezza di un angolo);
- si trova l'intervallo di definizione dell'incognita (ad esempio, una lunghezza non potrà mai essere negativa);
- si impostano le relazioni fornite dal problema in forma di equazione (che sarà trigonometrica);

Il problema trigonometrico

Tipicamente in un problema di trigonometria bisogna, partendo dai dati forniti dal problema, determinare una certa quantità, che può essere la lunghezza di un segmento, l'ampiezza di un angolo, il perimetro o l'area di una figura piana, ecc. ecc.
Per risolvere il problema:

- si denota una quantità incognita con x (nei problemi di trigonometria tale incognita è spesso l'ampiezza di un angolo);
- si trova l'intervallo di definizione dell'incognita (ad esempio, una lunghezza non potrà mai essere negativa);
- si impostano le relazioni fornite dal problema in forma di equazione (che sarà trigonometrica);
- si risolve l'equazione e si accettano solo le soluzioni compatibili con l'intervallo di definizione dell'incognita.

Il problema trigonometrico

Tipicamente in un problema di trigonometria bisogna, partendo dai dati forniti dal problema, determinare una certa quantità, che può essere la lunghezza di un segmento, l'ampiezza di un angolo, il perimetro o l'area di una figura piana, ecc. ecc.
Per risolvere il problema:

- si denota una quantità incognita con x (nei problemi di trigonometria tale incognita è spesso l'ampiezza di un angolo);
- si trova l'intervallo di definizione dell'incognita (ad esempio, una lunghezza non potrà mai essere negativa);
- si impostano le relazioni fornite dal problema in forma di equazione (che sarà trigonometrica);
- si risolve l'equazione e si accettano solo le soluzioni compatibili con l'intervallo di definizione dell'incognita.

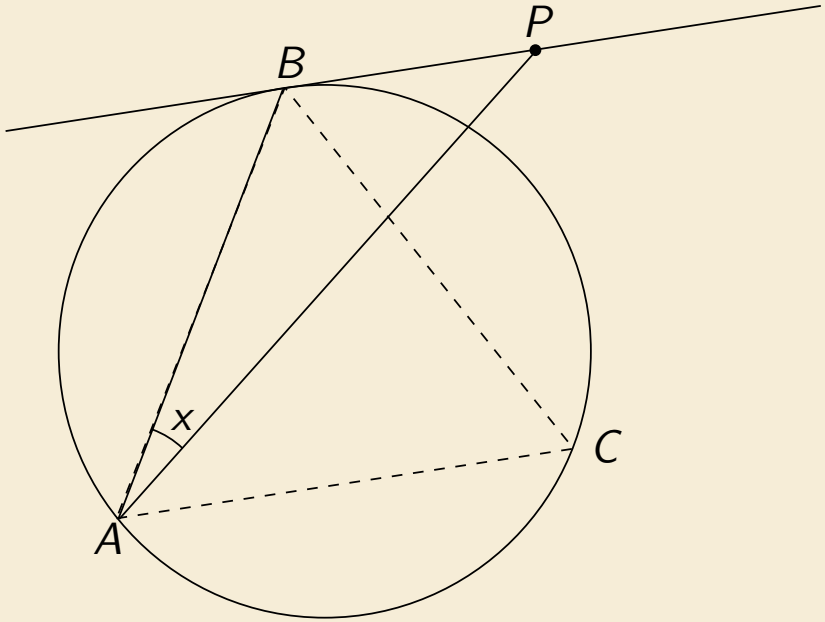
Procederemo ora fornendo alcuni esempi e cercando di commentare la tecnica risolutiva.

Problema 1

Il segmento AB è lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di centro O e raggio r. Si tracci in B la tangente alla circonferenza e si prenda su di essa un punto P dalla stessa parte di O rispetto alla retta di AB.
Si trovi il valore dell'angolo $B\widehat{A}P$ per cui

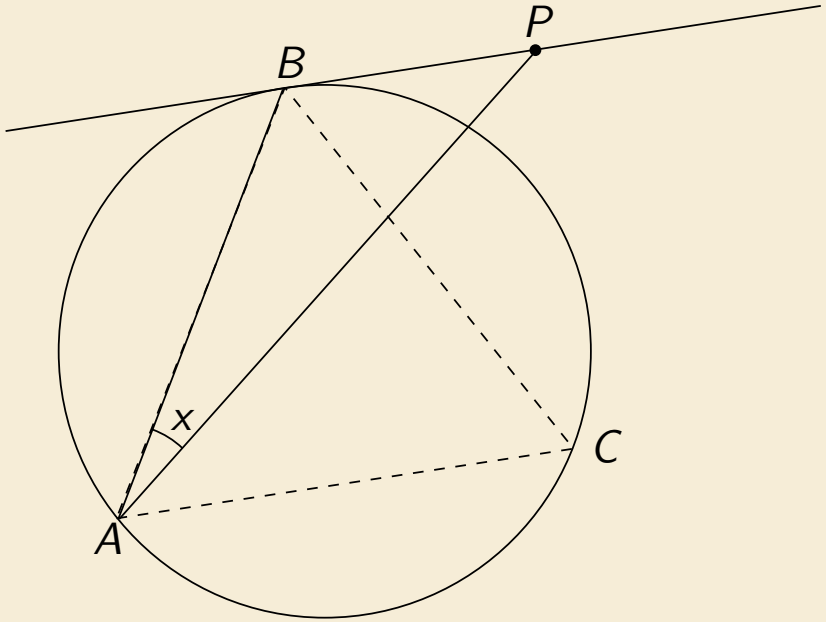
$$\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}r^2.$$

Risoluzione



L'incognita è già suggerita dal problema: porremo $x = B\widehat{A}P$. Poiché P si muove su una semiretta, quando $P \equiv B$ si ha $x_{\text{min}} = 0$, mentre quando P si allontana indefinitamente da B, il segmento AP tende a diventare parallelo alla retta tangente in B, e quindi $x_{\text{max}} = B\widehat{A}C = 60^\circ$.

Risoluzione

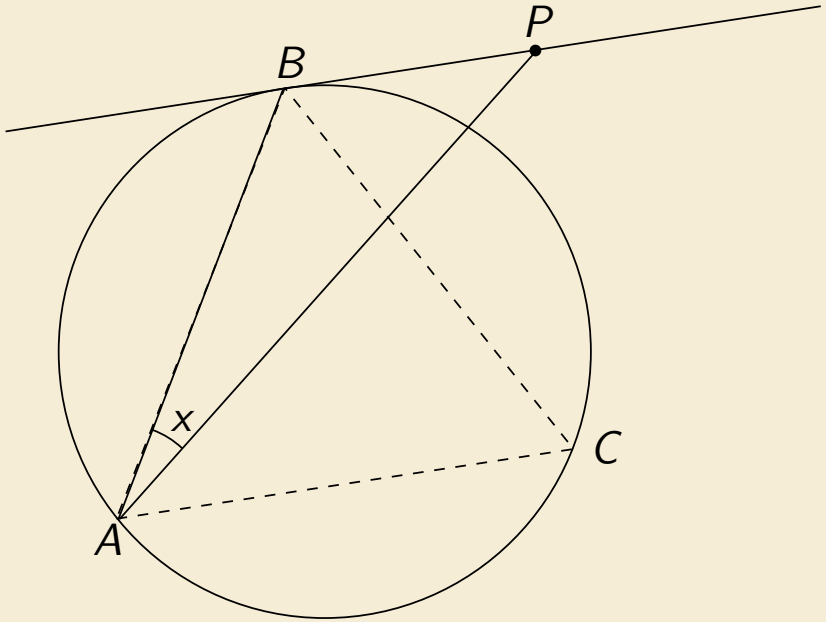


L'incognita è già suggerita dal problema: porremo $x = B\widehat{A}P$. Poiché P si muove su una semiretta, quando $P \equiv B$ si ha $x_{\text{min}} = 0$, mentre quando P si allontana indefinitamente da B, il segmento AP tende a diventare parallelo alla retta tangente in B, e quindi $x_{\text{max}} = B\widehat{A}C = 60^\circ$.

