

Numeri complessi e trigonometria

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Viaggio nei numeri complessi

In questa lezione affronteremo un viaggio affascinante nel mondo dei numeri complessi.

Tali numeri hanno trovato cittadinanza nel mondo matematico in tempi relativamente recenti: soltanto nel XVIII secolo, soprattutto grazie a Eulero, sono stati pienamente accettati.

Vedremo che per tali numeri è possibile addirittura definire e calcolare le funzioni goniometriche, come seno e coseno, costruendo una teoria coerente e ricca di applicazioni.

I numeri complessi

Per affrontare l'argomento di questa lezione, conviene prima fare un mini-ripasso veloce dei numeri complessi.

I numeri complessi

Per affrontare l'argomento di questa lezione, conviene prima fare un mini-ripasso veloce dei numeri complessi.

Definizione

Si chiama **numero complesso** una quantità del tipo $a + ib$, dove a, b sono due numeri reali e i è l'**unità immaginaria**, definita dalla proprietà $i^2 = -1$.

I numeri complessi

Per affrontare l'argomento di questa lezione, conviene prima fare un mini-ripasso veloce dei numeri complessi.

Definizione

Si chiama **numero complesso** una quantità del tipo $a + ib$, dove a, b sono due numeri reali e i è l'**unità immaginaria**, definita dalla proprietà $i^2 = -1$.

I numeri complessi non si chiamano così perché sono complicati, ma perché sono formati da un *complesso* di due oggetti:

- la **parte reale** a ;
- la **parte immaginaria** b .

I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro (con le regole tipiche dei polinomi):

I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro (con le regole tipiche dei polinomi):

- somma: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro (con le regole tipiche dei polinomi):

- somma: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

- prodotto: $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

Soprattutto, i numeri complessi si possono identificare con i punti del piano cartesiano, mediante l'ovvia relazione

$$a + ib \longleftrightarrow (a, b)$$

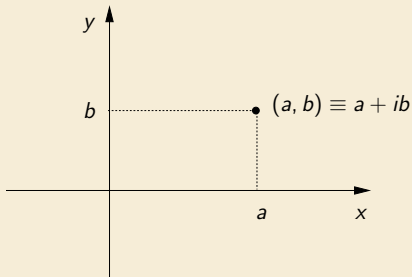
I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro (con le regole tipiche dei polinomi):

- somma: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- prodotto: $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

Soprattutto, i numeri complessi si possono identificare con i punti del piano cartesiano, mediante l'ovvia relazione

$$a + ib \longleftrightarrow (a, b)$$

Questo modo di identificare i numeri complessi con i punti di un piano cartesiano viene detto **piano di Gauss**:



La formula di addizione

Ora passiamo alla trigonometria, ricordando la formula di addizione per il coseno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

La formula di addizione

Ora passiamo alla trigonometria, ricordando la formula di addizione per il coseno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

e per il seno

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

La formula di addizione

Ora passiamo alla trigonometria, ricordando la formula di addizione per il coseno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

e per il seno

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Cosa possiamo intuire da queste formule? Che in qualche modo trasformano una somma in un prodotto, anche se non in maniera troppo semplice.

La formula di addizione

Ora passiamo alla trigonometria, ricordando la formula di addizione per il coseno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

e per il seno

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Cosa possiamo intuire da queste formule? Che in qualche modo trasformano una somma in un prodotto, anche se non in maniera troppo semplice.

E qual è la funzione che trasforma la somma degli argomenti nel prodotto delle funzioni?

La formula di addizione

Ora passiamo alla trigonometria, ricordando la formula di addizione per il coseno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

e per il seno

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Cosa possiamo intuire da queste formule? Che in qualche modo trasformano una somma in un prodotto, anche se non in maniera troppo semplice.

E qual è la funzione che trasforma la somma degli argomenti nel prodotto delle funzioni?

L'esponenziale!

Esponenziale e trigonometria

In effetti, quello che andremo a cercare è proprio un legame tra l'esponenziale e le funzioni trigonometriche. Questo legame non è semplicissimo, passa per i numeri complessi. Ma è senza dubbio sorprendente e profondo.

