

Operazioni sui numeri complessi

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Prerequisiti

In questa lezione vedremo che sui numeri complessi si possono eseguire molte operazioni, e impareremo il significato geometrico di alcune di queste.

Prerequisiti

In questa lezione vedremo che sui numeri complessi si possono eseguire molte operazioni, e impareremo il significato geometrico di alcune di queste.

Procedendo, dobbiamo dare per scontato che si sappia cosa sia un numero complesso e quali sono le proprietà essenziali dell'unità immaginaria i :

Prerequisiti

In questa lezione vedremo che sui numeri complessi si possono eseguire molte operazioni, e impareremo il significato geometrico di alcune di queste.

Procedendo, dobbiamo dare per scontato che si sappia cosa sia un numero complesso e quali sono le proprietà essenziali dell'unità immaginaria i :

- un numero complesso è una combinazione della forma

$$a + ib$$

dove a, b sono numeri reali e i è detta **unità immaginaria**;

Prerequisiti

In questa lezione vedremo che sui numeri complessi si possono eseguire molte operazioni, e impareremo il significato geometrico di alcune di queste.

Procedendo, dobbiamo dare per scontato che si sappia cosa sia un numero complesso e quali sono le proprietà essenziali dell'unità immaginaria i :

- un numero complesso è una combinazione della forma

$$a + ib$$

dove a, b sono numeri reali e i è detta **unità immaginaria**;

- la proprietà che definisce l'unità immaginaria è

$$i^2 = -1$$

che evidentemente non può essere soddisfatta da nessun numero reale;

Prerequisiti

In questa lezione vedremo che sui numeri complessi si possono eseguire molte operazioni, e impareremo il significato geometrico di alcune di queste.

Procedendo, dobbiamo dare per scontato che si sappia cosa sia un numero complesso e quali sono le proprietà essenziali dell'unità immaginaria i :

- un numero complesso è una combinazione della forma

$$a + ib$$

dove a, b sono numeri reali e i è detta **unità immaginaria**;

- la proprietà che definisce l'unità immaginaria è

$$i^2 = -1$$

che evidentemente non può essere soddisfatta da nessun numero reale;

- i numeri reali sono visti come particolari numeri complessi, in cui $b = 0$;

Prerequisiti

In questa lezione vedremo che sui numeri complessi si possono eseguire molte operazioni, e impareremo il significato geometrico di alcune di queste.

Procedendo, dobbiamo dare per scontato che si sappia cosa sia un numero complesso e quali sono le proprietà essenziali dell'unità immaginaria i :

- un numero complesso è una combinazione della forma

$$a + ib$$

dove a, b sono numeri reali e i è detta **unità immaginaria**;

- la proprietà che definisce l'unità immaginaria è

$$i^2 = -1$$

che evidentemente non può essere soddisfatta da nessun numero reale;

- i numeri reali sono visti come particolari numeri complessi, in cui $b = 0$;
- l'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$.

Prime operazioni sui numeri complessi

Addizione e moltiplicazione

Addizione. È facile definire la *somma* di due numeri complessi:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d).$$

Prime operazioni sui numeri complessi

Addizione e moltiplicazione

Addizione. È facile definire la *somma* di due numeri complessi:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d).$$

Ricordando che a è detta la **parte reale** e b la **parte immaginaria**, per sommare due numeri complessi basta sommare tra loro le parti reali e poi tra loro le parti immaginarie. Questa operazione è ovviamente associativa e commutativa.

Prime operazioni sui numeri complessi

Addizione e moltiplicazione

Addizione. È facile definire la *somma* di due numeri complessi:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d).$$

Ricordando che a è detta la **parte reale** e b la **parte immaginaria**, per sommare due numeri complessi basta sommare tra loro le parti reali e poi tra loro le parti immaginarie. Questa operazione è ovviamente associativa e commutativa.

Moltiplicazione. Questa invece sembra un po' più complicata:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Prime operazioni sui numeri complessi

Addizione e moltiplicazione

Addizione. È facile definire la *somma* di due numeri complessi:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d).$$

Ricordando che a è detta la **parte reale** e b la **parte immaginaria**, per sommare due numeri complessi basta sommare tra loro le parti reali e poi tra loro le parti immaginarie. Questa operazione è ovviamente associativa e commutativa.

Moltiplicazione. Questa invece sembra un po' più complicata:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Per ricordarla, basta pensare che $a + ib$ e $c + id$ siano due polinomi di primo grado nell'incognita i , ed eseguire l'usuale prodotto di polinomi, tenendo conto che $i^2 = -1$.

Si può verificare che anche la moltiplicazione di numeri complessi è associativa e commutativa (basta ricondurla alle medesime proprietà per la moltiplicazione di polinomi).

Si può verificare che anche la moltiplicazione di numeri complessi è associativa e commutativa (basta ricondurla alle medesime proprietà per la moltiplicazione di polinomi).

È anche facile vedere che il numero complesso $1 + i0$, che poi è il numero reale 1, è l'**elemento neutro** per la moltiplicazione, poiché

$$(a + ib) \cdot (1 + i0) = a + ib.$$

Si può verificare che anche la moltiplicazione di numeri complessi è associativa e commutativa (basta ricondurla alle medesime proprietà per la moltiplicazione di polinomi).

È anche facile vedere che il numero complesso $1 + i0$, che poi è il numero reale 1, è l'**elemento neutro** per la moltiplicazione, poiché

$$(a + ib) \cdot (1 + i0) = a + ib.$$

Inoltre vale un altro fatto molto importante: ogni numero complesso non nullo ammette **elemento inverso** per la moltiplicazione, cioè per ogni $a + ib$ esiste $c + id$ tale che

$$(a + ib) \cdot (c + id) = 1.$$

Si può verificare che anche la moltiplicazione di numeri complessi è associativa e commutativa (basta ricondurla alle medesime proprietà per la moltiplicazione di polinomi).

È anche facile vedere che il numero complesso $1 + i0$, che poi è il numero reale 1, è l'**elemento neutro** per la moltiplicazione, poiché

$$(a + ib) \cdot (1 + i0) = a + ib.$$

Inoltre vale un altro fatto molto importante: ogni numero complesso non nullo ammette **elemento inverso** per la moltiplicazione, cioè per ogni $a + ib$ esiste $c + id$ tale che

$$(a + ib) \cdot (c + id) = 1.$$

Infine, come per i numeri reali, anche in $\mathbb{C}$ vale la proprietà **distributiva**:

$$\left[(a + ib) + (c + id) \right] \cdot (d + ie) = \left[(a + ib) \cdot (d + ie) \right] + \left[(c + id) \cdot (d + ie) \right].$$

Si può verificare che anche la moltiplicazione di numeri complessi è associativa e commutativa (basta ricondurla alle medesime proprietà per la moltiplicazione di polinomi).

È anche facile vedere che il numero complesso $1 + i0$, che poi è il numero reale 1, è l'**elemento neutro** per la moltiplicazione, poiché

$$(a + ib) \cdot (1 + i0) = a + ib.$$

Inoltre vale un altro fatto molto importante: ogni numero complesso non nullo ammette **elemento inverso** per la moltiplicazione, cioè per ogni $a + ib$ esiste $c + id$ tale che

$$(a + ib) \cdot (c + id) = 1.$$

Infine, come per i numeri reali, anche in $\mathbb{C}$ vale la proprietà **distributiva**:

$$\left[(a + ib) + (c + id) \right] \cdot (d + ie) = \left[(a + ib) \cdot (d + ie) \right] + \left[(c + id) \cdot (d + ie) \right].$$

Si dice allora che $\mathbb{C}$ è un **campo** (ovviamente anche $\mathbb{R}$ lo è).