Dobbiamo trovare $\overline{AB}$ e $\overline{AP}$. Il primo è presto trovato, essendo lato del triangolo equilatero inscritto: ad esempio, si può usare il teorema della corda, per trovare

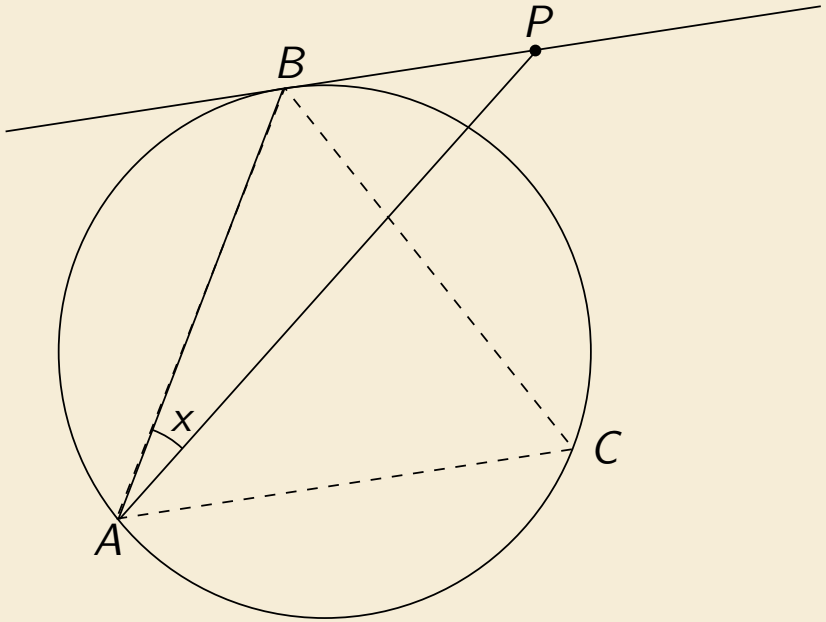
$$\overline{AB} = 2r \operatorname{sen} 60^\circ = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

Risoluzione



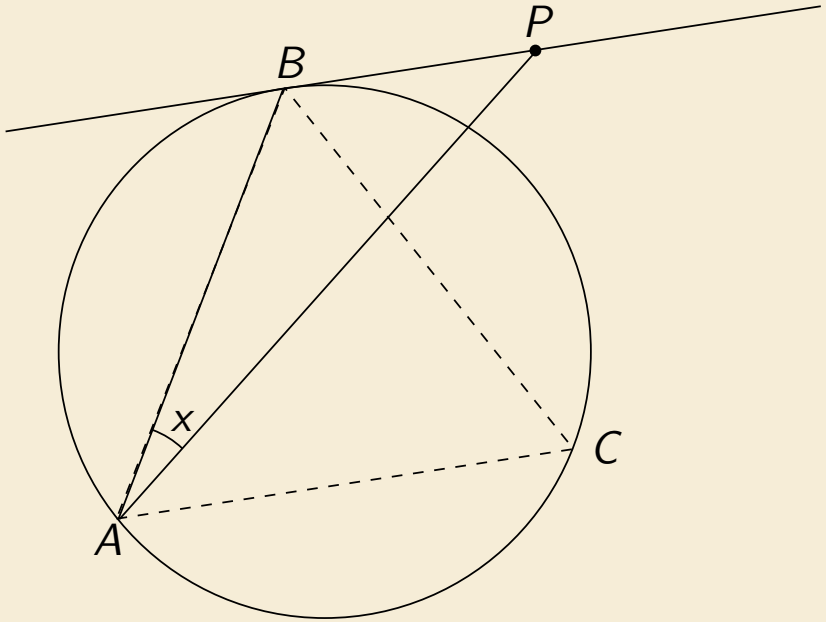
Per trovare $\overline{AP}$, ragioniamo sul triangolo BAP, di cui sono già note le misure del lato AB e dell'angolo $B\widehat{A}P$.

Risoluzione



Per trovare $\overline{AP}$, ragioniamo sul triangolo BAP, di cui sono già note le misure del lato AB e dell'angolo $B\widehat{A}P$.
Possiamo trovare anche l'angolo $A\widehat{B}P$, che è fisso e vale $120°$, in quanto somma di $A\widehat{B}C$ e $C\widehat{B}P$, entrambi di $60°$.

Risoluzione

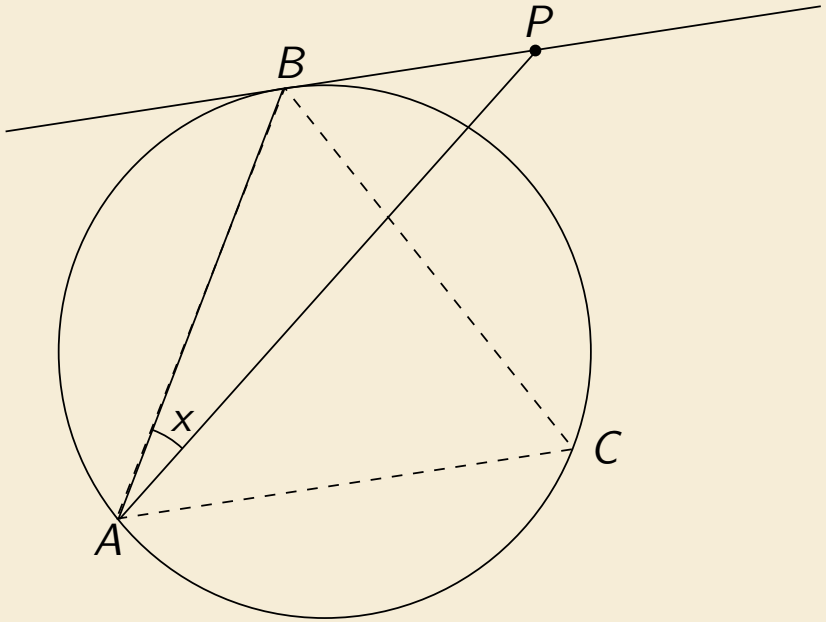


Per trovare $\overline{AP}$, ragioniamo sul triangolo BAP, di cui sono già note le misure del lato AB e dell'angolo $B\widehat{A}P$.
Possiamo trovare anche l'angolo $A\widehat{B}P$, che è fisso e vale $120°$, in quanto somma di $A\widehat{B}C$ e $C\widehat{B}P$, entrambi di $60°$.

In particolare $B\widehat{P}A = 180° - 120° - x = 60° - x$. Quindi applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen} 120°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}(60° - x)}$$

Risoluzione



Per trovare $\overline{AP}$, ragioniamo sul triangolo BAP, di cui sono già note le misure del lato AB e dell'angolo $B\widehat{A}P$.
Possiamo trovare anche l'angolo $A\widehat{B}P$, che è fisso e vale $120°$, in quanto somma di $A\widehat{B}C$ e $C\widehat{B}P$, entrambi di $60°$.

In particolare $B\widehat{P}A = 180° - 120° - x = 60° - x$. Quindi applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen} 120°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}(60° - x)} \quad \Rightarrow \quad \overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(60° - x)} = \frac{3r}{2\operatorname{sen}(60° - x)}.$$

Risoluzione

L'equazione $\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}r^2$ diventa

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} - 3r^2 = \frac{3}{2}r^2,$$

Risoluzione

L'equazione $\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}r^2$ diventa

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} - 3r^2 = \frac{3}{2}r^2,$$

da cui

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} = \frac{9}{2}r^2$$

Risoluzione

L'equazione $\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}r^2$ diventa

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} - 3r^2 = \frac{3}{2}r^2,$$

da cui

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} = \frac{9}{2}r^2 \quad \Rightarrow \quad 4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x) = 2.$$

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Risoluzione

L'equazione $\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}r^2$ diventa

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} - 3r^2 = \frac{3}{2}r^2,$$

da cui

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} = \frac{9}{2}r^2 \quad \Rightarrow \quad 4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x) = 2.$$

Otteniamo l'equazione elementare $\mathrm{sen}(60^\circ - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dove abbiamo scelto il segno positivo poiché l'angolo $60^\circ - x$ deve stare nel primo quadrante.