Prodotto di complessi

Vediamo: abbiamo detto che il prodotto di numeri complessi dà

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad),$$

Prodotto di complessi

Vediamo: abbiamo detto che il prodotto di numeri complessi dà

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad),$$

mentre le formule di addizione danno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Prodotto di complessi

Vediamo: abbiamo detto che il prodotto di numeri complessi dà

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad),$$

mentre le formule di addizione danno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Moltiplicando il seno per l'unità immaginaria i e sommando le due formule, si ottiene

$$\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

Prodotto di complessi

Vediamo: abbiamo detto che il prodotto di numeri complessi dà

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad),$$

mentre le formule di addizione danno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Moltiplicando il seno per l'unità immaginaria i e sommando le due formule, si ottiene

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ = & (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) \end{aligned}$$

Prodotto di complessi

Vediamo: abbiamo detto che il prodotto di numeri complessi dà

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad),$$

mentre le formule di addizione danno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Moltiplicando il seno per l'unità immaginaria i e sommando le due formule, si ottiene

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ = & (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) \\ = & (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \end{aligned}$$

L'esponenziale complesso

Quindi abbiamo ottenuto la formula

$$\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

e poiché trasforma la somma di argomenti in prodotto di numeri, ci viene voglia di dare la seguente

L'esponenziale complesso

Quindi abbiamo ottenuto la formula

$$\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

e poiché trasforma la somma di argomenti in prodotto di numeri, ci viene voglia di dare la seguente

Definizione di esponenziale complesso

$$e^{i\alpha} := \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

L'esponenziale complesso

Quindi abbiamo ottenuto la formula

$$\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

e poiché trasforma la somma di argomenti in prodotto di numeri, ci viene voglia di dare la seguente

Definizione di esponenziale complesso

$$e^{i\alpha} := \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

Si noti che l'esponenziale $e^{i\alpha}$ per ora è solo un simbolo, ma intanto sappiamo che vale

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

che è la riscrittura della formula in alto.

Commenti

Il ragionamento fatto non deve sorprendere: spesso nella matematica si procede per analogie, e si cercano di estendere le proprietà di alcuni oggetti ad ambiti molto più generali.

Commenti

Il ragionamento fatto non deve sorprendere: spesso nella matematica si procede per analogie, e si cercano di estendere le proprietà di alcuni oggetti ad ambiti molto più generali.

È così che sono nati, ad esempio:

- i numeri negativi: per poter fare la sottrazione tra due numeri naturali qualsiasi

Commenti

Il ragionamento fatto non deve sorprendere: spesso nella matematica si procede per analogie, e si cercano di estendere le proprietà di alcuni oggetti ad ambiti molto più generali.

È così che sono nati, ad esempio:

- i numeri negativi: per poter fare la sottrazione tra due numeri naturali qualsiasi
- i numeri razionali: per poter fare la divisione

Commenti

Il ragionamento fatto non deve sorprendere: spesso nella matematica si procede per analogie, e si cercano di estendere le proprietà di alcuni oggetti ad ambiti molto più generali.

È così che sono nati, ad esempio:

- i numeri negativi: per poter fare la sottrazione tra due numeri naturali qualsiasi
- i numeri razionali: per poter fare la divisione
- i numeri complessi: per dare soluzione a tutte le equazioni polinomiali

Commenti

Il ragionamento fatto non deve sorprendere: spesso nella matematica si procede per analogie, e si cercano di estendere le proprietà di alcuni oggetti ad ambiti molto più generali.

È così che sono nati, ad esempio:

- i numeri negativi: per poter fare la sottrazione tra due numeri naturali qualsiasi
- i numeri razionali: per poter fare la divisione
- i numeri complessi: per dare soluzione a tutte le equazioni polinomiali

In questo caso, abbiamo definito cosa vuol dire

elevare il numero e a una potenza immaginaria!

L'esponenziale complesso

Possiamo continuare nell'analogia: cosa significa fare

$$e^{\alpha+i\beta} \quad ?$$

L'esponenziale complesso

Possiamo continuare nell'analogia: cosa significa fare

$$e^{\alpha+i\beta} \quad ?$$

Bè, volendo usare le proprietà dell'esponenziale, si ha

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

che è un numero complesso ben definito.