Approfondimento: il campo

La struttura matematica di **campo** è definita dalle seguenti proprietà:

Approfondimento: il campo

La struttura matematica di **campo** è definita dalle seguenti proprietà:

① esiste un'operazione “+” associativa e commutativa tale che

- ▶ esiste l'elemento neutro, indicato con 0, tale che

$$0 + a = a \quad \text{per ogni } a$$

- ▶ per ogni a esiste l'elemento inverso, indicato con $-a$, tale che

$$a + (-a) = 0$$

Approfondimento: il campo

La struttura matematica di **campo** è definita dalle seguenti proprietà:

① esiste un'operazione “+” associativa e commutativa tale che

- ▶ esiste l'elemento neutro, indicato con 0, tale che

$$0 + a = a \quad \text{per ogni } a$$

- ▶ per ogni a esiste l'elemento inverso, indicato con $-a$, tale che

$$a + (-a) = 0$$

② esiste un'operazione “.” associativa e commutativa tale che

- ▶ esiste l'elemento neutro, indicato con 1, tale che

$$1 \cdot a = a \quad \text{per ogni } a$$

- ▶ per ogni $a \neq 0$ esiste l'elemento inverso, indicato con a^{-1} , tale che

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Approfondimento: il campo

La struttura matematica di **campo** è definita dalle seguenti proprietà:

① esiste un'operazione “+” associativa e commutativa tale che

- ▶ esiste l'elemento neutro, indicato con 0, tale che

$$0 + a = a \quad \text{per ogni } a$$

- ▶ per ogni a esiste l'elemento inverso, indicato con $-a$, tale che

$$a + (-a) = 0$$

② esiste un'operazione “.” associativa e commutativa tale che

- ▶ esiste l'elemento neutro, indicato con 1, tale che

$$1 \cdot a = a \quad \text{per ogni } a$$

- ▶ per ogni $a \neq 0$ esiste l'elemento inverso, indicato con a^{-1} , tale che

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

③ vale la proprietà distributiva

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

La struttura di campo è fondamentale per definire alcuni enti matematici importanti, come i polinomi o gli spazi vettoriali.

La struttura di campo è fondamentale per definire alcuni enti matematici importanti, come i polinomi o gli spazi vettoriali.

Si può verificare che sono dei campi sia $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, che $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali, con le solite operazioni di somma e prodotto.

La struttura di campo è fondamentale per definire alcuni enti matematici importanti, come i polinomi o gli spazi vettoriali.

Si può verificare che sono dei campi sia $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, che $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali, con le solite operazioni di somma e prodotto.

E abbiamo appena detto che anche $\mathbb{C}$ è un campo, con le operazioni che abbiamo introdotto.

La struttura di campo è fondamentale per definire alcuni enti matematici importanti, come i polinomi o gli spazi vettoriali.

Si può verificare che sono dei campi sia $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, che $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali, con le solite operazioni di somma e prodotto.

E abbiamo appena detto che anche $\mathbb{C}$ è un campo, con le operazioni che abbiamo introdotto.

Esistono poi molti altri esempi di campi, tra cui, molto importanti, ad esempio per la crittografia, i campi finiti (cioè fatti da un numero finito di elementi), denotati con $\mathbb{Z}_p$.

La struttura di campo è fondamentale per definire alcuni enti matematici importanti, come i polinomi o gli spazi vettoriali.

Si può verificare che sono dei campi sia $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, che $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali, con le solite operazioni di somma e prodotto.

E abbiamo appena detto che anche $\mathbb{C}$ è un campo, con le operazioni che abbiamo introdotto.

Esistono poi molti altri esempi di campi, tra cui, molto importanti, ad esempio per la crittografia, i campi finiti (cioè fatti da un numero finito di elementi), denotati con $\mathbb{Z}_p$.

Non è invece un campo, ad esempio, l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, perché non tutti i suoi elementi hanno inverso rispetto alla moltiplicazione: l'inverso di 2 non è un numero intero.

Inverso

Abbiamo appena detto che ogni numero complesso non nullo ammette l'elemento inverso per la moltiplicazione: come facciamo a trovarlo?

Inverso

Abbiamo appena detto che ogni numero complesso non nullo ammette l'elemento inverso per la moltiplicazione: come facciamo a trovarlo?

Partiamo con un esempio semplice: vogliamo trovare l'inverso di $1 + i$.

Inverso

Abbiamo appena detto che ogni numero complesso non nullo ammette l'elemento inverso per la moltiplicazione: come facciamo a trovarlo?

Partiamo con un esempio semplice: vogliamo trovare l'inverso di $1 + i$.

Un modo è quello di considerare un numero complesso incognito $x + iy$ che soddisfi

$$(1 + i) \cdot (x + iy) = 1$$

(dove ricordiamo che 1 vuol dire $1 + i0$).

Inverso

Abbiamo appena detto che ogni numero complesso non nullo ammette l'elemento inverso per la moltiplicazione: come facciamo a trovarlo?

Partiamo con un esempio semplice: vogliamo trovare l'inverso di $1 + i$.

Un modo è quello di considerare un numero complesso incognito $x + iy$ che soddisfi

$$(1 + i) \cdot (x + iy) = 1$$

(dove ricordiamo che 1 vuol dire $1 + i0$).

Svolgendo i conti troviamo

$$1 = (1 + i) \cdot (x + iy) = x - y + i(x + y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Inverso

Abbiamo appena detto che ogni numero complesso non nullo ammette l'elemento inverso per la moltiplicazione: come facciamo a trovarlo?

Partiamo con un esempio semplice: vogliamo trovare l'inverso di $1 + i$.

Un modo è quello di considerare un numero complesso incognito $x + iy$ che soddisfi

$$(1 + i) \cdot (x + iy) = 1$$

(dove ricordiamo che 1 vuol dire $1 + i0$).

Svolgendo i conti troviamo

$$1 = (1 + i) \cdot (x + iy) = x - y + i(x + y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Il sistema si risolve facilmente e dà $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

Inverso

Abbiamo appena detto che ogni numero complesso non nullo ammette l'elemento inverso per la moltiplicazione: come facciamo a trovarlo?

Partiamo con un esempio semplice: vogliamo trovare l'inverso di $1 + i$.

Un modo è quello di considerare un numero complesso incognito $x + iy$ che soddisfi

$$(1 + i) \cdot (x + iy) = 1$$

(dove ricordiamo che 1 vuol dire $1 + i0$).

Svolgendo i conti troviamo

$$1 = (1 + i) \cdot (x + iy) = x - y + i(x + y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Il sistema si risolve facilmente e dà $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

Quindi l'inverso di $1 + i$ è il numero complesso $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, ovvero

$$(1 + i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Razionalizzazione

Un modo più pratico per trovare l'inverso è quello di procedere per **razionalizzazione**: se ricordiamo che, almeno tra virgolette, “ $i = \sqrt{-1}$ ”, allora potremmo scrivere

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\sqrt{-1}}.$$

Razionalizzazione

Un modo più pratico per trovare l'inverso è quello di procedere per **razionalizzazione**: se ricordiamo che, almeno tra virgolette, “ $i = \sqrt{-1}$ ”, allora potremmo scrivere

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\sqrt{-1}}.$$

In questo caso procederemmo per razionalizzazione, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - \sqrt{-1}$.

Razionalizzazione

Un modo più pratico per trovare l'inverso è quello di procedere per **razionalizzazione**: se ricordiamo che, almeno tra virgolette, “ $i = \sqrt{-1}$ ”, allora potremmo scrivere

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\sqrt{-1}}.$$

In questo caso procederemmo per razionalizzazione, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - \sqrt{-1}$.

Allora facciamo lo stesso col numero complesso, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - i$:

$$\frac{1}{1+i} =$$

Razionalizzazione

Un modo più pratico per trovare l'inverso è quello di procedere per **razionalizzazione**: se ricordiamo che, almeno tra virgolette, " $i = \sqrt{-1}$ ", allora potremmo scrivere

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\sqrt{-1}}.$$

In questo caso procederemmo per razionalizzazione, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - \sqrt{-1}$.