Risoluzione

L'equazione $\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}r^2$ diventa

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} - 3r^2 = \frac{3}{2}r^2,$$

da cui

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} = \frac{9}{2}r^2 \quad \Rightarrow \quad 4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x) = 2.$$

Otteniamo l'equazione elementare $\mathrm{sen}(60^\circ - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dove abbiamo scelto il segno positivo poiché l'angolo $60^\circ - x$ deve stare nel primo quadrante. Le soluzioni sono $60^\circ - x = 45^\circ$ e $60^\circ - x = 135^\circ$, ma la seconda è da scartare per le limitazioni su x, quindi abbiamo l'unica soluzione

$$\boxed{x = 15^\circ.}$$

Risoluzione

L'equazione $\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}r^2$ diventa

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} - 3r^2 = \frac{3}{2}r^2,$$

da cui

$$\frac{9r^2}{4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x)} = \frac{9}{2}r^2 \quad \Rightarrow \quad 4\,\mathrm{sen}^2(60^\circ - x) = 2.$$

Otteniamo l'equazione elementare $\mathrm{sen}(60^\circ - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dove abbiamo scelto il segno positivo poiché l'angolo $60^\circ - x$ deve stare nel primo quadrante. Le soluzioni sono $60^\circ - x = 45^\circ$ e $60^\circ - x = 135^\circ$, ma la seconda è da scartare per le limitazioni su x, quindi abbiamo l'unica soluzione

$$\boxed{x = 15^\circ.}$$

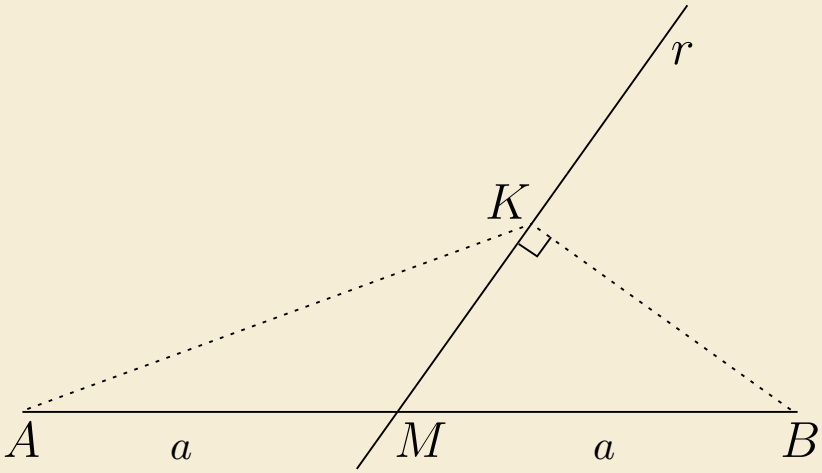
Ora passiamo a un altro problema.

Problema 2

Un segmento AB è lungo $2a$. Sia M il punto medio di AB e sia r una retta passante per M e formante un angolo acuto con MB. Sia K la proiezione ortogonale di B su r.
Si trovi l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{M}K$ in modo che

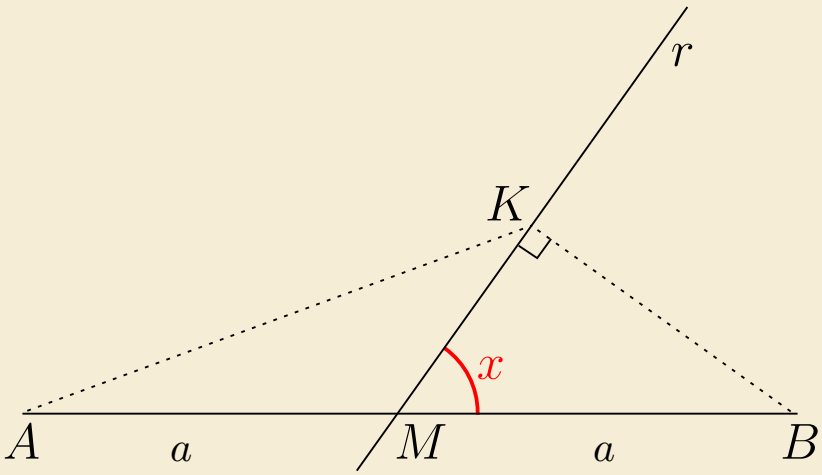
$$\overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 = \frac{5}{2}a^2.$$

Risoluzione



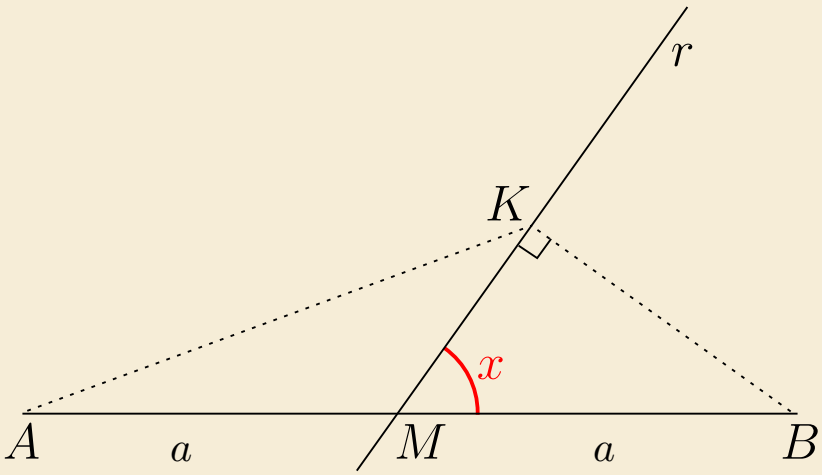
Cominciamo facendo un disegno. Come indicato dal problema, è naturale scegliere come incognita l'angolo $B\widehat{M}K$.

Risoluzione



Cominciamo facendo un disegno. Come indicato dal problema, è naturale scegliere come incognita l'angolo $B\widehat{M}K$. Quindi poniamo $x = B\widehat{M}K$.

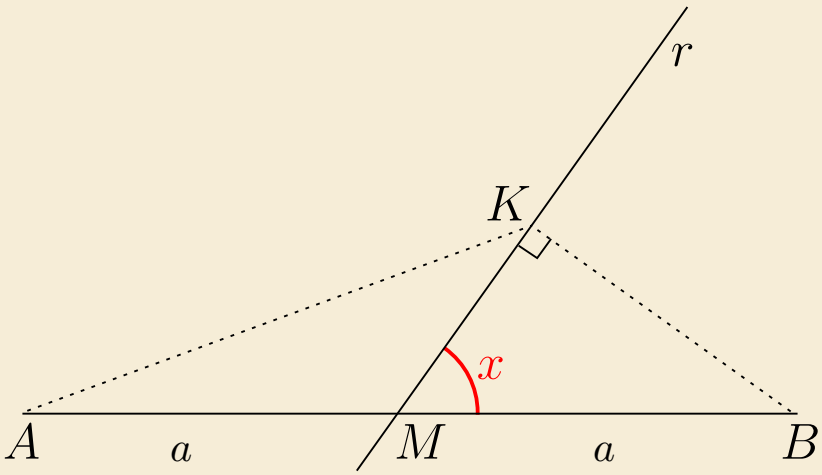
Risoluzione



Cominciamo facendo un disegno. Come indicato dal problema, è naturale scegliere come incognita l'angolo $B\widehat{M}K$. Quindi poniamo $x = B\widehat{M}K$.
Dovendo la retta r formare un angolo acuto con MB, abbiamo le limitazioni

$$0 < x < 90^\circ.$$

Risoluzione

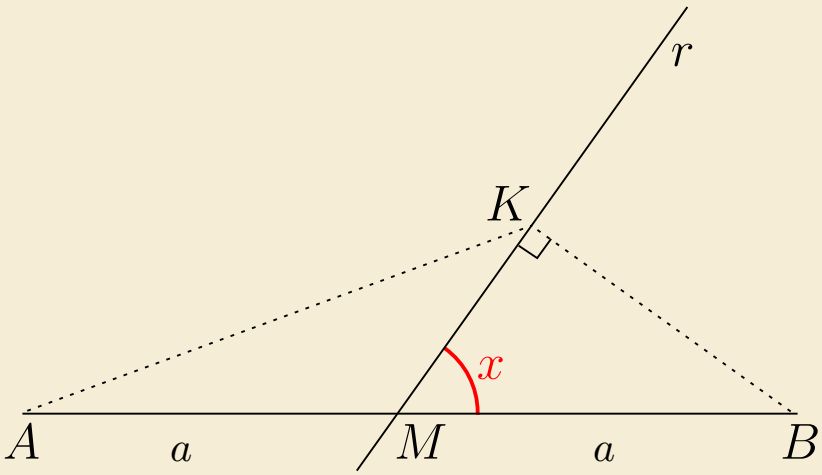


Cominciamo facendo un disegno. Come indicato dal problema, è naturale scegliere come incognita l'angolo $B\widehat{M}K$. Quindi poniamo $x = B\widehat{M}K$.
Dovendo la retta r formare un angolo acuto con MB, abbiamo le limitazioni

$$0 < x < 90^\circ.$$

Ora cerchiamo di esprimere $\overline{AK}$ e $\overline{KB}$ in funzione di x.