L'esponenziale complesso

Possiamo continuare nell'analogia: cosa significa fare

$$e^{\alpha+i\beta} \quad ?$$

Bè, volendo usare le proprietà dell'esponenziale, si ha

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

che è un numero complesso ben definito.

Quindi abbiamo ottenuto una funzione, denotata con \exp come nel caso reale, ma definita sui numeri complessi:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

L'esponenziale complesso

Cosa succede nel caso reale? Vediamo:

$$e^{\alpha+i0} = e^{\alpha}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^{\alpha}.$$

L'esponenziale complesso

Cosa succede nel caso reale? Vediamo:

$$e^{\alpha+i0} = e^{\alpha}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^{\alpha}.$$

Riotteniamo la funzione esponenziale originaria. Quindi la nostra nuova funzione esponenziale è proprio un'**estensione** di quella originaria.

L'esponenziale complesso

Cosa succede nel caso reale? Vediamo:

$$e^{\alpha+i0} = e^{\alpha}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^{\alpha}.$$

Riotteniamo la funzione esponenziale originaria. Quindi la nostra nuova funzione esponenziale è proprio un'**estensione** di quella originaria.

Possiamo anche dimostrare la bellissima **formula di Eulero**:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

L'esponenziale complesso

Cosa succede nel caso reale? Vediamo:

$$e^{\alpha+i0} = e^{\alpha}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^{\alpha}.$$

Riotteniamo la funzione esponenziale originaria. Quindi la nostra nuova funzione esponenziale è proprio un'**estensione** di quella originaria.

Possiamo anche dimostrare la bellissima **formula di Eulero**:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Infatti: $e^{i\pi} + 1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi + 1 = -1 + i0 + 1 = 0.$

La formula di Eulero

La formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

è una delle più ammirate della matematica, e c'è addirittura chi la considera una specie di opera d'arte.

La formula di Eulero

La formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

È una delle più ammirate della matematica, e c'è addirittura chi la considera una specie di opera d'arte.

Essa unisce in modo misterioso ed esoterico alcune tra le costanti più importanti di tutta la matematica: il numero di Nepero e , il numero π , l'unità immaginaria i , i numeri 0 e 1 ...

La formula di Eulero

La formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

è una delle più ammirate della matematica, e c'è addirittura chi la considera una specie di opera d'arte.

Essa unisce in modo misterioso ed esoterico alcune tra le costanti più importanti di tutta la matematica: il numero di Nepero e , il numero π , l'unità immaginaria i , i numeri 0 e 1 ...

(pare che manchi soltanto la sezione aurea!)

La formula di Eulero

La formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

è una delle più ammirate della matematica, e c'è addirittura chi la considera una specie di opera d'arte.

Essa unisce in modo misterioso ed esoterico alcune tra le costanti più importanti di tutta la matematica: il numero di Nepero e , il numero π , l'unità immaginaria i , i numeri 0 e 1 ...

(pare che manchi soltanto la sezione aurea!)

Certo, vista nel nostro modo è poco più di una definizione, ma non c'è dubbio che il suo significato sia molto profondo.

Forma esponenziale dei numeri complessi

Esiste un altro modo di scrivere i numeri complessi, legato all'esponenziale complesso appena introdotto.

Forma esponenziale dei numeri complessi

Esiste un altro modo di scrivere i numeri complessi, legato all'esponenziale complesso appena introdotto.

Un numero complesso si può scrivere nella forma

$$re^{i\alpha}$$

dove $r \geq 0$ e $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Forma esponenziale dei numeri complessi

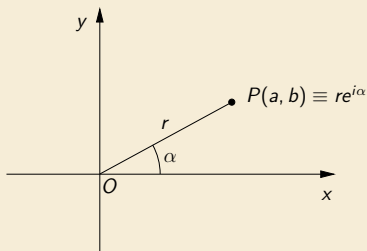
Esiste un altro modo di scrivere i numeri complessi, legato all'esponenziale complesso appena introdotto.