Allora facciamo lo stesso col numero complesso, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - i$:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} =$$

Razionalizzazione

Un modo più pratico per trovare l'inverso è quello di procedere per **razionalizzazione**: se ricordiamo che, almeno tra virgolette, “ $i = \sqrt{-1}$ ”, allora potremmo scrivere

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\sqrt{-1}}.$$

In questo caso procederemmo per razionalizzazione, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - \sqrt{-1}$.

Allora facciamo lo stesso col numero complesso, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - i$:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i^2} =$$

Razionalizzazione

Un modo più pratico per trovare l'inverso è quello di procedere per **razionalizzazione**: se ricordiamo che, almeno tra virgolette, " $i = \sqrt{-1}$ ", allora potremmo scrivere

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\sqrt{-1}}.$$

In questo caso procederemmo per razionalizzazione, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - \sqrt{-1}$.

Allora facciamo lo stesso col numero complesso, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - i$:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1+1} =$$

Razionalizzazione

Un modo più pratico per trovare l'inverso è quello di procedere per **razionalizzazione**: se ricordiamo che, almeno tra virgolette, " $i = \sqrt{-1}$ ", allora potremmo scrivere

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+\sqrt{-1}}.$$

In questo caso procederemmo per razionalizzazione, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - \sqrt{-1}$.

Allora facciamo lo stesso col numero complesso, moltiplicando e dividendo tutto per $1 - i$:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Quoziente

In questo modo possiamo facilmente calcolare il **quoziente** di due numeri complessi. Ad esempio, calcoliamo il quoziente tra $2 - 3i$ e $1 + 2i$:

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} =$$

Quoziente

In questo modo possiamo facilmente calcolare il **quoziente** di due numeri complessi. Ad esempio, calcoliamo il quoziente tra $2 - 3i$ e $1 + 2i$:

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} =$$

Quoziente

In questo modo possiamo facilmente calcolare il **quoziente** di due numeri complessi. Ad esempio, calcoliamo il quoziente tra $2 - 3i$ e $1 + 2i$:

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 6 + (-3 - 4)i}{1 - 4i^2} =$$

Quoziente

In questo modo possiamo facilmente calcolare il **quoziente** di due numeri complessi. Ad esempio, calcoliamo il quoziente tra $2 - 3i$ e $1 + 2i$:

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 6 + (-3 - 4)i}{1 - 4i^2} = \frac{-4 - 7i}{1 + 4} =$$

Quoziente

In questo modo possiamo facilmente calcolare il **quoziente** di due numeri complessi. Ad esempio, calcoliamo il quoziente tra $2 - 3i$ e $1 + 2i$:

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 6 + (-3 - 4)i}{1 - 4i^2} = \frac{-4 - 7i}{1 + 4} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Quoziente

In questo modo possiamo facilmente calcolare il **quoziente** di due numeri complessi. Ad esempio, calcoliamo il quoziente tra $2 - 3i$ e $1 + 2i$:

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 6 + (-3 - 4)i}{1 - 4i^2} = \frac{-4 - 7i}{1 + 4} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Possiamo anche vedere cosa succede a dividere un numero reale per i : se $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{a}{i} = \frac{a}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{ai}{i^2} = -ai,$$

quindi dividere un numero per i vuol dire moltiplicarlo per $-i$: ovvero, l'inverso di i è $-i$.

Quoziente

In questo modo possiamo facilmente calcolare il **quoziente** di due numeri complessi. Ad esempio, calcoliamo il quoziente tra $2 - 3i$ e $1 + 2i$:

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 6 + (-3 - 4)i}{1 - 4i^2} = \frac{-4 - 7i}{1 + 4} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Possiamo anche vedere cosa succede a dividere un numero reale per i : se $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{a}{i} = \frac{a}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{ai}{i^2} = -ai,$$

quindi dividere un numero per i vuol dire moltiplicarlo per $-i$: ovvero, l'inverso di i è $-i$.

Se invece il quoziente è tra due numeri reali, non c'è nessun problema e si procede come al solito.

Il piano di Gauss

In un'altra lezione abbiamo già visto che i numeri complessi possono essere rappresentati su un piano, prendendo la parte reale come ascissa e la parte immaginaria come ordinata.

Il piano di Gauss

In un'altra lezione abbiamo già visto che i numeri complessi possono essere rappresentati su un piano, prendendo la parte reale come ascissa e la parte immaginaria come ordinata.

Se invece di scegliere ascissa e ordinata, si scelgono le coordinate polari, cioè la distanza dall'origine e l'angolo formato con l'asse x , si ottiene la **forma trigonometrica** di un numero complesso:

$$r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta}.$$

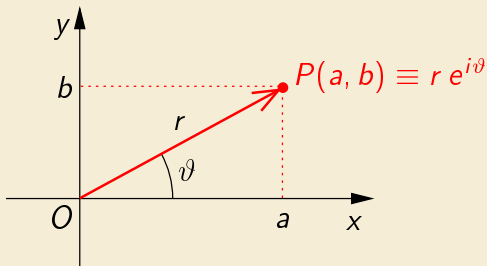
Il piano di Gauss

In un'altra lezione abbiamo già visto che i numeri complessi possono essere rappresentati su un piano, prendendo la parte reale come ascissa e la parte immaginaria come ordinata.

Se invece di scegliere ascissa e ordinata, si scelgono le coordinate polari, cioè la distanza dall'origine e l'angolo formato con l'asse x , si ottiene la **forma trigonometrica** di un numero complesso:

$$r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta}.$$

L'ultima scrittura viene anche detta **forma esponenziale**.



Potenza di esponente intero

Se si sa fare il prodotto di due numeri complessi, allora si può fare anche l'elevamento a potenza quando l'esponente è intero: basta ripetere la moltiplicazione un certo numero di volte.

Potenza di esponente intero

Se si sa fare il prodotto di due numeri complessi, allora si può fare anche l'elevamento a potenza quando l'esponente è intero: basta ripetere la moltiplicazione un certo numero di volte.

Ma in questo modo i conti diventano subito troppo noiosi. Pensate di dover calcolare, ad esempio, $(1 + i)^{10}$...

Potenza di esponente intero

Se si sa fare il prodotto di due numeri complessi, allora si può fare anche l'elevamento a potenza quando l'esponente è intero: basta ripetere la moltiplicazione un certo numero di volte.

Ma in questo modo i conti diventano subito troppo noiosi. Pensate di dover calcolare, ad esempio, $(1 + i)^{10}$...

Un'alternativa è quella di usare il triangolo di Tartaglia: in fondo, trovare la potenza di un numero complesso assomiglia molto a trovare la potenza di un binomio. Ma anche in questo modo, se l'esponente è alto, ci si perde subito nei conti.

Potenza di esponente intero

Se si sa fare il prodotto di due numeri complessi, allora si può fare anche l'elevamento a potenza quando l'esponente è intero: basta ripetere la moltiplicazione un certo numero di volte.

Ma in questo modo i conti diventano subito troppo noiosi. Pensate di dover calcolare, ad esempio, $(1 + i)^{10} \dots$

Un'alternativa è quella di usare il triangolo di Tartaglia: in fondo, trovare la potenza di un numero complesso assomiglia molto a trovare la potenza di un binomio. Ma anche in questo modo, se l'esponente è alto, ci si perde subito nei conti.

Per fare meno conti, ci aiuta la forma esponenziale: se siamo capaci di scrivere il numero nella forma $r e^{i\vartheta}$ non avremo nessun problema a calcolare

$$(r e^{i\vartheta})^n =$$

Potenza di esponente intero

Se si sa fare il prodotto di due numeri complessi, allora si può fare anche l'elevamento a potenza quando l'esponente è intero: basta ripetere la moltiplicazione un certo numero di volte.

Ma in questo modo i conti diventano subito troppo noiosi. Pensate di dover calcolare, ad esempio, $(1 + i)^{10}$...

Un'alternativa è quella di usare il triangolo di Tartaglia: in fondo, trovare la potenza di un numero complesso assomiglia molto a trovare la potenza di un binomio. Ma anche in questo modo, se l'esponente è alto, ci si perde subito nei conti.

Per fare meno conti, ci aiuta la forma esponenziale: se siamo capaci di scrivere il numero nella forma $r e^{i\vartheta}$ non avremo nessun problema a calcolare

$$(r e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta} =$$

Potenza di esponente intero

Se si sa fare il prodotto di due numeri complessi, allora si può fare anche l'elevamento a potenza quando l'esponente è intero: basta ripetere la moltiplicazione un certo numero di volte.

Ma in questo modo i conti diventano subito troppo noiosi. Pensate di dover calcolare, ad esempio, $(1 + i)^{10} \dots$

Un'alternativa è quella di usare il triangolo di Tartaglia: in fondo, trovare la potenza di un numero complesso assomiglia molto a trovare la potenza di un binomio. Ma anche in questo modo, se l'esponente è alto, ci si perde subito nei conti.

Per fare meno conti, ci aiuta la forma esponenziale: se siamo capaci di scrivere il numero nella forma $r e^{i\vartheta}$ non avremo nessun problema a calcolare

$$(r e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta} = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)).$$

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss.

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Quindi si ha

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Quindi si ha

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ora possiamo calcolare la potenza:

$$(1 + i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i 10 \frac{\pi}{4}} =$$

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Quindi si ha

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ora possiamo calcolare la potenza:

$$(1 + i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i 10 \frac{\pi}{4}} = 2^5 e^{i \frac{5}{2} \pi} =$$

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Quindi si ha

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ora possiamo calcolare la potenza:

$$(1 + i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i 10 \frac{\pi}{4}} = 2^5 e^{i \frac{5}{2} \pi} = 32 e^{i \frac{\pi}{2}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'angolo può essere considerato solo in $[0; 2\pi[$.

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Quindi si ha

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ora possiamo calcolare la potenza:

$$(1 + i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i 10 \frac{\pi}{4}} = 2^5 e^{i \frac{5}{2} \pi} = 32 e^{i \frac{\pi}{2}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'angolo può essere considerato solo in $[0; 2\pi[$.

Se vogliamo riscrivere il numero in forma normale, non ci resta che fare

$$(1 + i)^{10} = 32 e^{i \frac{\pi}{2}} = 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i.$$

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Quindi si ha

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ora possiamo calcolare la potenza:

$$(1 + i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i 10 \frac{\pi}{4}} = 2^5 e^{i \frac{5}{2} \pi} = 32 e^{i \frac{\pi}{2}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'angolo può essere considerato solo in $[0; 2\pi[$.

Se vogliamo riscrivere il numero in forma normale, non ci resta che fare

$$(1 + i)^{10} = 32 e^{i \frac{\pi}{2}} = 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i.$$

Per esercizio, potete provare a calcolare $(1 - i)^{10}$.

Certo, resta il problema di scrivere il numero in forma esponenziale. Nel caso di $1 + i$ però le cose sono facili: il numero corrisponde al punto $(1, 1)$ nel piano di Gauss. Questo punto dista $\sqrt{2}$ dall'origine, quindi $r = \sqrt{2}$. Inoltre il segmento di estremi l'origine e il punto forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse x .

Quindi si ha

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ora possiamo calcolare la potenza:

$$(1 + i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i 10 \frac{\pi}{4}} = 2^5 e^{i \frac{5}{2} \pi} = 32 e^{i \frac{\pi}{2}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'angolo può essere considerato solo in $[0; 2\pi[$.

Se vogliamo riscrivere il numero in forma normale, non ci resta che fare

$$(1 + i)^{10} = 32 e^{i \frac{\pi}{2}} = 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i.$$

Per esercizio, potete provare a calcolare $(1 - i)^{10}$.

[risulta $-32i$]

Radice

Ora ci proponiamo di “invertire” l'operazione di elevamento a potenza, cioè vogliamo calcolare la **radice** di un numero complesso.

Radice

Ora ci proponiamo di “invertire” l'operazione di elevamento a potenza, cioè vogliamo calcolare la **radice** di un numero complesso.

Intenderemo come “radice n -esima” di un numero k ogni numero $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = k.$$

Radice

Ora ci proponiamo di “invertire” l'operazione di elevamento a potenza, cioè vogliamo calcolare la **radice** di un numero complesso.

Intenderemo come “radice n -esima” di un numero k ogni numero $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = k.$$

Proviamo a operare nello stesso modo visto per la potenza, scrivendo la radice n -esima come esponente $\frac{1}{n}$ e usando ancora la forma esponenziale del numero:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} =$$

Radice

Ora ci proponiamo di “invertire” l'operazione di elevamento a potenza, cioè vogliamo calcolare la **radice** di un numero complesso.

Intenderemo come “radice n -esima” di un numero k ogni numero $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = k.$$

Proviamo a operare nello stesso modo visto per la potenza, scrivendo la radice n -esima come esponente $\frac{1}{n}$ e usando ancora la forma esponenziale del numero:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} = \left(r e^{i\vartheta} \right)^{\frac{1}{n}} =$$

Radice

Ora ci proponiamo di “invertire” l'operazione di elevamento a potenza, cioè vogliamo calcolare la **radice** di un numero complesso.

Intenderemo come “radice n -esima” di un numero k ogni numero $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = k.$$

Proviamo a operare nello stesso modo visto per la potenza, scrivendo la radice n -esima come esponente $\frac{1}{n}$ e usando ancora la forma esponenziale del numero:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} = \left(r e^{i\vartheta} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\vartheta}{n}} =$$

Radice

Ora ci proponiamo di “invertire” l'operazione di elevamento a potenza, cioè vogliamo calcolare la **radice** di un numero complesso.

Intenderemo come “radice n -esima” di un numero k ogni numero $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = k.$$

Proviamo a operare nello stesso modo visto per la potenza, scrivendo la radice n -esima come esponente $\frac{1}{n}$ e usando ancora la forma esponenziale del numero:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} = \left(r e^{i\vartheta} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\vartheta}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\vartheta}{n} + i \sin \frac{\vartheta}{n} \right).$$

Radice

Ora ci proponiamo di “invertire” l'operazione di elevamento a potenza, cioè vogliamo calcolare la **radice** di un numero complesso.

Intenderemo come “radice n -esima” di un numero k ogni numero $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = k.$$

Proviamo a operare nello stesso modo visto per la potenza, scrivendo la radice n -esima come esponente $\frac{1}{n}$ e usando ancora la forma esponenziale del numero:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} = \left(r e^{i\vartheta} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\vartheta}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\vartheta}{n} + i \sin \frac{\vartheta}{n} \right).$$

Questa formula però dovrebbe far suonare un campanello d'allarme, perché stiamo *dividendo* un angolo per un numero intero, e questo causa dei problemi con la periodicità.

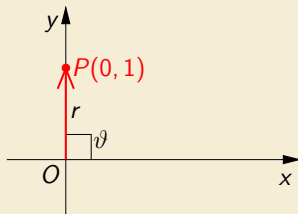
Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:

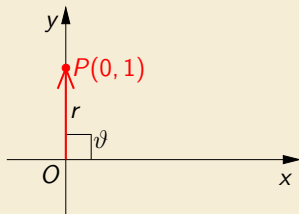
Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:



Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:

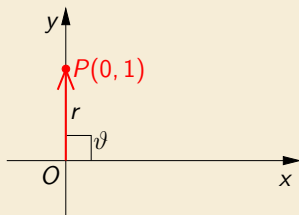


Dal disegno si vede subito che $r = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:



Dal disegno si vede subito che $r = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero

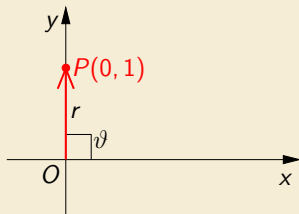
$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi possiamo procedere:

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:



Dal disegno si vede subito che $r = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero

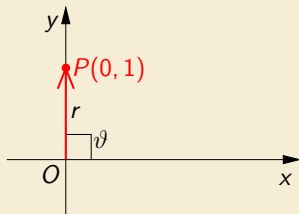
$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi possiamo procedere:

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}} =$$

Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:



Dal disegno si vede subito che $r = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero

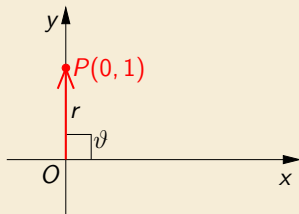
$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi possiamo procedere:

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:



Dal disegno si vede subito che $r = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi possiamo procedere:

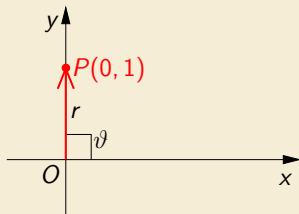
$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Ma per la periodicità dell'angolo si ha pure $i = e^{i\frac{5}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{5}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:



Dal disegno si vede subito che $r = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi possiamo procedere:

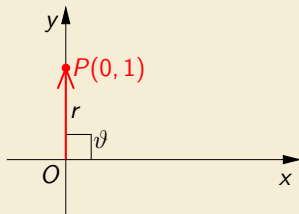
$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Ma per la periodicità dell'angolo si ha pure $i = e^{i\frac{5}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{5}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{5}{6}\pi} =$$

Facciamo un esempio semplice per capire meglio: calcoliamo $\sqrt[3]{i}$.

Per vedere come scrivere i in forma esponenziale, vediamo cosa succede nel piano di Gauss:



Dal disegno si vede subito che $r = 1$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi possiamo procedere:

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Ma per la periodicità dell'angolo si ha pure $i = e^{i\frac{5}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{5}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

E non è finita qui: sempre per la periodicità dell'angolo si ha $i = e^{i\frac{9}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{9}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

E non è finita qui: sempre per la periodicità dell'angolo si ha $i = e^{i\frac{9}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{9}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{3}{2}\pi} =$$

E non è finita qui: sempre per la periodicità dell'angolo si ha $i = e^{i\frac{9}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{9}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i.$$

E non è finita qui: sempre per la periodicità dell'angolo si ha $i = e^{i\frac{9}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{9}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i.$$

Quindi abbiamo trovato **tre** radici cubiche diverse per i :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -i.$$

E non è finita qui: sempre per la periodicità dell'angolo si ha $i = e^{i\frac{9}{2}\pi}$, da cui

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\frac{9}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i.$$

Quindi abbiamo trovato **tre** radici cubiche diverse per i :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -i.$$

Ce ne saranno altre?

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

$$i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se ora calcoliamo la radice cubica si ha

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} =$$

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se ora calcoliamo la radice cubica si ha

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi)} =$$

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se ora calcoliamo la radice cubica si ha

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right).$$

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

$$i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se ora calcoliamo la radice cubica si ha

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right).$$

È evidente che l'espressione ottenuta ha solamente tre valori diversi, scegliendo ad esempio $k = 0, 1, 2$, che poi tornano a ripetersi.

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se ora calcoliamo la radice cubica si ha

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right).$$

È evidente che l'espressione ottenuta ha solamente tre valori diversi, scegliendo ad esempio $k = 0, 1, 2$, che poi tornano a ripetersi.

Quindi si vede che ci sono esattamente tre radici cubiche distinte di i :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -i.$$

Molteplicità delle radici in $\mathbb{C}$

Proviamo a codificare la periodicità dell'angolo direttamente nella forma esponenziale:

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se ora calcoliamo la radice cubica si ha

$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right).$$

È evidente che l'espressione ottenuta ha solamente tre valori diversi, scegliendo ad esempio $k = 0, 1, 2$, che poi tornano a ripetersi.

Quindi si vede che ci sono esattamente tre radici cubiche distinte di i :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -i.$$

Questo fatto non è caratteristico solo dell'unità immaginaria i , ma di tutti i numeri complessi diversi da 0.

Abbiamo scoperto che

ogni numero complesso non nullo ammette sempre esattamente n radici n -esime diverse, cioè esistono sempre n soluzioni *distinte* dell'equazione

$$z^n = k.$$

Abbiamo scoperto che

ogni numero complesso non nullo ammette sempre esattamente n radici n -esime diverse, cioè esistono sempre n soluzioni *distinte* dell'equazione

$$z^n = k.$$

Quanto abbiamo trovato è un fatto generale, che distingue nettamente i numeri complessi da quelli reali.

Abbiamo scoperto che

ogni numero complesso non nullo ammette sempre esattamente n radici n -esime diverse, cioè esistono sempre n soluzioni *distinte* dell'equazione

$$z^n = k.$$

Quanto abbiamo trovato è un fatto generale, che distingue nettamente i numeri complessi da quelli reali.

Nel caso reale, infatti, capita che

- l'equazione $x^n = k$ non ammetta radici (n pari e k negativo)

Abbiamo scoperto che

ogni numero complesso non nullo ammette sempre esattamente n radici n -esime diverse, cioè esistono sempre n soluzioni *distinte* dell'equazione

$$z^n = k.$$

Quanto abbiamo trovato è un fatto generale, che distingue nettamente i numeri complessi da quelli reali.

Nel caso reale, infatti, capita che

- l'equazione $x^n = k$ non ammetta radici (n pari e k negativo)
- l'equazione $x^n = k$ ammetta esattamente una radice (n dispari)

Abbiamo scoperto che

ogni numero complesso non nullo ammette sempre esattamente n radici n -esime diverse, cioè esistono sempre n soluzioni *distinte* dell'equazione

$$z^n = k.$$

Quanto abbiamo trovato è un fatto generale, che distingue nettamente i numeri complessi da quelli reali.

Nel caso reale, infatti, capita che

- l'equazione $x^n = k$ non ammetta radici (n pari e k negativo)
- l'equazione $x^n = k$ ammetta esattamente una radice (n dispari)
- l'equazione $x^n = k$ ammetta due radici: (n pari e k positivo)

Abbiamo scoperto che

ogni numero complesso non nullo ammette sempre esattamente n radici n -esime diverse, cioè esistono sempre n soluzioni *distinte* dell'equazione

$$z^n = k.$$

Quanto abbiamo trovato è un fatto generale, che distingue nettamente i numeri complessi da quelli reali.

Nel caso reale, infatti, capita che

- l'equazione $x^n = k$ non ammetta radici (n pari e k negativo)
- l'equazione $x^n = k$ ammetta esattamente una radice (n dispari)
- l'equazione $x^n = k$ ammetta due radici: (n pari e k positivo)

Nel campo complesso, invece, ogni numero (tranne lo 0) ammette esattamente n radici di indice n , indipendentemente dal segno del numero o dalla parità dell'indice.

Abbiamo scoperto che

ogni numero complesso non nullo ammette sempre esattamente n radici n -esime diverse, cioè esistono sempre n soluzioni *distinte* dell'equazione

$$z^n = k.$$

Quanto abbiamo trovato è un fatto generale, che distingue nettamente i numeri complessi da quelli reali.

Nel caso reale, infatti, capita che

- l'equazione $x^n = k$ non ammetta radici (n pari e k negativo)
- l'equazione $x^n = k$ ammetta esattamente una radice (n dispari)
- l'equazione $x^n = k$ ammetta due radici: (n pari e k positivo)

Nel campo complesso, invece, ogni numero (tranne lo 0) ammette esattamente n radici di indice n , indipendentemente dal segno del numero o dalla parità dell'indice.

Si dice che la radice in $\mathbb{C}$ è una **funzione multivoca**, nel senso che è una funzione che ammette più valori (tecnicamente, non è neanche una funzione). Nel campo complesso si incontrano spesso queste “funzioni”.

Radici in campo complesso: formula generale

Quindi in generale per trovare la radice n -esima di un numero complesso lo metteremo in forma esponenziale, **tenendo conto della periodicità**, e poi eleveremo all'esponente $\frac{1}{n}$, in questo modo:

Radici in campo complesso: formula generale

Quindi in generale per trovare la radice n -esima di un numero complesso lo metteremo in forma esponenziale, **tenendo conto della periodicità**, e poi eleveremo all'esponente $\frac{1}{n}$, in questo modo:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} =$$

Radici in campo complesso: formula generale

Quindi in generale per trovare la radice n -esima di un numero complesso lo metteremo in forma esponenziale, **tenendo conto della periodicità**, e poi eleveremo all'esponente $\frac{1}{n}$, in questo modo:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} = \left(r e^{i(\vartheta+2k\pi)} \right)^{\frac{1}{n}} =$$

Radici in campo complesso: formula generale

Quindi in generale per trovare la radice n -esima di un numero complesso lo metteremo in forma esponenziale, **tenendo conto della periodicità**, e poi eleveremo all'esponente $\frac{1}{n}$, in questo modo:

$$\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} = \left(r e^{i(\vartheta+2k\pi)} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)} =$$

Radici in campo complesso: formula generale

Quindi in generale per trovare la radice n -esima di un numero complesso lo metteremo in forma esponenziale, **tenendo conto della periodicità**, e poi eleveremo all'esponente $\frac{1}{n}$, in questo modo:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} &= \left(r e^{i(\vartheta+2k\pi)} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)} = \\ &= \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Radici in campo complesso: formula generale

Quindi in generale per trovare la radice n -esima di un numero complesso lo metteremo in forma esponenziale, **tenendo conto della periodicità**, e poi eleveremo all'esponente $\frac{1}{n}$, in questo modo:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{r e^{i\vartheta}} &= \left(r e^{i(\vartheta+2k\pi)} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)} = \\ &= \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Scegliendo $k = 0, 1, \dots, n-1$ si otterranno le n radici distinte.

Teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza di tante radici in $\mathbb{C}$ è legata al

Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni, se contate con la dovuta molteplicità.

Teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza di tante radici in $\mathbb{C}$ è legata al

Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni, se contate con la dovuta molteplicità.

Notate la differenza col caso reale: in $\mathbb{R}$ un'equazione di grado n ammette **al massimo** n soluzioni, anche se contate con la dovuta molteplicità.

Teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza di tante radici in $\mathbb{C}$ è legata al

Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni, se contate con la dovuta molteplicità.

Notate la differenza col caso reale: in $\mathbb{R}$ un'equazione di grado n ammette **al massimo** n soluzioni, anche se contate con la dovuta molteplicità.

Invece nel campo complesso non esistono equazioni impossibili: è bastato aggiungere l'elemento i , per dare senso alla radice quadrata di numeri negativi, e improvvisamente tutte le equazioni hanno soluzione.

Teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza di tante radici in $\mathbb{C}$ è legata al

Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni, se contate con la dovuta molteplicità.

Notate la differenza col caso reale: in $\mathbb{R}$ un'equazione di grado n ammette **al massimo** n soluzioni, anche se contate con la dovuta molteplicità.

Invece nel campo complesso non esistono equazioni impossibili: è bastato aggiungere l'elemento i , per dare senso alla radice quadrata di numeri negativi, e improvvisamente tutte le equazioni hanno soluzione.

Quindi, ad esempio, l'equazione $z^5 = 1$ ha cinque soluzioni complesse; cioè $\sqrt[5]{1}$ ha cinque valori ammissibili.

Teorema fondamentale dell'algebra

L'esistenza di tante radici in $\mathbb{C}$ è legata al

Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni, se contate con la dovuta molteplicità.

Notate la differenza col caso reale: in $\mathbb{R}$ un'equazione di grado n ammette **al massimo** n soluzioni, anche se contate con la dovuta molteplicità.

Invece nel campo complesso non esistono equazioni impossibili: è bastato aggiungere l'elemento i , per dare senso alla radice quadrata di numeri negativi, e improvvisamente tutte le equazioni hanno soluzione.

Quindi, ad esempio, l'equazione $z^5 = 1$ ha cinque soluzioni complesse; cioè $\sqrt[5]{1}$ ha cinque valori ammissibili.

Per questo l'esistenza di tante radici è legata al teorema fondamentale.

Radici dell'unità

È particolarmente interessante calcolare le radici complesse di 1. Come abbiamo visto, infatti, ci sono esattamente n numeri complessi distinti che rappresentano

$$\sqrt[n]{1}.$$

Radici dell'unità

È particolarmente interessante calcolare le radici complesse di 1. Come abbiamo visto, infatti, ci sono esattamente n numeri complessi distinti che rappresentano

$$\sqrt[n]{1}.$$

Proviamo a scriverli: poiché in forma trigonometrica si ha $1 = e^0 = e^{2k\pi}$, abbiamo

$$\sqrt[n]{1} = \left(e^{2k\pi}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2k}{n}\pi} = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Radici dell'unità

È particolarmente interessante calcolare le radici complesse di 1. Come abbiamo visto, infatti, ci sono esattamente n numeri complessi distinti che rappresentano

$$\sqrt[n]{1}.$$

Proviamo a scriverli: poiché in forma trigonometrica si ha $1 = e^0 = e^{2k\pi}$, abbiamo

$$\sqrt[n]{1} = \left(e^{2k\pi}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2k}{n}\pi} = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Una di queste radici è sempre 1, e si ottiene per $k = 0$.

Radici dell'unità

È particolarmente interessante calcolare le radici complesse di 1. Come abbiamo visto, infatti, ci sono esattamente n numeri complessi distinti che rappresentano

$$\sqrt[n]{1}.$$

Proviamo a scriverli: poiché in forma trigonometrica si ha $1 = e^0 = e^{2k\pi}$, abbiamo

$$\sqrt[n]{1} = \left(e^{2k\pi}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2k}{n}\pi} = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Una di queste radici è sempre 1, e si ottiene per $k = 0$.

Se poi n è pari, possiamo anche prendere $k = \frac{n}{2}$ e otteniamo -1 .

Radici dell'unità

È particolarmente interessante calcolare le radici complesse di 1. Come abbiamo visto, infatti, ci sono esattamente n numeri complessi distinti che rappresentano

$$\sqrt[n]{1}.$$

Proviamo a scriverli: poiché in forma trigonometrica si ha $1 = e^0 = e^{2k\pi}$, abbiamo

$$\sqrt[n]{1} = \left(e^{2k\pi}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2k}{n}\pi} = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Una di queste radici è sempre 1, e si ottiene per $k = 0$.

Se poi n è pari, possiamo anche prendere $k = \frac{n}{2}$ e otteniamo -1 .

Queste sono le uniche due possibili radici reali dell'unità. Tutte le altre sono numeri complessi veri e propri.

Radici dell'unità: interpretazione geometrica

Ad esempio, se scegliamo $n = 3$ abbiamo

$$\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2k}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2$$

Radici dell'unità: interpretazione geometrica

Ad esempio, se scegliamo $n = 3$ abbiamo

$$\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2k}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2$$

ovvero

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Radici dell'unità: interpretazione geometrica

Ad esempio, se scegliamo $n = 3$ abbiamo

$$\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2$$

ovvero

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Proviamo a disegnare questi punti
nel piano di Gauss:

Radici dell'unità: interpretazione geometrica

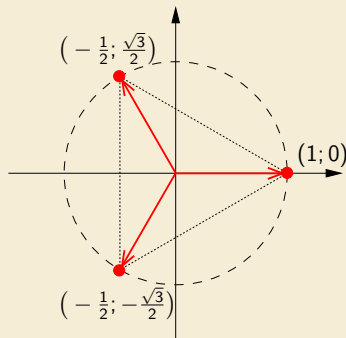
Ad esempio, se scegliamo $n = 3$ abbiamo

$$\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2$$

ovvero

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Proviamo a disegnare questi punti
nel piano di Gauss:



Radici dell'unità: interpretazione geometrica

Ad esempio, se scegliamo $n = 3$ abbiamo

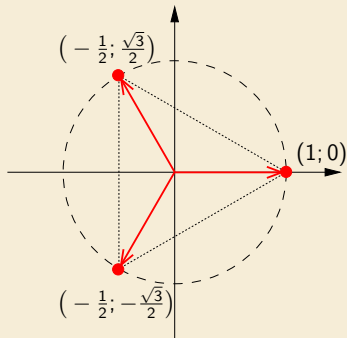
$$\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2$$

ovvero

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Proviamo a disegnare questi punti
nel piano di Gauss:

I punti si dispongono su un triangolo
equilatero inscritto nella
circonferenza di centro l'origine e
raggio 1.



Se invece scegliamo $n = 6$ abbiamo

$$\sqrt[6]{1} = \cos\left(\frac{k}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Se invece scegliamo $n = 6$ abbiamo

$$\sqrt[6]{1} = \cos\left(\frac{k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ovvero

$$1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se invece scegliamo $n = 6$ abbiamo

$$\sqrt[6]{1} = \cos\left(\frac{k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ovvero

$$1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Disegniamo questi punti nel piano di
Gauss:

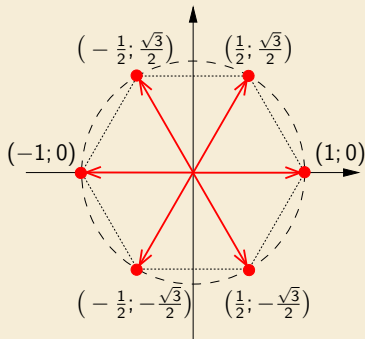
Se invece scegliamo $n = 6$ abbiamo

$$\sqrt[6]{1} = \cos\left(\frac{k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ovvero

$$1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Disegniamo questi punti nel piano di Gauss:



Se invece scegliamo $n = 6$ abbiamo

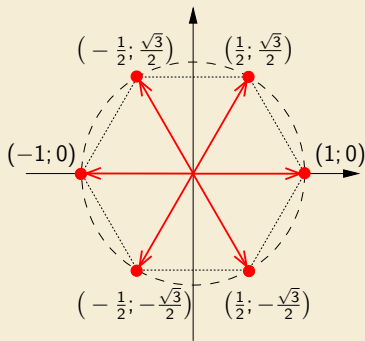
$$\sqrt[6]{1} = \cos\left(\frac{k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ovvero

$$1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Disegniamo questi punti nel piano di Gauss:

Stavolta otteniamo un esagono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1.



Se invece scegliamo $n = 6$ abbiamo

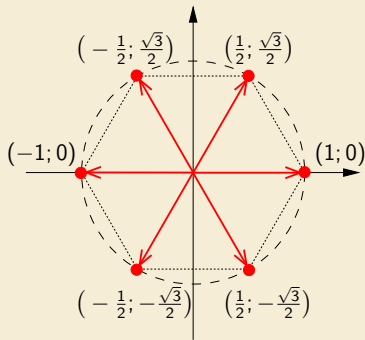
$$\sqrt[6]{1} = \cos\left(\frac{k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{k}{3}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ovvero

$$1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Disegniamo questi punti nel piano di Gauss:

Stavolta otteniamo un esagono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1.



In generale, le radici n -esime dell'unità formano un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza unitaria.

Logaritmo complesso

La forma esponenziale dei numeri complessi ci permette di introdurre una nuova operazione su $\mathbb{C}$: il **logaritmo di un numero complesso**. La definizione si ricava estendendo le proprietà del logaritmo dei numeri reali.

Logaritmo complesso

La forma esponenziale dei numeri complessi ci permette di introdurre una nuova operazione su $\mathbb{C}$: il **logaritmo di un numero complesso**. La definizione si ricava estendendo le proprietà del logaritmo dei numeri reali. Cominciamo considerando un numero complesso della forma $e^{i\vartheta}$ (ovvero un numero sulla circonferenza unitaria).

Logaritmo complesso

La forma esponenziale dei numeri complessi ci permette di introdurre una nuova operazione su $\mathbb{C}$: il **logaritmo di un numero complesso**. La definizione si ricava estendendo le proprietà del logaritmo dei numeri reali. Cominciamo considerando un numero complesso della forma $e^{i\vartheta}$ (ovvero un numero sulla circonferenza unitaria).

Poiché vogliamo definire il logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale, poniamo

$$\log(e^{i\vartheta}) = i\vartheta.$$

Logaritmo complesso

La forma esponenziale dei numeri complessi ci permette di introdurre una nuova operazione su $\mathbb{C}$: il **logaritmo di un numero complesso**. La definizione si ricava estendendo le proprietà del logaritmo dei numeri reali. Cominciamo considerando un numero complesso della forma $e^{i\vartheta}$ (ovvero un numero sulla circonferenza unitaria).

Poiché vogliamo definire il logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale, poniamo

$$\log(e^{i\vartheta}) = i\vartheta.$$

Quindi il logaritmo di questo numero è l'unità immaginaria i moltiplicata per l'angolo.

Logaritmo complesso

La forma esponenziale dei numeri complessi ci permette di introdurre una nuova operazione su $\mathbb{C}$: il **logaritmo di un numero complesso**. La definizione si ricava estendendo le proprietà del logaritmo dei numeri reali. Cominciamo considerando un numero complesso della forma $e^{i\vartheta}$ (ovvero un numero sulla circonferenza unitaria).

Poiché vogliamo definire il logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale, poniamo

$$\log(e^{i\vartheta}) = i\vartheta.$$

Quindi il logaritmo di questo numero è l'unità immaginaria i moltiplicata per l'angolo.

Ma c'è un problema: la periodicità dell'angolo!

Logaritmo complesso

La forma esponenziale dei numeri complessi ci permette di introdurre una nuova operazione su $\mathbb{C}$: il **logaritmo di un numero complesso**. La definizione si ricava estendendo le proprietà del logaritmo dei numeri reali. Cominciamo considerando un numero complesso della forma $e^{i\vartheta}$ (ovvero un numero sulla circonferenza unitaria).

Poiché vogliamo definire il logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale, poniamo

$$\log(e^{i\vartheta}) = i\vartheta.$$

Quindi il logaritmo di questo numero è l'unità immaginaria i moltiplicata per l'angolo.

Ma c'è un problema: la periodicità dell'angolo!

Infatti, avremmo potuto scrivere lo stesso numero nella forma $e^{i(\vartheta+2k\pi)}$, ottenendo

$$\log(e^{i(\vartheta+2k\pi)}) = i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logaritmo complesso

La forma esponenziale dei numeri complessi ci permette di introdurre una nuova operazione su $\mathbb{C}$: il **logaritmo di un numero complesso**. La definizione si ricava estendendo le proprietà del logaritmo dei numeri reali. Cominciamo considerando un numero complesso della forma $e^{i\vartheta}$ (ovvero un numero sulla circonferenza unitaria).

Poiché vogliamo definire il logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale, poniamo

$$\log(e^{i\vartheta}) = i\vartheta.$$

Quindi il logaritmo di questo numero è l'unità immaginaria i moltiplicata per l'angolo.

Ma c'è un problema: la periodicità dell'angolo!

Infatti, avremmo potuto scrivere lo stesso numero nella forma $e^{i(\vartheta+2k\pi)}$, ottenendo

$$\log(e^{i(\vartheta+2k\pi)}) = i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Anche in questo caso il logaritmo è una **funzione multivoca**, e stavolta può assumere infiniti valori.

Ora Consideriamo un generico numero complesso non nullo:

$$r e^{i\vartheta}, \quad r > 0.$$

Ora Consideriamo un generico numero complesso non nullo:

$$r e^{i\vartheta}, \quad r > 0.$$

Ricordando che il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi, abbiamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + \log(e^{i\vartheta})$$

Ora Consideriamo un generico numero complesso non nullo:

$$r e^{i\vartheta}, \quad r > 0.$$

Ricordando che il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi, abbiamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + \log(e^{i\vartheta})$$

e per quanto detto nel lucido precedente troviamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ora Consideriamo un generico numero complesso non nullo:

$$r e^{i\vartheta}, \quad r > 0.$$

Ricordando che il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi, abbiamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + \log(e^{i\vartheta})$$

e per quanto detto nel lucido precedente troviamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notate che il primo logaritmo è l'usuale logaritmo definito per i numeri reali positivi.

Ora Consideriamo un generico numero complesso non nullo:

$$r e^{i\vartheta}, \quad r > 0.$$

Ricordando che il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi, abbiamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + \log(e^{i\vartheta})$$

e per quanto detto nel lucido precedente troviamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notate che il primo logaritmo è l'usuale logaritmo definito per i numeri reali positivi.

Quindi abbiamo definito la funzione (multivoca) logaritmo in campo complesso.

Ora Consideriamo un generico numero complesso non nullo:

$$r e^{i\vartheta}, \quad r > 0.$$

Ricordando che il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi, abbiamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + \log(e^{i\vartheta})$$

e per quanto detto nel lucido precedente troviamo

$$\log(r e^{i\vartheta}) = \log r + i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notate che il primo logaritmo è l'usuale logaritmo definito per i numeri reali positivi.

Quindi abbiamo definito la funzione (multivoca) logaritmo in campo complesso.

Si può anche definire il cosiddetto **valore principale del logaritmo**, denotato con Log , in cui per convenzione si sceglie il valore dell'angolo nell'intervallo $]-\pi; \pi]$. In questo modo Log è una funzione univoca, ma diventa discontinua per $\vartheta = \pi$.

Un esempio surreale

Come esempio semplice ma sorprendente, mostriamo che

$$\pi = \frac{\operatorname{Log}(-1)}{i}.$$

Un esempio surreale

Come esempio semplice ma sorprendente, mostriamo che

$$\pi = \frac{\operatorname{Log}(-1)}{i}.$$

Questa formula è quasi surreale: facciamo il logaritmo di un numero negativo (il suo valore principale, per la precisione) e lo dividiamo per l'unità immaginaria, e otteniamo π !

Un esempio surreale

Come esempio semplice ma sorprendente, mostriamo che

$$\pi = \frac{\operatorname{Log}(-1)}{i}.$$

Questa formula è quasi surreale: facciamo il logaritmo di un numero negativo (il suo valore principale, per la precisione) e lo dividiamo per l'unità immaginaria, e otteniamo π !

Vediamo perché: intanto sappiamo che in forma esponenziale si ha

$$-1 = e^{i\pi}.$$

Un esempio surreale

Come esempio semplice ma sorprendente, mostriamo che

$$\pi = \frac{\operatorname{Log}(-1)}{i}.$$

Questa formula è quasi surreale: facciamo il logaritmo di un numero negativo (il suo valore principale, per la precisione) e lo dividiamo per l'unità immaginaria, e otteniamo π !

Vediamo perché: intanto sappiamo che in forma esponenziale si ha

$$-1 = e^{i\pi}.$$

Quindi

$$\operatorname{Log}(-1) = \operatorname{Log}(e^{i\pi}) = i\pi$$

Un esempio surreale

Come esempio semplice ma sorprendente, mostriamo che

$$\pi = \frac{\text{Log}(-1)}{i}.$$

Questa formula è quasi surreale: facciamo il logaritmo di un numero negativo (il suo valore principale, per la precisione) e lo dividiamo per l'unità immaginaria, e otteniamo π !

Vediamo perché: intanto sappiamo che in forma esponenziale si ha

$$-1 = e^{i\pi}.$$

Quindi

$$\text{Log}(-1) = \text{Log}(e^{i\pi}) = i\pi \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{\text{Log}(-1)}{i}$$

Un esempio surreale

Come esempio semplice ma sorprendente, mostriamo che

$$\pi = \frac{\text{Log}(-1)}{i}.$$

Questa formula è quasi surreale: facciamo il logaritmo di un numero negativo (il suo valore principale, per la precisione) e lo dividiamo per l'unità immaginaria, e otteniamo π !

Vediamo perché: intanto sappiamo che in forma esponenziale si ha

$$-1 = e^{i\pi}.$$

Quindi

$$\text{Log}(-1) = \text{Log}(e^{i\pi}) = i\pi \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{\text{Log}(-1)}{i} \quad (!)$$

Potenze a esponente complesso

Mediante il valore principale del logaritmo possiamo per esempio calcolare il numero i^i , usando quello che abbiamo imparato.

Potenze a esponente complesso

Mediante il valore principale del logaritmo possiamo per esempio calcolare il numero i^i , usando quello che abbiamo imparato.

Sappiamo che in forma esponenziale $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, quindi si ha

$$\text{Log } i = i\frac{\pi}{2}.$$

Potenze a esponente complesso

Mediante il valore principale del logaritmo possiamo per esempio calcolare il numero i^i , usando quello che abbiamo imparato.

Sappiamo che in forma esponenziale $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, quindi si ha

$$\operatorname{Log} i = i\frac{\pi}{2}.$$

Per calcolare i^i possiamo usare l'identità $z = e^{\operatorname{Log} z}$ e quindi

$$i^i = e^{\operatorname{Log}(i^i)} =$$

Potenze a esponente complesso

Mediante il valore principale del logaritmo possiamo per esempio calcolare il numero i^i , usando quello che abbiamo imparato.

Sappiamo che in forma esponenziale $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, quindi si ha

$$\text{Log } i = i\frac{\pi}{2}.$$

Per calcolare i^i possiamo usare l'identità $z = e^{\text{Log } z}$ e quindi

$$i^i = e^{\text{Log}(i^i)} = e^{i \text{Log } i} =$$

Potenze a esponente complesso

Mediante il valore principale del logaritmo possiamo per esempio calcolare il numero i^i , usando quello che abbiamo imparato.

Sappiamo che in forma esponenziale $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, quindi si ha

$$\text{Log } i = i\frac{\pi}{2}.$$

Per calcolare i^i possiamo usare l'identità $z = e^{\text{Log } z}$ e quindi

$$i^i = e^{\text{Log}(i^i)} = e^{i \text{Log } i} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} =$$

Potenze a esponente complesso

Mediante il valore principale del logaritmo possiamo per esempio calcolare il numero i^i , usando quello che abbiamo imparato.

Sappiamo che in forma esponenziale $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, quindi si ha

$$\operatorname{Log} i = i\frac{\pi}{2}.$$

Per calcolare i^i possiamo usare l'identità $z = e^{\operatorname{Log} z}$ e quindi

$$i^i = e^{\operatorname{Log}(i^i)} = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \simeq 0,20788.$$

Potenze a esponente complesso

Mediante il valore principale del logaritmo possiamo per esempio calcolare il numero i^i , usando quello che abbiamo imparato.

Sappiamo che in forma esponenziale $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, quindi si ha

$$\text{Log } i = i\frac{\pi}{2}.$$

Per calcolare i^i possiamo usare l'identità $z = e^{\text{Log } z}$ e quindi

$$i^i = e^{\text{Log}(i^i)} = e^{i \text{Log } i} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \simeq 0,20788.$$

Con questa definizione, i^i è un numero reale!