Risoluzione



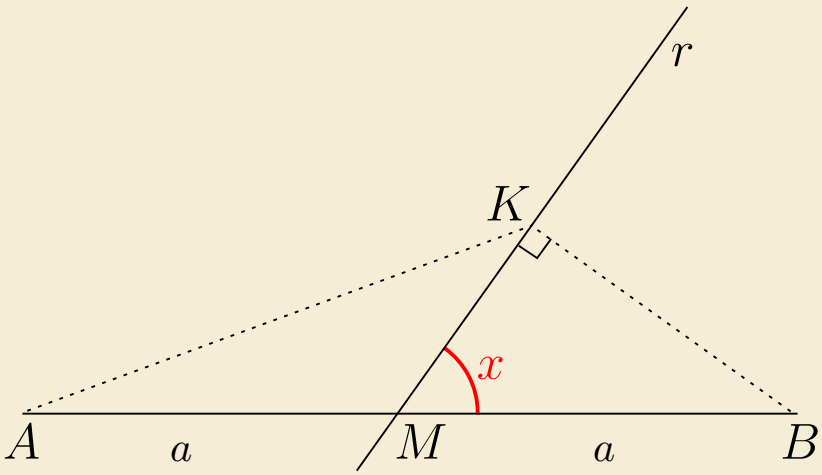
Cominciamo facendo un disegno. Come indicato dal problema, è naturale scegliere come incognita l'angolo $B\widehat{M}K$. Quindi poniamo $x = B\widehat{M}K$.
Dovendo la retta r formare un angolo acuto con MB, abbiamo le limitazioni

$$0 < x < 90^\circ.$$

Ora cerchiamo di esprimere $\overline{AK}$ e $\overline{KB}$ in funzione di x.
Notiamo subito che abbiamo un triangolo rettangolo MKB di cui conosciamo l'ipotenusa e un angolo, quindi possiamo trovare i due cateti:

$$\overline{KM} = a\cos x, \qquad \overline{KB} = a\,\mathrm{sen}\,x.$$

Risoluzione



Cominciamo facendo un disegno. Come indicato dal problema, è naturale scegliere come incognita l'angolo $B\widehat{M}K$. Quindi poniamo $x = B\widehat{M}K$.
Dovendo la retta r formare un angolo acuto con MB, abbiamo le limitazioni

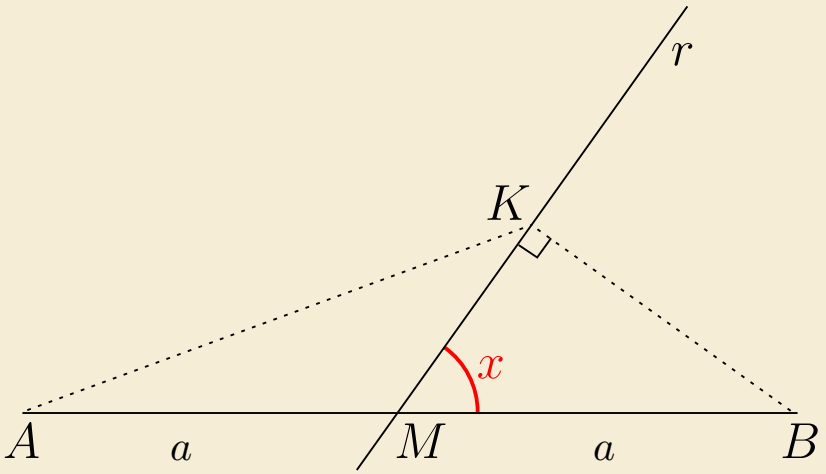
$$0 < x < 90^\circ.$$

Ora cerchiamo di esprimere $\overline{AK}$ e $\overline{KB}$ in funzione di x.
Notiamo subito che abbiamo un triangolo rettangolo MKB di cui conosciamo l'ipotenusa e un angolo, quindi possiamo trovare i due cateti:

$$\overline{KM} = a\cos x, \qquad \overline{KB} = a\,\mathrm{sen}\,x.$$

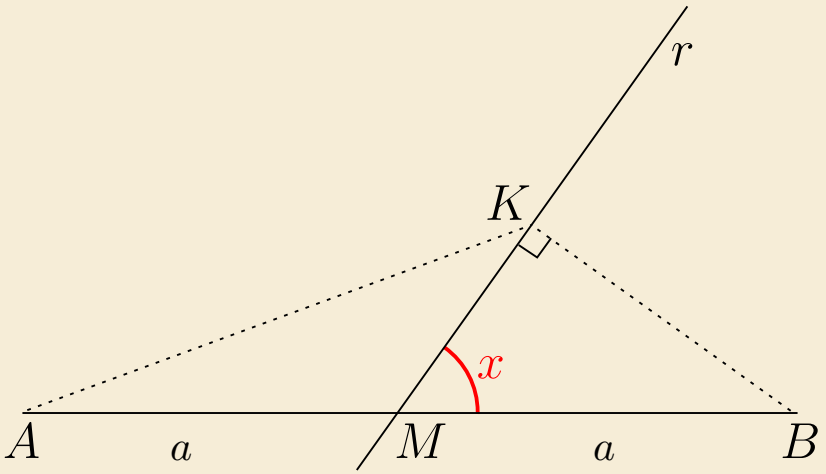
Ora dobbiamo trovare $\overline{AK}$. Esso fa parte del triangolo AMK, di cui conosciamo due lati (uno lo abbiamo appena trovato).

Risoluzione



Possiamo trovare l'angolo compreso $A\widehat{M}K$?

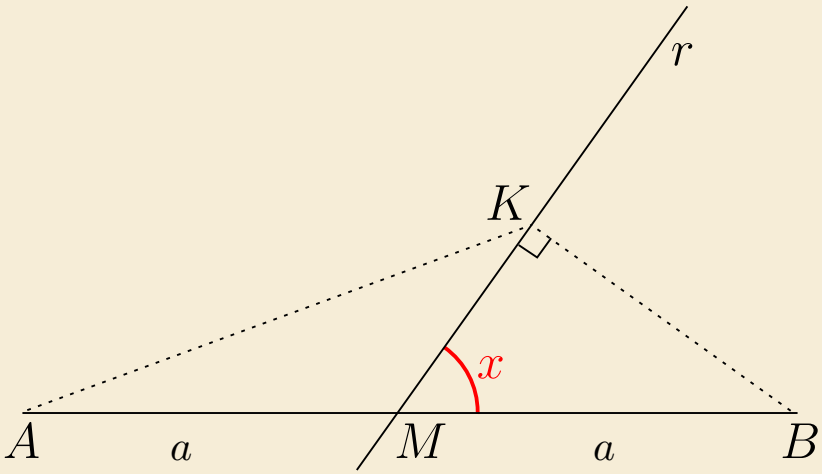
Risoluzione



Possiamo trovare l'angolo compreso $A\widehat{M}K$?

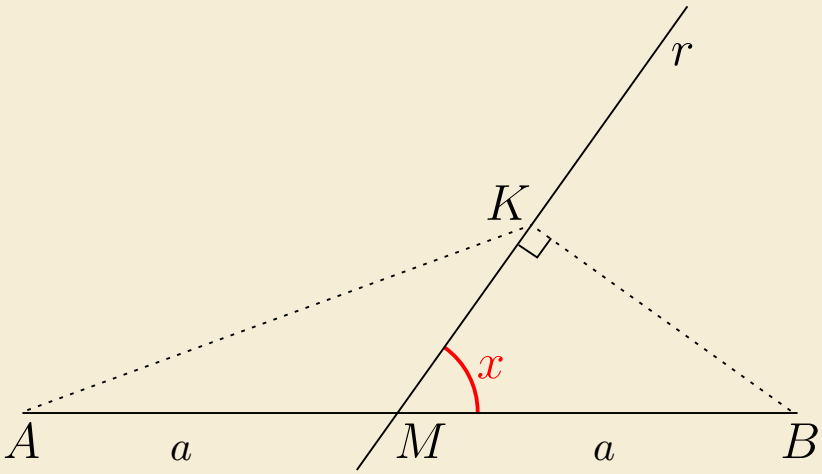
Certo, esso è il supplementare di x, quindi $A\widehat{M}K = 180° - x$.