Un numero complesso si può scrivere nella forma

$$re^{i\alpha}$$

dove $r \geq 0$ e $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Geometricamente, se rappresentiamo il numero complesso $a + ib$ nel piano cartesiano (piano di Gauss) come il punto $P(a, b)$, si ha che r rappresenta la distanza \overline{PO} e α l'angolo formato dall'asse x con PO .



Esponenziale complesso e rotazioni

In particolare, moltiplicare un numero complesso per un esponenziale (complesso) significa **ruotarlo** nel piano di Gauss.

Esponenziale complesso e rotazioni

In particolare, moltiplicare un numero complesso per un esponenziale (complesso) significa **ruotarlo** nel piano di Gauss.

Infatti, prendiamo un numero $re^{i\alpha}$ e moltiplichiamolo per $e^{i\beta}$: si ha

Esponenziale complesso e rotazioni

In particolare, moltiplicare un numero complesso per un esponenziale (complesso) significa **ruotarlo** nel piano di Gauss.

Infatti, prendiamo un numero $re^{i\alpha}$ e moltiplichiamolo per $e^{i\beta}$: si ha

$$re^{i\alpha}e^{i\beta} = re^{i(\alpha+\beta)}$$

per le proprietà dell'esponenziale.

Esponenziale complesso e rotazioni

In particolare, moltiplicare un numero complesso per un esponenziale (complesso) significa **ruotarlo** nel piano di Gauss.

Infatti, prendiamo un numero $re^{i\alpha}$ e moltiplichiamolo per $e^{i\beta}$: si ha

$$re^{i\alpha}e^{i\beta} = re^{i(\alpha+\beta)}$$

per le proprietà dell'esponenziale.

Questo è proprio il numero che ha la stessa distanza da O e forma un angolo di $\alpha + \beta$ con l'asse x .

Esponenziale complesso e rotazioni

In particolare, moltiplicare un numero complesso per un esponenziale (complesso) significa **ruotarlo** nel piano di Gauss.

Infatti, prendiamo un numero $re^{i\alpha}$ e moltiplichiamolo per $e^{i\beta}$: si ha

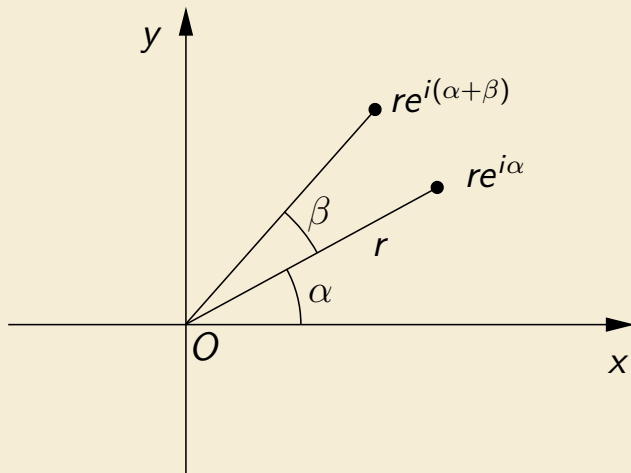
$$re^{i\alpha}e^{i\beta} = re^{i(\alpha+\beta)}$$

per le proprietà dell'esponenziale.

Questo è proprio il numero che ha la stessa distanza da O e forma un angolo di $\alpha + \beta$ con l'asse x .

Il numero è stato **ruotato** di un angolo β .