Risoluzione



Possiamo trovare l'angolo compreso $A\widehat{M}K$?
Certo, esso è il supplementare di x, quindi $A\widehat{M}K = 180° - x$.
Quindi possiamo applicare il teorema del coseno:

Risoluzione



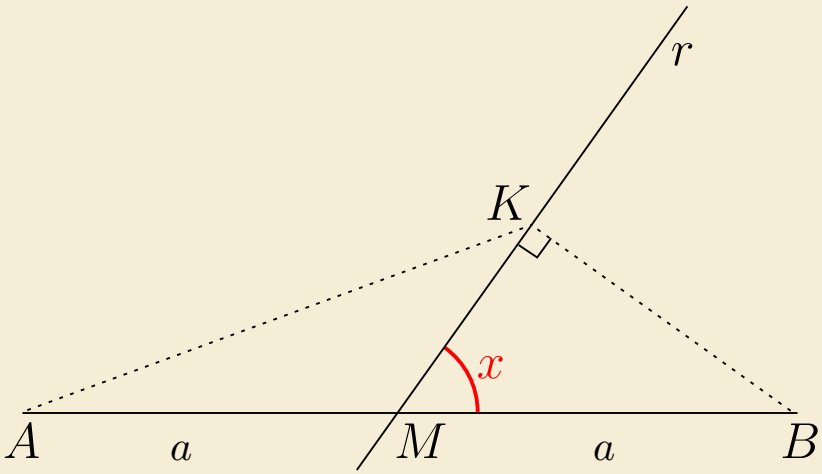
Possiamo trovare l'angolo compreso $A\widehat{M}K$?
Certo, esso è il supplementare di x, quindi $A\widehat{M}K = 180^\circ - x$.
Quindi possiamo applicare il teorema del coseno:

$$\overline{AK}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{KM}^2 - 2\overline{AM}\,\overline{KM}\cos(180^\circ - x)$$

e poiché $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$,

$$\overline{AK}^2 = a^2 + a^2\cos^2 x + 2a^2\cos^2 x = a^2 + 3a^2\cos^2 x.$$

Risoluzione



Possiamo trovare l'angolo compreso $A\widehat{M}K$?
Certo, esso è il supplementare di x, quindi $A\widehat{M}K = 180^\circ - x$.
Quindi possiamo applicare il teorema del coseno:

$$\overline{AK}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{KM}^2 - 2\overline{AM}\,\overline{KM}\cos(180^\circ - x)$$

e poiché $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$,

$$\overline{AK}^2 = a^2 + a^2\cos^2 x + 2a^2\cos^2 x = a^2 + 3a^2\cos^2 x.$$

Quindi l'equazione risolutiva diventa

$$\overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 = \frac{5}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 3a^2\cos^2 x + a^2\operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}a^2.$$

Risoluzione

Semplificando a^2 otteniamo

$$1 + 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}$$

Risoluzione

Semplificando a^2 otteniamo

$$1 + 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}$$

da cui, usando la formula $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

Risoluzione

Semplificando a^2 otteniamo

$$1 + 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}$$

da cui, usando la formula $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$1 + 3\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{2}$$

Risoluzione

Semplificando a^2 otteniamo

$$1 + 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}$$

da cui, usando la formula $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$1 + 3\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

Risoluzione

Semplificando a^2 otteniamo

$$1 + 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}$$

da cui, usando la formula $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$1 + 3\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo usato il fatto che x sta nel primo quadrante.

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Risoluzione

Semplificando a^2 otteniamo

$$1 + 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}$$

da cui, usando la formula $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$1 + 3\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo usato il fatto che x sta nel primo quadrante.
Tenendo conto delle limitazioni, l'unica soluzione accettabile è

$$\boxed{x = 60^\circ.}$$

Risoluzione

Semplificando a^2 otteniamo

$$1 + 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{2}$$

da cui, usando la formula $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$1 + 3\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo usato il fatto che x sta nel primo quadrante.
Tenendo conto delle limitazioni, l'unica soluzione accettabile è

$$\boxed{x = 60^\circ.}$$

Ora affrontiamo un problema un po' più difficile, tratto da un tema della Maturità Scientifica.

Maurità scientifica 1998, sessione suppletiva

3. *In una circonferenza di diametro $AB = 2r$ è inscritto un triangolo rettangolo ABC, retto in C ed avente il cateto CB eguale al doppio del cateto AC. Sia P un punto dell'arco di estremi A e B, che non contiene C.*

Il candidato:

a) *determini i cateti del triangolo ABC ed i valori di* $\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\cos\alpha$, *essendo* $\alpha = C\widehat{A}B$;

b) *indicato con ϑ l'angolo $C\widehat{A}P$, esprima in funzione di $x = \operatorname{ctg}\vartheta$ il rapporto:*

$$R(x) = \frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2};$$

c) *tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $y = R(x)$ e descriva l'andamento di $R(x)$;*

d) *trovi i valori di x quando y assume il valore $\frac{1}{3}$.*

Maurità scientifica 1998, sessione suppletiva

Ci interessano i primi due punti dell'esercizio, riscriviamoli:

Maurità scientifica 1998, sessione suppletiva

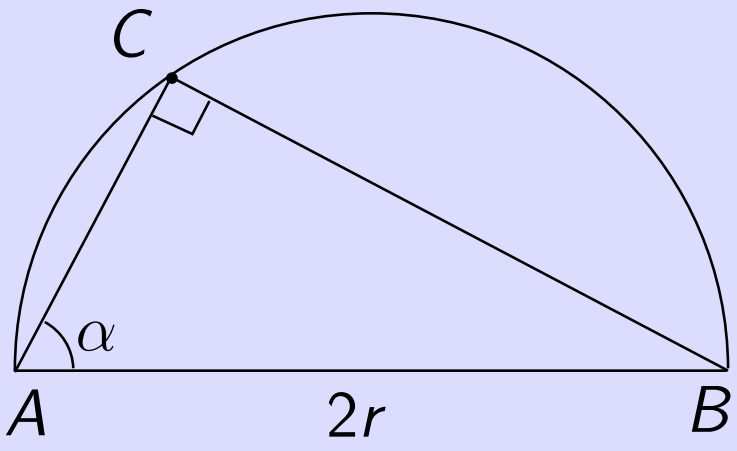
Ci interessano i primi due punti dell'esercizio, riscriviamoli:

In una circonferenza di diametro $AB = 2r$ è inscritto un triangolo rettangolo ABC, retto in C ed avente il cateto CB eguale ai doppio del cateto AC. Sia P un punto dell'arco di estremi A e B, che non contiene C. Il candidato:
(a) determini i cateti del triangolo ABC ed i valori di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, essendo $\alpha = C\widehat{A}B$;
(b) indicato con ϑ l'angolo $C\widehat{A}P$, esprima in funzione di $x = \operatorname{ctg}\vartheta$ il rapporto

$$R(x) = \frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2}.$$

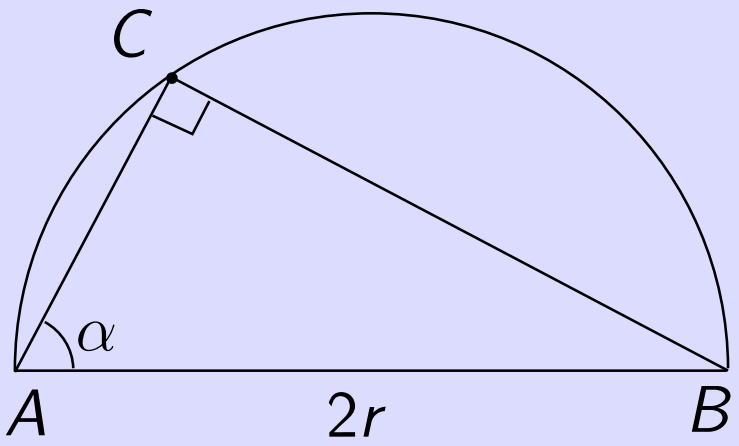
Risoluzione del punto (a)

Facciamo un disegno della prima parte del problema: essendo il triangolo rettangolo, esso è inscritto nella semicirconferenza.



Risoluzione del punto (a)

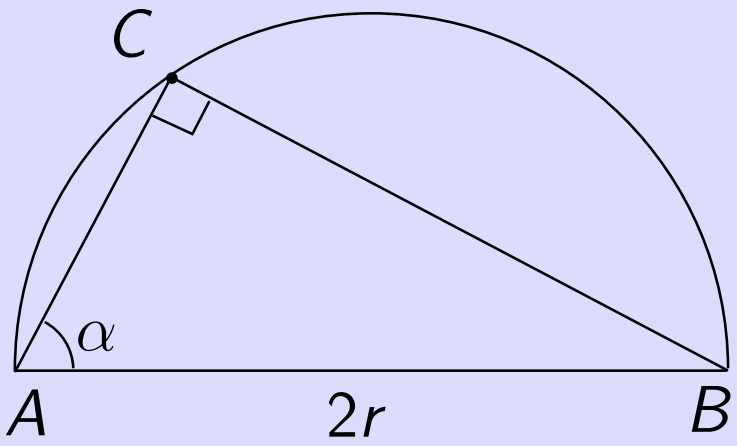
Facciamo un disegno della prima parte del problema: essendo il triangolo rettangolo, esso è inscritto nella semicirconferenza.



Procediamo trattando α come incognita: intanto si deve avere $0 \leq \alpha \leq 90°$, visto che C deve stare sulla semicirconferenza.

Risoluzione del punto (a)

Facciamo un disegno della prima parte del problema: essendo il triangolo rettangolo, esso è inscritto nella semicirconferenza.

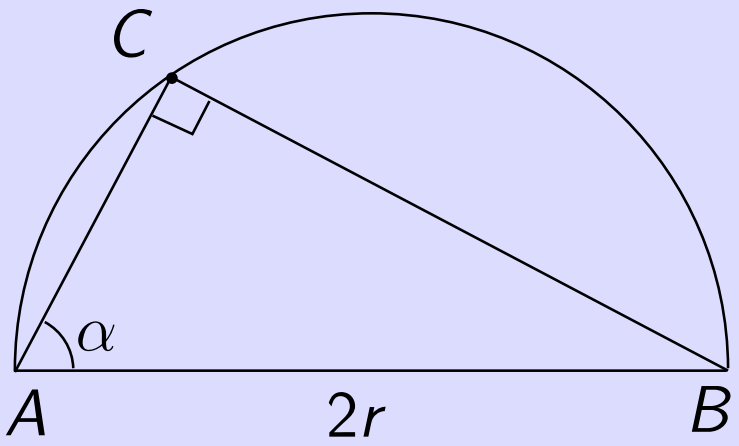


Procediamo trattando α come incognita: intanto si deve avere $0 \leq \alpha \leq 90°$, visto che C deve stare sulla semicirconferenza. Poi, per i teoremi sui triangoli rettangoli si ha $\overline{AC} = 2r\cos\alpha$ e $\overline{CB} = 2r\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Imponendo $\overline{CB} = 2\overline{AC}$ si ottiene l'equazione

$$2r\,\mathrm{sen}\,\alpha = 4r\cos\alpha$$

Risoluzione del punto (a)

Facciamo un disegno della prima parte del problema: essendo il triangolo rettangolo, esso è inscritto nella semicirconferenza.



Procediamo trattando α come incognita: intanto si deve avere $0 \leq \alpha \leq 90°$, visto che C deve stare sulla semicirconferenza. Poi, per i teoremi sui triangoli rettangoli si ha $\overline{AC} = 2r\cos\alpha$ e $\overline{CB} = 2r\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Imponendo $\overline{CB} = 2\overline{AC}$ si ottiene l'equazione

$$2r\,\mathrm{sen}\,\alpha = 4r\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Risoluzione del punto (a)

Dobbiamo ora risolvere la semplice equazione trigonometrica

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Esprimendo sen in funzione di cos ed elevando al quadrato (tenendo conto del fatto che $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$ devono essere positivi per i vincoli su α), si ha

$$1 - \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha$$

Risoluzione del punto (a)

Dobbiamo ora risolvere la semplice equazione trigonometrica

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Esprimendo sen in funzione di cos ed elevando al quadrato (tenendo conto del fatto che $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$ devono essere positivi per i vincoli su α), si ha

$$1 - \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Risoluzione del punto (a)

Dobbiamo ora risolvere la semplice equazione trigonometrica

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Esprimendo sen in funzione di cos ed elevando al quadrato (tenendo conto del fatto che $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$ devono essere positivi per i vincoli su α), si ha

$$1 - \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Risoluzione del punto (a)

Dobbiamo ora risolvere la semplice equazione trigonometrica

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Esprimendo sen in funzione di cos ed elevando al quadrato (tenendo conto del fatto che $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$ devono essere positivi per i vincoli su α), si ha

$$1 - \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Quindi i cateti valgono

$$\overline{AC} = 2r\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}r,$$

Risoluzione del punto (a)

Dobbiamo ora risolvere la semplice equazione trigonometrica

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Esprimendo sen in funzione di cos ed elevando al quadrato (tenendo conto del fatto che $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$ devono essere positivi per i vincoli su α), si ha

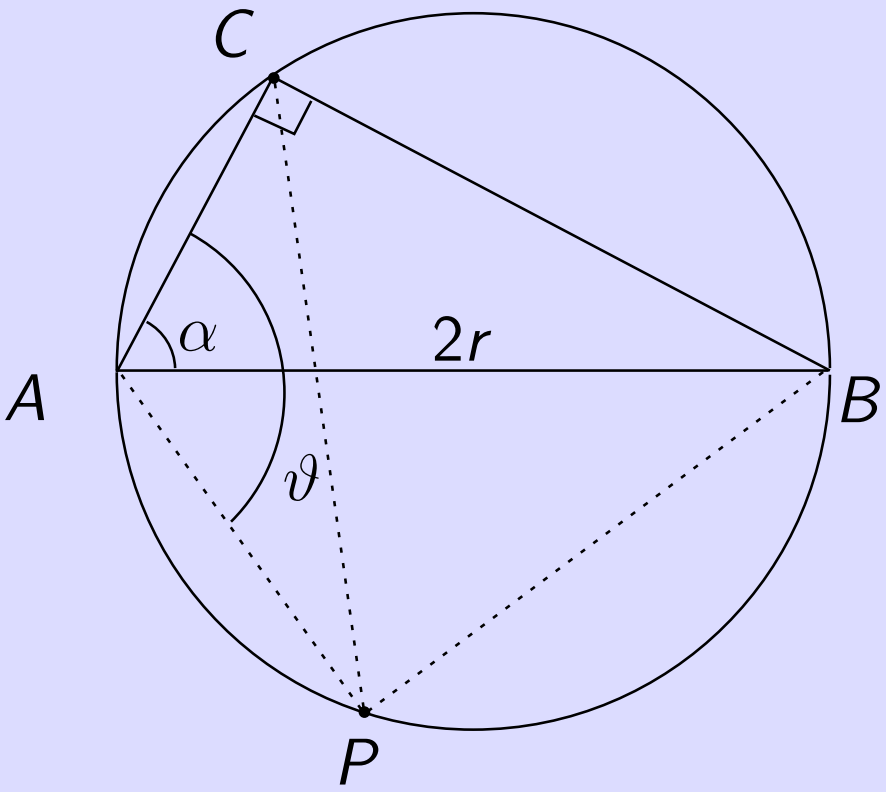
$$1 - \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Quindi i cateti valgono