Esponenziale complesso e rotazioni



Forma trigonometrica dei numeri complessi

La forma esponenziale dei numeri complessi è analoga alla cosiddetta **forma trigonometrica**, in cui la definizione di esponenziale complesso viene esplicitata:

$$re^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Forma trigonometrica dei numeri complessi

La forma esponenziale dei numeri complessi è analoga alla cosiddetta **forma trigonometrica**, in cui la definizione di esponenziale complesso viene esplicitata:

$$re^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

In questa forma si coglie meglio il fatto che:

Forma trigonometrica dei numeri complessi

La forma esponenziale dei numeri complessi è analoga alla cosiddetta **forma trigonometrica**, in cui la definizione di esponenziale complesso viene esplicitata:

$$re^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

In questa forma si coglie meglio il fatto che:

- la parte reale, ovvero $r \cos \alpha$, rappresenta l'ascissa del punto nel piano di Gauss;

Forma trigonometrica dei numeri complessi

La forma esponenziale dei numeri complessi è analoga alla cosiddetta **forma trigonometrica**, in cui la definizione di esponenziale complesso viene esplicitata:

$$re^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

In questa forma si coglie meglio il fatto che:

- la parte reale, ovvero $r \cos \alpha$, rappresenta l'ascissa del punto nel piano di Gauss;
- la parte immaginaria, ovvero $r \sin \alpha$, rappresenta l'ordinata del punto nel piano di Gauss.

Potenza di un numero complesso

Se si deve calcolare la potenza di un numero complesso, la forma esponenziale (o quella trigonometrica, che è molto simile) risulta molto comoda.

Potenza di un numero complesso

Se si deve calcolare la potenza di un numero complesso, la forma esponenziale (o quella trigonometrica, che è molto simile) risulta molto comoda.

Ad esempio, supponiamo di dover calcolare $(1 + i)^4$: dovremmo fare la quarta potenza di un binomio (ricavandoci i coefficienti dal triangolo di Tartaglia) e poi semplificare le potenze di i (ricordando che $i^2 = -1$).

Potenza di un numero complesso

Se si deve calcolare la potenza di un numero complesso, la forma esponenziale (o quella trigonometrica, che è molto simile) risulta molto comoda.

Ad esempio, supponiamo di dover calcolare $(1 + i)^4$: dovremmo fare la quarta potenza di un binomio (ricavandoci i coefficienti dal triangolo di Tartaglia) e poi semplificare le potenze di i (ricordando che $i^2 = -1$). Proviamo a farlo:

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4$$

Potenza di un numero complesso

Se si deve calcolare la potenza di un numero complesso, la forma esponenziale (o quella trigonometrica, che è molto simile) risulta molto comoda.

Ad esempio, supponiamo di dover calcolare $(1 + i)^4$: dovremmo fare la quarta potenza di un binomio (ricavandoci i coefficienti dal triangolo di Tartaglia) e poi semplificare le potenze di i (ricordando che $i^2 = -1$). Proviamo a farlo:

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1$$

Potenza di un numero complesso

Se si deve calcolare la potenza di un numero complesso, la forma esponenziale (o quella trigonometrica, che è molto simile) risulta molto comoda.

Ad esempio, supponiamo di dover calcolare $(1 + i)^4$: dovremmo fare la quarta potenza di un binomio (ricavandoci i coefficienti dal triangolo di Tartaglia) e poi semplificare le potenze di i (ricordando che $i^2 = -1$). Proviamo a farlo:

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

Potenza di un numero complesso

Se si deve calcolare la potenza di un numero complesso, la forma esponenziale (o quella trigonometrica, che è molto simile) risulta molto comoda.

Ad esempio, supponiamo di dover calcolare $(1 + i)^4$: dovremmo fare la quarta potenza di un binomio (ricavandoci i coefficienti dal triangolo di Tartaglia) e poi semplificare le potenze di i (ricordando che $i^2 = -1$). Proviamo a farlo:

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

Se invece avessimo avuto lo stesso numero in forma esponenziale, ovvero $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, avremmo fatto semplicemente

$$\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\frac{\pi}{4}4} = 4(-1) = -4.$$

Potenza di un numero complesso

E questo per una potenza relativamente bassa: provate a pensare di dover calcolare $(1 + i)^{15}$...

Potenza di un numero complesso

E questo per una potenza relativamente bassa: provate a pensare di dover calcolare $(1 + i)^{15}$...

In forma esponenziale è presto fatto:

$$(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{15} = (\sqrt{2})^{15}e^{i\frac{\pi}{4}15} = 128\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi},$$

Potenza di un numero complesso

E questo per una potenza relativamente bassa: provate a pensare di dover calcolare $(1 + i)^{15}$...

In forma esponenziale è presto fatto:

$$(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{15} = (\sqrt{2})^{15}e^{i\frac{\pi}{4}15} = 128\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi},$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\frac{15}{4}\pi$ si identifica con $\frac{7}{4}\pi$ come angolo.

Potenza di un numero complesso

E questo per una potenza relativamente bassa: provate a pensare di dover calcolare $(1 + i)^{15}$...

In forma esponenziale è presto fatto:

$$(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{15} = (\sqrt{2})^{15}e^{i\frac{\pi}{4}15} = 128\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi},$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\frac{15}{4}\pi$ si identifica con $\frac{7}{4}\pi$ come angolo.

Se ora volessimo questo numero in forma $a + ib$, basta fare

$$\begin{aligned}128\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} &= 128\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{4}\pi \right) \\ &= 128\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 128 - i128.\end{aligned}$$

Potenza di un numero complesso

E questo per una potenza relativamente bassa: provate a pensare di dover calcolare $(1 + i)^{15}$...

In forma esponenziale è presto fatto:

$$(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{15} = (\sqrt{2})^{15}e^{i\frac{\pi}{4}15} = 128\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi},$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\frac{15}{4}\pi$ si identifica con $\frac{7}{4}\pi$ come angolo.

Se ora volessimo questo numero in forma $a + ib$, basta fare

$$\begin{aligned} 128\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} &= 128\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) \\ &= 128\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 128 - i128. \end{aligned}$$

In realtà, se dovessimo calcolare le **radici** di un numero complesso, la forma esponenziale sarebbe addirittura essenziale. Ma questa è una storia più complicata...

Passaggio da una forma all'altra

Resta da spiegare come abbiamo fatto a scrivere il numero $1 + i$ nella forma $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Passaggio da una forma all'altra

Resta da spiegare come abbiamo fatto a scrivere il numero $1 + i$ nella forma $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Per fare questo, basta sapere che, dato un numero complesso $a + ib$, si ha $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (che è la distanza del punto dall'origine). Per calcolare l'angolo α bisogna poi risolvere l'equazione goniometrica elementare

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}.$$

Passaggio da una forma all'altra

Resta da spiegare come abbiamo fatto a scrivere il numero $1 + i$ nella forma $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Per fare questo, basta sapere che, dato un numero complesso $a + ib$, si ha $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (che è la distanza del punto dall'origine). Per calcolare l'angolo α bisogna poi risolvere l'equazione goniometrica elementare

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}.$$

Nel caso di $1 + i$ si ha subito $r = \sqrt{2}$, e poi

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

che ha come soluzione $\alpha = \pi/4$.

Passaggio da una forma all'altra

Resta da spiegare come abbiamo fatto a scrivere il numero $1 + i$ nella forma $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Per fare questo, basta sapere che, dato un numero complesso $a + ib$, si ha $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (che è la distanza del punto dall'origine). Per calcolare l'angolo α bisogna poi risolvere l'equazione goniometrica elementare

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}.$$

Nel caso di $1 + i$ si ha subito $r = \sqrt{2}$, e poi

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

che ha come soluzione $\alpha = \pi/4$.

Il passaggio inverso è invece molto più semplice, basta scrivere la forma trigonometrica del numero.

Una formula su seno e coseno

Consideriamo gli esponenziali complessi

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha,$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha.$$

Una formula su seno e coseno

Consideriamo gli esponenziali complessi

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha,$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha.$$

Se li sommiamo otteniamo

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = 2 \cos \alpha$$

Una formula su seno e coseno

Consideriamo gli esponenziali complessi

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha,$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha.$$

Se li sommiamo otteniamo

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = 2 \cos \alpha$$

da cui deduciamo

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}).$$

Una formula su seno e coseno

Consideriamo gli esponenziali complessi

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha,$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha.$$

Se li sommiamo otteniamo

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = 2 \cos \alpha$$

da cui deduciamo

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}).$$

Allo stesso modo, se li sottraiamo otteniamo

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = 2i \operatorname{sen} \alpha$$

Una formula su seno e coseno

Consideriamo gli esponenziali complessi

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$
$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Se li sommiamo otteniamo

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \alpha - i \sin \alpha = 2 \cos \alpha$$

da cui deduciamo

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}).$$

Allo stesso modo, se li sottraiamo otteniamo

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2i \sin \alpha$$

da cui deduciamo

$$\sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}).$$

Seno e coseno complesso

Le formule appena ottenute

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

ci permettono di definire il seno e il coseno anche per un arbitrario numero complesso:

Seno e coseno complesso

Le formule appena ottenute

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \text{sen } \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

ci permettono di definire il seno e il coseno anche per un arbitrario numero complesso:

Definizione

Se z è un numero complesso, poniamo

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{sen } z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Senso e coseno complesso

Le formule appena ottenute

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

ci permettono di definire il seno e il coseno anche per un arbitrario numero complesso:

Definizione

Se z è un numero complesso, poniamo

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Per esempio, possiamo calcolare il coseno di i :

Seno e coseno complesso

Le formule appena ottenute

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

ci permettono di definire il seno e il coseno anche per un arbitrario numero complesso:

Definizione

Se z è un numero complesso, poniamo

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Per esempio, possiamo calcolare il coseno di i :

$$\cos(i) = \frac{1}{2} (e^{i^2} + e^{-i^2}) = \frac{1}{2} (e^{-1} + e) \simeq 1,543.$$

Seno e coseno complesso

Le formule appena ottenute

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

ci permettono di definire il seno e il coseno anche per un arbitrario numero complesso:

Definizione

Se z è un numero complesso, poniamo

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Per esempio, possiamo calcolare il coseno di i :

$$\cos(i) = \frac{1}{2} (e^{i^2} + e^{-i^2}) = \frac{1}{2} (e^{-1} + e) \simeq 1,543.$$

Così il coseno dell'unità immaginaria è un numero reale!

Seno e coseno complesso

Le formule appena ottenute

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

ci permettono di definire il seno e il coseno anche per un arbitrario numero complesso:

Definizione

Se z è un numero complesso, poniamo

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Per esempio, possiamo calcolare il coseno di i :

$$\cos(i) = \frac{1}{2} (e^{i^2} + e^{-i^2}) = \frac{1}{2} (e^{-1} + e) \simeq 1,543.$$

Così il coseno dell'unità immaginaria è un numero reale!

(Chi vuole approfondire si informi sul *coseno iperbolico*).

Conclusione

Abbiamo fatto un viaggio notevole all'interno dei numeri complessi. Grazie ad un'osservazione semplice (ma molto profonda) sulle formule di addizione, abbiamo potuto definire l'elevamento di un numero a una potenza complessa.

Conclusione

Abbiamo fatto un viaggio notevole all'interno dei numeri complessi. Grazie ad un'osservazione semplice (ma molto profonda) sulle formule di addizione, abbiamo potuto definire l'elevamento di un numero a una potenza complessa.

Poi abbiamo visto e digerito la splendida e famosissima formula di Eulero.

Conclusione

Abbiamo fatto un viaggio notevole all'interno dei numeri complessi. Grazie ad un'osservazione semplice (ma molto profonda) sulle formule di addizione, abbiamo potuto definire l'elevamento di un numero a una potenza complessa.

Poi abbiamo visto e digerito la splendida e famosissima formula di Eulero.

Infine, abbiamo addirittura dato una definizione di seno e coseno complesso.

Conclusione

Abbiamo fatto un viaggio notevole all'interno dei numeri complessi. Grazie ad un'osservazione semplice (ma molto profonda) sulle formule di addizione, abbiamo potuto definire l'elevamento di un numero a una potenza complessa.

Poi abbiamo visto e digerito la splendida e famosissima formula di Eulero.

Infine, abbiamo addirittura dato una definizione di seno e coseno complesso.

Questo ci fa capire che le funzioni trigonometriche hanno un significato ben più ampio del semplice rapporto tra cateto e ipotenusa in un triangolo rettangolo, e ci possono aiutare ad esplorare questa inesauribile costruzione matematica che sono i numeri complessi.