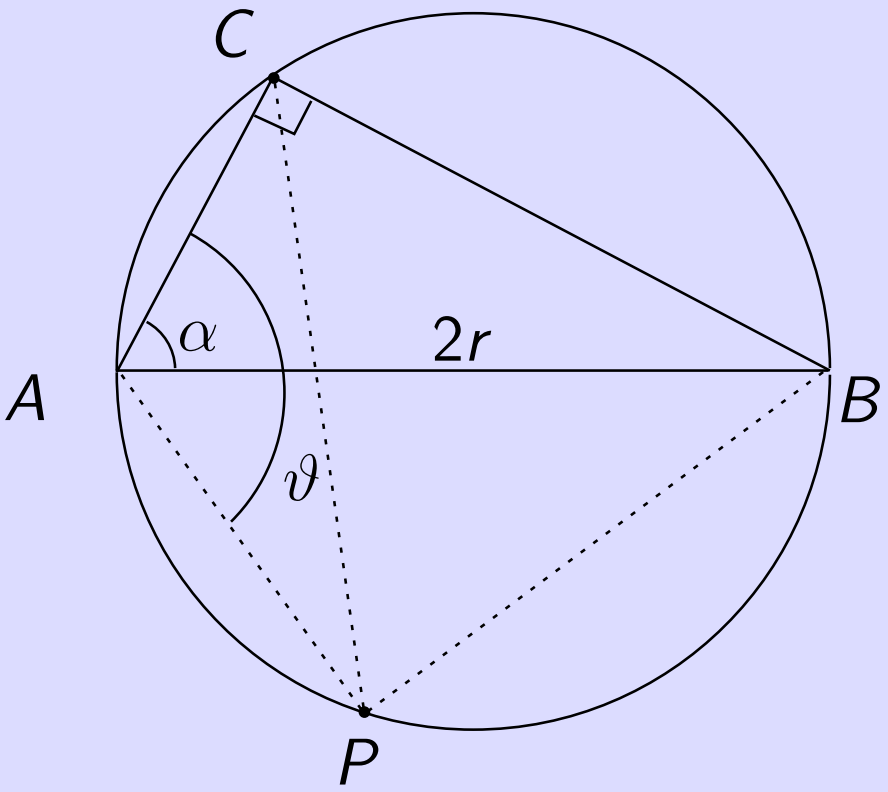
$$\overline{AC} = 2r\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}r, \qquad \overline{CB} = 2r\operatorname{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{5}r.$$

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Risoluzione del punto (b)

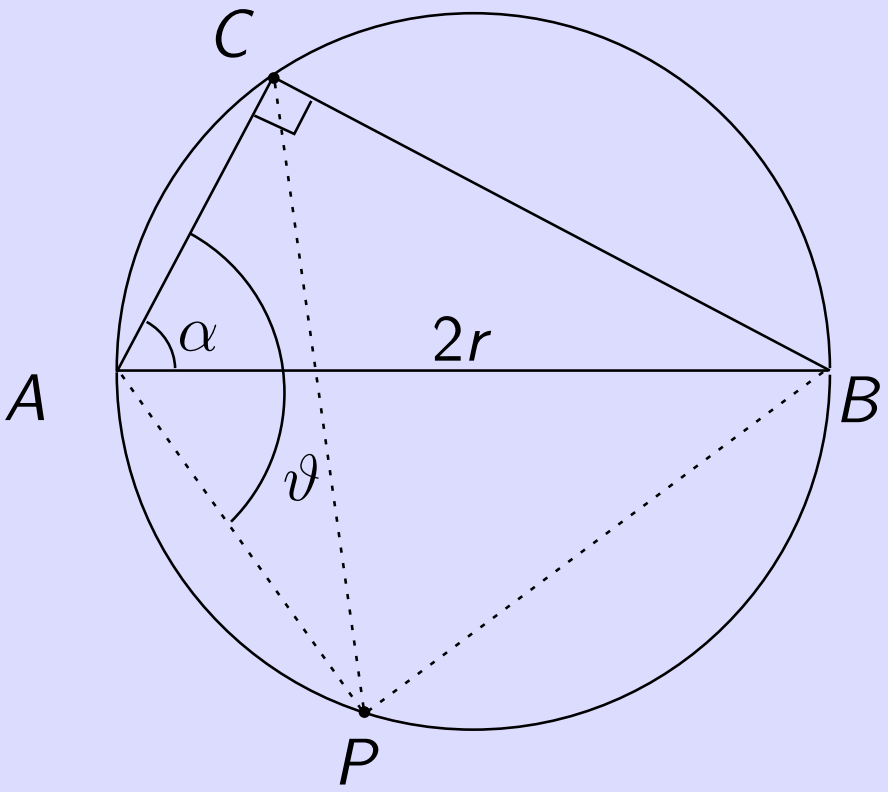


Risoluzione del punto (b)



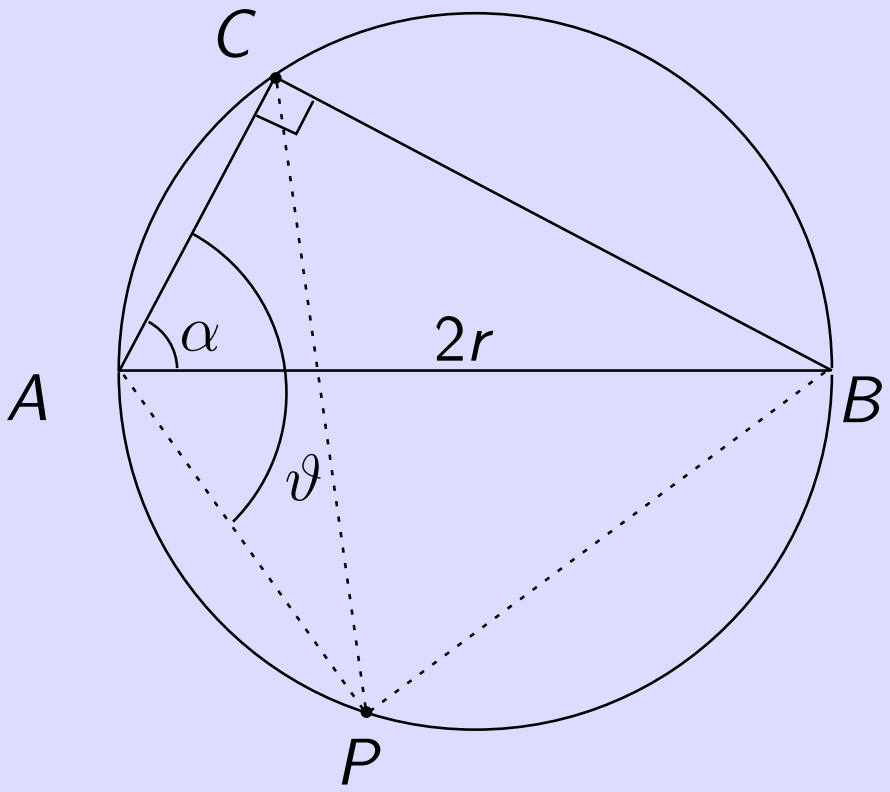
L'incognita stavolta è ϑ e, come si vede dal disegno, si ha $\alpha \leq \vartheta \leq \alpha + 90°$.

Risoluzione del punto (b)



L'incognita stavolta è ϑ e, come si vede dal disegno, si ha $\alpha \leq \vartheta \leq \alpha + 90°$. Dobbiamo trovare $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$ in funzione di ϑ.

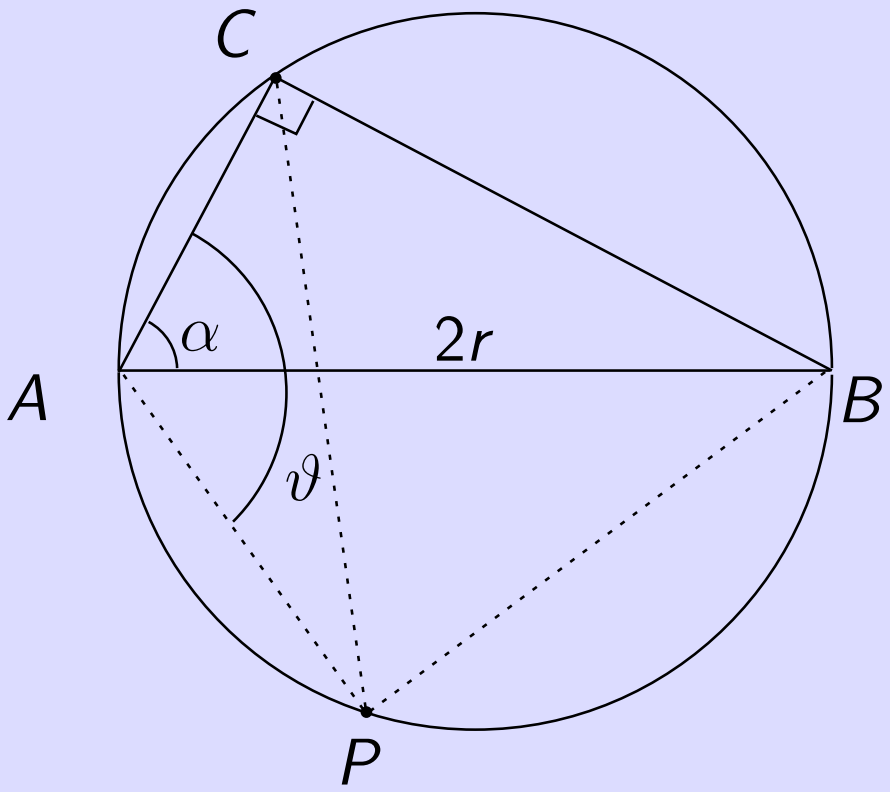
Risoluzione del punto (b)



L'incognita stavolta è ϑ e, come si vede dal disegno, si ha $\alpha \leq \vartheta \leq \alpha + 90°$. Dobbiamo trovare $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$ in funzione di ϑ.

Osserviamo che il triangolo APB è retto in P essendo inscritto in una semicirconferenza, e l'angolo $P\widehat{A}B$ vale $\vartheta - \alpha$.

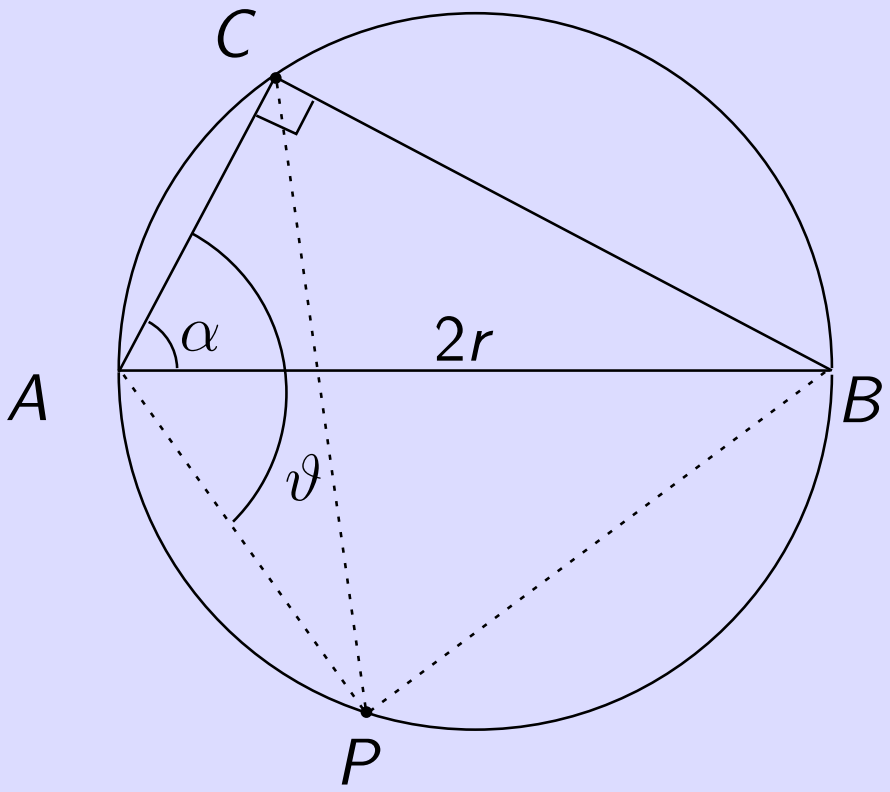
Risoluzione del punto (b)



L'incognita stavolta è ϑ e, come si vede dal disegno, si ha $\alpha \leq \vartheta \leq \alpha + 90°$. Dobbiamo trovare $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$ in funzione di ϑ.

Osserviamo che il triangolo APB è retto in P essendo inscritto in una semicirconferenza, e l'angolo $P\widehat{A}B$ vale $\vartheta - \alpha$.
Quindi si ha $\overline{PB} = 2r \operatorname{sen}(\vartheta - \alpha)$ e $\overline{PA} = 2r \cos(\vartheta - \alpha)$.

Risoluzione del punto (b)



L'incognita stavolta è ϑ e, come si vede dal disegno, si ha $\alpha \leq \vartheta \leq \alpha + 90°$. Dobbiamo trovare $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$ in funzione di ϑ.

Osserviamo che il triangolo APB è retto in P essendo inscritto in una semicirconferenza, e l'angolo $P\widehat{A}B$ vale $\vartheta - \alpha$.
Quindi si ha $\overline{PB} = 2r \operatorname{sen}(\vartheta - \alpha)$ e $\overline{PA} = 2r \cos(\vartheta - \alpha)$.
Inoltre, dal Teorema della corda, $\overline{CP} = 2r \operatorname{sen} \vartheta$.

Risoluzione del punto (b)

Ricordiamo che vogliamo esprimere il rapporto

$$R(x) = \frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2}$$

dove $x = \operatorname{ctg} \vartheta$.

Risoluzione del punto (b)

Ricordiamo che vogliamo esprimere il rapporto

$$R(x) = \frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2}$$

dove $x = \operatorname{ctg} \vartheta$.
Dalla formula di addizione si ha

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2 &= 4r^2(\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha - \cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha)^2 \\ &= 4r^2(\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\alpha + \cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha\cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha)\end{aligned}$$

Risoluzione del punto (b)

Ricordiamo che vogliamo esprimere il rapporto

$$R(x) = \frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2}$$

dove $x = \operatorname{ctg}\vartheta$.
Dalla formula di addizione si ha

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2 &= 4r^2(\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha - \cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha)^2\\ &= 4r^2(\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\alpha + \cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha\cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha)\end{aligned}$$

e ricordando che $\cos\alpha = \sqrt{5}/5$ e $\operatorname{sen}\alpha = 2\sqrt{5}/5$ si ottiene

$$\overline{PB}^2 = \frac{4}{5}r^2(\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta - 4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta).$$

Risoluzione del punto (b)

Quindi

$$\frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2} = \frac{16r^2 - 16r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{4r^2(\operatorname{sen}^2 \vartheta + 4\cos^2 \vartheta - 4 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta) + 12r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

Risoluzione del punto (b)

Quindi

$$\frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2} = \frac{16r^2 - 16r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{4r^2(\operatorname{sen}^2 \vartheta + 4\cos^2 \vartheta - 4 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta) + 12r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

$$= \frac{4 - 4 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta + 4\cos^2 \vartheta - 4 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + 3 \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Risoluzione del punto (b)

Quindi

$$\frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2} = \frac{16r^2 - 16r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{4r^2(\operatorname{sen}^2 \vartheta + 4\cos^2 \vartheta - 4 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta) + 12r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

$$= \frac{4 - 4\operatorname{sen}^2 \vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta + 4\cos^2 \vartheta - 4 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + 3 \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

$$= \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}.$$

Risoluzione del punto (b)

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2} &= \frac{16r^2 - 16r^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}{4r^2(\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta - 4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) + 12r^2\operatorname{sen}^2\vartheta} \\ &= \frac{4 - 4\operatorname{sen}^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta - 4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + 3\operatorname{sen}^2\vartheta} \\ &= \frac{\cos^2\vartheta}{1 - \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}.\end{aligned}$$

Se ora dividiamo numeratore e denominatore per $\operatorname{sen}^2\vartheta$ e ricordiamo che $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\vartheta$, otteniamo

Risoluzione del punto (b)

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2} &= \frac{16r^2 - 16r^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}{4r^2(\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta - 4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) + 12r^2\operatorname{sen}^2\vartheta} \\ &= \frac{4 - 4\operatorname{sen}^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta - 4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + 3\operatorname{sen}^2\vartheta} \\ &= \frac{\cos^2\vartheta}{1 - \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}.\end{aligned}$$

Se ora dividiamo numeratore e denominatore per $\operatorname{sen}^2\vartheta$ e ricordiamo che $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\vartheta$, otteniamo

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\vartheta}{1 + \operatorname{ctg}^2\vartheta - \operatorname{ctg}\vartheta}$$

Risoluzione del punto (b)

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{4\overline{AB}^2 - 4\overline{CP}^2}{5\overline{PB}^2 + 3\overline{CP}^2} &= \frac{16r^2 - 16r^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}{4r^2(\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta - 4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) + 12r^2\operatorname{sen}^2\vartheta} \\ &= \frac{4 - 4\operatorname{sen}^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta - 4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + 3\operatorname{sen}^2\vartheta} \\ &= \frac{\cos^2\vartheta}{1 - \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}.\end{aligned}$$

Se ora dividiamo numeratore e denominatore per $\operatorname{sen}^2\vartheta$ e ricordiamo che $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\vartheta$, otteniamo

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\vartheta}{1 + \operatorname{ctg}^2\vartheta - \operatorname{ctg}\vartheta}$$

quindi si ha

$$R(x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}.$$

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA