

Modelli matematici in Biologia

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Introduzione
- 2 La dinamica delle popolazioni
- 3 Un' evoluzione caotica: la legge logistica
- 4 Il problema di Fibonacci

Introduzione

Nel corso del XX secolo, e ancor oggi, la Matematica ha dato e sta dando numerosi contributi nel campo della Biologia.

Introduzione

Nel corso del XX secolo, e ancor oggi, la Matematica ha dato e sta dando numerosi contributi nel campo della Biologia.

Anche se le nostre conoscenze di Matematica sono limitate, per ora, potremo comunque studiare tre problemi relativi alla cosiddetta *dinamica delle popolazioni*, che ha applicazioni, ovvie, sui batteri ma anche su animali più evoluti e sull'Uomo.

Introduzione

Nel corso del XX secolo, e ancor oggi, la Matematica ha dato e sta dando numerosi contributi nel campo della Biologia.

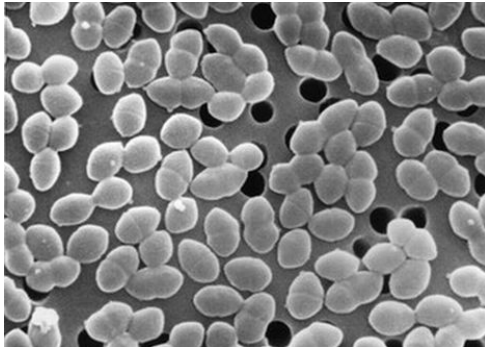
Anche se le nostre conoscenze di Matematica sono limitate, per ora, potremo comunque studiare tre problemi relativi alla cosiddetta *dinamica delle popolazioni*, che ha applicazioni, ovvie, sui batteri ma anche su animali più evoluti e sull'Uomo.

La dinamica delle popolazioni

Spesso, quando si ha a che fare con dei *batteri*

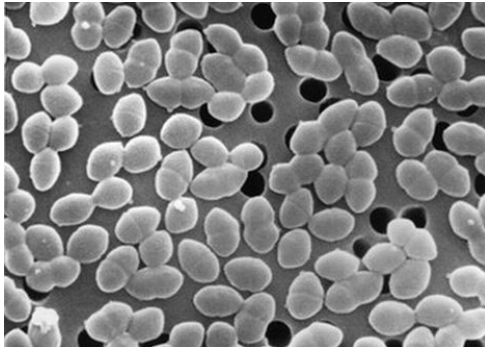
La dinamica delle popolazioni

Spesso, quando si ha a che fare con dei *batteri*



La dinamica delle popolazioni

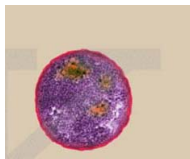
Spesso, quando si ha a che fare con dei *batteri*



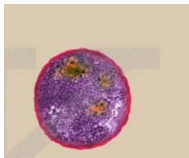
serve *contarli*.

Di solito si suppone di partire con *un* batterio

Di solito si suppone di partire con *un* batterio

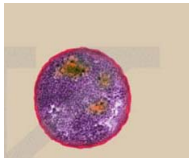


Di solito si suppone di partire con *un* batterio



che dopo un certo tempo (per esempio, 1 minuto), si duplica

Di solito si suppone di partire con *un* batterio



che dopo un certo tempo (per esempio, 1 minuto), si duplica



Dopo un altro minuto i batteri si duplicano di nuovo, diventando quattro, poi otto, e così via.

Dopo un altro minuto i batteri si duplicano di nuovo, diventando quattro, poi otto, e così via.

Quanti batteri avremo dopo n minuti?

Dopo un altro minuto i batteri si duplicano di nuovo, diventando quattro, poi otto, e così via.

Quanti batteri avremo dopo n minuti? Facile:

Dopo un altro minuto i batteri si duplicano di nuovo, diventando quattro, poi otto, e così via.

Quanti batteri avremo dopo n minuti? Facile: 2^n .

Dopo un altro minuto i batteri si duplicano di nuovo, diventando quattro, poi otto, e così via.

Quanti batteri avremo dopo n minuti? Facile: 2^n .

In effetti, le cose non stanno proprio così.

Dopo un altro minuto i batteri si duplicano di nuovo, diventando quattro, poi otto, e così via.

Quanti batteri avremo dopo n minuti? Facile: 2^n .

In effetti, le cose non stanno proprio così.

Non tutti i batteri si riproducono nello stesso tempo: dipende da dove si trovano. Se sono nati su un terreno fertile, si riproducono prima, altrimenti aspettano o non si riproducono affatto.

Dopo un altro minuto i batteri si duplicano di nuovo, diventando quattro, poi otto, e così via.

Quanti batteri avremo dopo n minuti? Facile: 2^n .

In effetti, le cose non stanno proprio così.

Non tutti i batteri si riproducono nello stesso tempo: dipende da dove si trovano. Se sono nati su un terreno fertile, si riproducono prima, altrimenti aspettano o non si riproducono affatto.

La legge del 2^n , quindi, potrebbe essere un po' diversa.

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Quindi x_0 sarà il numero iniziale di batteri,

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Quindi x_0 sarà il numero iniziale di batteri, x_1 quello dopo (per esempio) un minuto,

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Quindi x_0 sarà il numero iniziale di batteri, x_1 quello dopo (per esempio) un minuto, x_2 quello dopo 2 minuti, ecc.

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Quindi x_0 sarà il numero iniziale di batteri, x_1 quello dopo (per esempio) un minuto, x_2 quello dopo 2 minuti, ecc.

Una quantità molto importante è questa:

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Quindi x_0 sarà il numero iniziale di batteri, x_1 quello dopo (per esempio) un minuto, x_2 quello dopo 2 minuti, ecc.

Una quantità molto importante è questa:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Quindi x_0 sarà il numero iniziale di batteri, x_1 quello dopo (per esempio) un minuto, x_2 quello dopo 2 minuti, ecc.

Una quantità molto importante è questa:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

essa si chiama *tasso di crescita* (all'istante n).

Chiamiamo allora x_n il numero di batteri al tempo n , dove l'unità di misura dipende dal fenomeno (per esempio, 1 minuto, o 1 ora, a seconda di cosa abbiamo di fronte).

Quindi x_0 sarà il numero iniziale di batteri, x_1 quello dopo (per esempio) un minuto, x_2 quello dopo 2 minuti, ecc.

Una quantità molto importante è questa:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

essa si chiama *tasso di crescita* (all'istante n).

Nel nostro esempio di poco fa, M_n era costante (cioè non dipendeva da n) e pari a 2.

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante " n più un minuto", che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante “ n più un minuto”, che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante " n più un minuto", che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

quindi $M = 2$.

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante “ n più un minuto”, che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

quindi $M = 2$.

Vogliamo verificare ora che questa formula predice la stessa legge che abbiamo detto intuitivamente prima.

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante “ n più un minuto”, che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

quindi $M = 2$.

Vogliamo verificare ora che questa formula predice la stessa legge che abbiamo detto intuitivamente prima. Scriviamola così:

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante " n più un minuto", che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

quindi $M = 2$.

Vogliamo verificare ora che questa formula predice la stessa legge che abbiamo detto intuitivamente prima. Scriviamola così:

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante " n più un minuto", che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

quindi $M = 2$.

Vogliamo verificare ora che questa formula predice la stessa legge che abbiamo detto intuitivamente prima. Scriviamola così:

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Quanti batteri avevamo all'inizio?

Infatti, se *ogni* batterio si raddoppia dopo un minuto, all'istante “ n più un minuto”, che è $n + 1$, si avrà un numero *doppio* di batteri di quello che si aveva all'istante n :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

quindi $M = 2$.

Vogliamo verificare ora che questa formula predice la stessa legge che abbiamo detto intuitivamente prima. Scriviamola così:

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Quanti batteri avevamo all'inizio? Uno, quindi $x_0 = 1$.

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

$$x_1 = 2x_0$$

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

$$x_1 = 2x_0$$

e dunque $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

$$x_1 = 2x_0$$

e dunque $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Adesso scriviamo la legge $x_{n+1} = 2x_n$ per $n = 1$:

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

$$x_1 = 2x_0$$

e dunque $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Adesso scriviamo la legge $x_{n+1} = 2x_n$ per $n = 1$:

$$x_2 = 2x_1$$

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

$$x_1 = 2x_0$$

e dunque $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Adesso scriviamo la legge $x_{n+1} = 2x_n$ per $n = 1$:

$$x_2 = 2x_1$$

e siccome x_1 valeva 2, avremo $x_2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

$$x_1 = 2x_0$$

e dunque $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Adesso scriviamo la legge $x_{n+1} = 2x_n$ per $n = 1$:

$$x_2 = 2x_1$$

e siccome x_1 valeva 2, avremo $x_2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Poi continuiamo:

Ora, la legge (scritta per $n = 0$) dice che

$$x_1 = 2x_0$$

e dunque $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Adesso scriviamo la legge $x_{n+1} = 2x_n$ per $n = 1$:

$$x_2 = 2x_1$$

e siccome x_1 valeva 2, avremo $x_2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Poi continuiamo: Per $n = 2$ la legge dà $x_3 = 2x_2$, e siccome x_2 era 4, avremo che x_3 fa 8, e così via.

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} =$$

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}$$

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1?

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto?

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto? Proviamo con $x_0 = 10$ batteri.

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto? Proviamo con $x_0 = 10$ batteri.

Dopo il primo minuto saranno 20,

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto? Proviamo con $x_0 = 10$ batteri.

Dopo il primo minuto saranno 20, poi 40,

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto? Proviamo con $x_0 = 10$ batteri.

Dopo il primo minuto saranno 20, poi 40, poi 80,

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto? Proviamo con $x_0 = 10$ batteri.

Dopo il primo minuto saranno 20, poi 40, poi 80, poi 160...

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto? Proviamo con $x_0 = 10$ batteri.

Dopo il primo minuto saranno 20, poi 40, poi 80, poi 160... riusciamo ad intravedere una legge?

Quindi, la nostra legge $x_{n+1} = 2x_n$ dice in sostanza di moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Possiamo anche verificare che la formula $x_n = 2^n$ soddisfa la nostra legge per *ogni* n .

Infatti se $x_n = 2^n$, allora $x_{n+1} = 2^{n+1}$, e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

cioè proprio $x_{n+1} = 2x_n$.

E se il numero iniziale di batteri non è 1? Cambierà di molto? Proviamo con $x_0 = 10$ batteri.

Dopo il primo minuto saranno 20, poi 40, poi 80, poi 160... riusciamo ad intravedere una legge?

Sì, è $x_n = 10 \cdot 2^n$.

Ma questa formula soddisfa la nostra legge?

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo...

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$,

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!)

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} =$$

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} =$$

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}$$

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

e quindi come prima $x_{n+1} = 2x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

e quindi come prima $x_{n+1} = 2x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma allora abbiamo capito:

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

e quindi come prima $x_{n+1} = 2x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma allora abbiamo capito: se il numero iniziale di batteri è a , la formula sarà

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

e quindi come prima $x_{n+1} = 2x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma allora abbiamo capito: se il numero iniziale di batteri è a , la formula sarà

$$x_n = a \cdot 2^n.$$

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

e quindi come prima $x_{n+1} = 2x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma allora abbiamo capito: se il numero iniziale di batteri è a , la formula sarà

$$x_n = a \cdot 2^n.$$

Come abbiamo detto prima, però, non sempre i batteri sono ugualmente efficienti o “sincronizzati”, per cui capita di avere un tasso di crescita diverso da 2 (in genere inferiore a 2). Cosa fare in questo caso?

Ma questa formula soddisfa la nostra legge? Vediamo... $x_n = 10 \cdot 2^n$, per cui $x_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1}$ (il 10 non va raddoppiato!) e quindi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{10 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

e quindi come prima $x_{n+1} = 2x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma allora abbiamo capito: se il numero iniziale di batteri è a , la formula sarà

$$x_n = a \cdot 2^n.$$

Come abbiamo detto prima, però, non sempre i batteri sono ugualmente efficienti o “sincronizzati”, per cui capita di avere un tasso di crescita diverso da 2 (in genere inferiore a 2). Cosa fare in questo caso?

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo.

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M,$$

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M,$$

la riscriviamo

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M,$$

la riscriviamo

$$x_{n+1} = M x_n$$

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M,$$

la riscriviamo

$$x_{n+1} = M x_n$$

e stavolta ci dirà di moltiplicare *per* M ad ogni passo.

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M,$$

la riscriviamo

$$x_{n+1} = M x_n$$

e stavolta ci dirà di moltiplicare *per* M ad ogni passo. Quindi non ci aspettiamo altro che una formula con M al posto di 2:

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M,$$

la riscriviamo

$$x_{n+1} = M x_n$$

e stavolta ci dirà di moltiplicare *per* M ad ogni passo. Quindi non ci aspettiamo altro che una formula con M al posto di 2:

$$x_n = a \cdot M^n$$

Non è difficile: la nostra formula ora ci aiuta, perché abbiamo capito che essa non faceva altro che moltiplicare per 2 ad ogni passo. Ma se essa diviene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M,$$

la riscriviamo

$$x_{n+1} = M x_n$$

e stavolta ci dirà di moltiplicare *per* M ad ogni passo. Quindi non ci aspettiamo altro che una formula con M al posto di 2:

$$x_n = a \cdot M^n$$

dove a è il numero iniziale di batteri.

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} =$$

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} =$$

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n}$$

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n} = M.$$

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n} = M.$$

Facciamo un esempio: per una data specie di batteri si stima che M valga 1,28, che l'unità di misura del tempo sia l'ora, e che si parta con una popolazione di 10 000 batteri.

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n} = M.$$

Facciamo un esempio: per una data specie di batteri si stima che M valga 1,28, che l'unità di misura del tempo sia l'ora, e che si parta con una popolazione di 10 000 batteri. Quanti batteri avremo dopo 24 ore?

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n} = M.$$

Facciamo un esempio: per una data specie di batteri si stima che M valga 1,28, che l'unità di misura del tempo sia l'ora, e che si parta con una popolazione di 10 000 batteri. Quanti batteri avremo dopo 24 ore?

La formula generale

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n} = M.$$

Facciamo un esempio: per una data specie di batteri si stima che M valga 1,28, che l'unità di misura del tempo sia l'ora, e che si parta con una popolazione di 10 000 batteri. Quanti batteri avremo dopo 24 ore?

La formula generale

$$x_n = a \cdot M^n$$

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n} = M.$$

Facciamo un esempio: per una data specie di batteri si stima che M valga 1,28, che l'unità di misura del tempo sia l'ora, e che si parta con una popolazione di 10 000 batteri. Quanti batteri avremo dopo 24 ore?

La formula generale

$$x_n = a \cdot M^n$$

dice che, se $n = 24$, $M = 1,28$ e $a = 10\,000$

Anche questa formula funziona. Infatti stavolta la legge è

$$x_{n+1} = M x_n$$

e infatti

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a \cdot M^{n+1}}{a \cdot M^n} = \frac{M^{n+1}}{M^n} = M.$$

Facciamo un esempio: per una data specie di batteri si stima che M valga 1,28, che l'unità di misura del tempo sia l'ora, e che si parta con una popolazione di 10 000 batteri. Quanti batteri avremo dopo 24 ore?

La formula generale

$$x_n = a \cdot M^n$$

dice che, se $n = 24$, $M = 1,28$ e $a = 10\,000$

$$x_{24} = 10\,000 \cdot (1,28)^{24} = 3\,741\,444,2 \text{ batteri.}$$

Un momento! Cosa vuol dire “4 virgola 2 batteri”? C'è qualcosa di sbagliato?

Un momento! Cosa vuol dire “4 virgola 2 batteri”? C'è qualcosa di sbagliato? No, è che probabilmente il valore di M dato dal laboratorio, pari a 1,28, non è proprio esatto.

Un momento! Cosa vuol dire “4 virgola 2 batteri”? C'è qualcosa di sbagliato? No, è che probabilmente il valore di M dato dal laboratorio, pari a 1,28, non è proprio esatto. Per esempio, se fosse stato 1,27 avremmo avuto 3 099 483 batteri, che sono quasi 700 000 in meno, a significare che anche un piccolo errore su M può provocare un grande errore dopo poco tempo.

Quindi, se anche troveremo dei valori non interi, approssimeremo sempre all'intero più vicino.

Un momento! Cosa vuol dire “4 virgola 2 batteri”? C'è qualcosa di sbagliato? No, è che probabilmente il valore di M dato dal laboratorio, pari a 1,28, non è proprio esatto. Per esempio, se fosse stato 1,27 avremmo avuto 3 099 483 batteri, che sono quasi 700 000 in meno, a significare che anche un piccolo errore su M può provocare un grande errore dopo poco tempo.

Quindi, se anche troveremo dei valori non interi, approssimeremo sempre all'intero più vicino.

Facciamo un altro esempio. Supponiamo stavolta di partire con 100 000 batteri e di avere $M = 0,87$, sempre con l'unità di tempo di un'ora, e ci chiediamo nuovamente di sapere quanti batteri avremo dopo 24 ore.

Un momento! Cosa vuol dire “4 virgola 2 batteri”? C'è qualcosa di sbagliato? No, è che probabilmente il valore di M dato dal laboratorio, pari a 1,28, non è proprio esatto. Per esempio, se fosse stato 1,27 avremmo avuto 3 099 483 batteri, che sono quasi 700 000 in meno, a significare che anche un piccolo errore su M può provocare un grande errore dopo poco tempo.

Quindi, se anche troveremo dei valori non interi, approssimeremo sempre all'intero più vicino.

Facciamo un altro esempio. Supponiamo stavolta di partire con 100 000 batteri e di avere $M = 0,87$, sempre con l'unità di tempo di un'ora, e ci chiediamo nuovamente di sapere quanti batteri avremo dopo 24 ore.

La formula stavolta ci dice, con $M = 0,87$, $a = 100\,000$ e $n = 24$,

Un momento! Cosa vuol dire “4 virgola 2 batteri”? C'è qualcosa di sbagliato? No, è che probabilmente il valore di M dato dal laboratorio, pari a 1,28, non è proprio esatto. Per esempio, se fosse stato 1,27 avremmo avuto 3 099 483 batteri, che sono quasi 700 000 in meno, a significare che anche un piccolo errore su M può provocare un grande errore dopo poco tempo.

Quindi, se anche troveremo dei valori non interi, approssimeremo sempre all'intero più vicino.

Facciamo un altro esempio. Supponiamo stavolta di partire con 100 000 batteri e di avere $M = 0,87$, sempre con l'unità di tempo di un'ora, e ci chiediamo nuovamente di sapere quanti batteri avremo dopo 24 ore.

La formula stavolta ci dice, con $M = 0,87$, $a = 100\,000$ e $n = 24$,

$$x_{24} = 100\,000 \cdot (0,87)^{24} = 3535 \text{ batteri.}$$

Un momento! Cosa vuol dire “4 virgola 2 batteri”? C'è qualcosa di sbagliato? No, è che probabilmente il valore di M dato dal laboratorio, pari a 1,28, non è proprio esatto. Per esempio, se fosse stato 1,27 avremmo avuto 3 099 483 batteri, che sono quasi 700 000 in meno, a significare che anche un piccolo errore su M può provocare un grande errore dopo poco tempo.

Quindi, se anche troveremo dei valori non interi, approssimeremo sempre all'intero più vicino.

Facciamo un altro esempio. Supponiamo stavolta di partire con 100 000 batteri e di avere $M = 0,87$, sempre con l'unità di tempo di un'ora, e ci chiediamo nuovamente di sapere quanti batteri avremo dopo 24 ore.

La formula stavolta ci dice, con $M = 0,87$, $a = 100\,000$ e $n = 24$,

$$x_{24} = 100\,000 \cdot (0,87)^{24} = 3535 \quad \text{batteri.}$$

Cosa è successo? Stavolta i batteri sono diminuiti, mentre prima erano aumentati. Come possiamo spiegare tutto ciò?

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Quello che la nostra legge dice, cioè che $x_{n+1} = Mx_n$, è che se $M < 1$ (s'intende che M è positivo e non nullo), allora $Mx_n < x_n$, per cui

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Quello che la nostra legge dice, cioè che $x_{n+1} = Mx_n$, è che se $M < 1$ (s'intende che M è positivo e non nullo), allora $Mx_n < x_n$, per cui

$$x_{n+1} = Mx_n < x_n.$$

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Quello che la nostra legge dice, cioè che $x_{n+1} = Mx_n$, è che se $M < 1$ (s'intende che M è positivo e non nullo), allora $Mx_n < x_n$, per cui

$$x_{n+1} = Mx_n < x_n.$$

Questo dice che la popolazione di batteri *decresce* ad ogni passo.

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Quello che la nostra legge dice, cioè che $x_{n+1} = Mx_n$, è che se $M < 1$ (s'intende che M è positivo e non nullo), allora $Mx_n < x_n$, per cui

$$x_{n+1} = Mx_n < x_n.$$

Questo dice che la popolazione di batteri *decresce* ad ogni passo.

Continuiamo con l'esempio. Aspettiamo ancora un giorno, e vediamo quanti batteri abbiamo.

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Quello che la nostra legge dice, cioè che $x_{n+1} = Mx_n$, è che se $M < 1$ (s'intende che M è positivo e non nullo), allora $Mx_n < x_n$, per cui

$$x_{n+1} = Mx_n < x_n.$$

Questo dice che la popolazione di batteri *decresce* ad ogni passo.

Continuiamo con l'esempio. Aspettiamo ancora un giorno, e vediamo quanti batteri abbiamo. Possiamo fare due cose: o partire con 3535 batteri e contare di nuovo 24 ore, oppure ripartire da 100 000 batteri e usare la formula per $n = 48$ ore.

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Quello che la nostra legge dice, cioè che $x_{n+1} = Mx_n$, è che se $M < 1$ (s'intende che M è positivo e non nullo), allora $Mx_n < x_n$, per cui

$$x_{n+1} = Mx_n < x_n.$$

Questo dice che la popolazione di batteri *decresce* ad ogni passo.

Continuiamo con l'esempio. Aspettiamo ancora un giorno, e vediamo quanti batteri abbiamo. Possiamo fare due cose: o partire con 3535 batteri e contare di nuovo 24 ore, oppure ripartire da 100 000 batteri e usare la formula per $n = 48$ ore. Il risultato è lo stesso, e vale

Il motivo del calo è che M è, in quest'ultimo caso, inferiore a 1.

Quello che la nostra legge dice, cioè che $x_{n+1} = Mx_n$, è che se $M < 1$ (s'intende che M è positivo e non nullo), allora $Mx_n < x_n$, per cui

$$x_{n+1} = Mx_n < x_n.$$

Questo dice che la popolazione di batteri *decresce* ad ogni passo.

Continuiamo con l'esempio. Aspettiamo ancora un giorno, e vediamo quanti batteri abbiamo. Possiamo fare due cose: o partire con 3535 batteri e contare di nuovo 24 ore, oppure ripartire da 100 000 batteri e usare la formula per $n = 48$ ore. Il risultato è lo stesso, e vale

$$x_{48} = 125 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo un altro giorno, troviamo

Se aspettiamo un altro giorno, troviamo

$$x_{48} = 4 \text{ batteri,}$$

Se aspettiamo un altro giorno, troviamo

$$x_{48} = 4 \text{ batteri,}$$

e, un giorno dopo ancora, il numero previsto dalla formula scende sotto 1, per cui i batteri sono tutti morti.

Se aspettiamo un altro giorno, troviamo

$$x_{48} = 4 \text{ batteri,}$$

e, un giorno dopo ancora, il numero previsto dalla formula scende sotto 1, per cui i batteri sono tutti morti.

Possiamo essere sicuri di questo? C'è un teorema:

Se aspettiamo un altro giorno, troviamo

$$x_{48} = 4 \text{ batteri,}$$

e, un giorno dopo ancora, il numero previsto dalla formula scende sotto 1, per cui i batteri sono tutti morti.

Possiamo essere sicuri di questo? C'è un teorema:

Teorema

Nel modello con tasso di crescita costante, $M > 1$ il numero dei batteri cresce senza limite (*esplosione*), se $M = 1$ rimane costante, mentre se $0 < M < 1$ decresce fino a zero (*estinzione*).

(è sottinteso che il numero iniziale a dei batteri non è zero, altrimenti ovviamente non succede nulla).

Approfondimento

Dimostriamo questo teorema.

Approfondimento

Dimostriamo questo teorema.

Cominciamo con il caso $M > 1$. Siccome M è *strettamente* maggiore di 1, possiamo scrivere così:

Approfondimento

Dimostriamo questo teorema.

Cominciamo con il caso $M > 1$. Siccome M è *strettamente* maggiore di 1, possiamo scrivere così:

$$M = 1 + b, \quad b > 0.$$

Approfondimento

Dimostriamo questo teorema.

Cominciamo con il caso $M > 1$. Siccome M è *strettamente* maggiore di 1, possiamo scrivere così:

$$M = 1 + b, \quad b > 0.$$

Adesso dobbiamo calcolare M^n , cioè $(1 + b)^n$.

Approfondimento

Dimostriamo questo teorema.

Cominciamo con il caso $M > 1$. Siccome M è *strettamente* maggiore di 1, possiamo scrivere così:

$$M = 1 + b, \quad b > 0.$$

Adesso dobbiamo calcolare M^n , cioè $(1 + b)^n$.

Se ci ricordiamo della formula della potenza di un binomio $(a + b)^n$, i primi due termini erano sempre a^n e $na^{n-1}b$:

Approfondimento

Dimostriamo questo teorema.

Cominciamo con il caso $M > 1$. Siccome M è *strettamente* maggiore di 1, possiamo scrivere così:

$$M = 1 + b, \quad b > 0.$$

Adesso dobbiamo calcolare M^n , cioè $(1 + b)^n$.

Se ci ricordiamo della formula della potenza di un binomio $(a + b)^n$, i primi due termini erano sempre a^n e $na^{n-1}b$:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + \dots$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + \dots$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + \dots$$

...

Approfondimento

Quindi, in generale,

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \text{altri termini } \textit{strettamente positivi}$$

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \text{altri termini } \textit{strettamente positivi}$$

perché $a = 1$ e $b > 0$.

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \text{altri termini } \textit{strettamente positivi}$$

perché $a = 1$ e $b > 0$. Ma allora

$$(1 + b)^n > 1 + nb.$$

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \text{altri termini } \textit{strettamente positivi}$$

perché $a = 1$ e $b > 0$. Ma allora

$$(1 + b)^n > 1 + nb.$$

Adesso ripassiamo un'altra proprietà, la *proprietà di Archimede*, la quale dice che se $b > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $Nb > 1$.

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \text{altri termini } \textit{strettamente positivi}$$

perché $a = 1$ e $b > 0$. Ma allora

$$(1 + b)^n > 1 + nb.$$

Adesso ripassiamo un'altra proprietà, la *proprietà di Archimede*, la quale dice che se $b > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $Nb > 1$.

Allora

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \text{altri termini } \textit{strettamente positivi}$$

perché $a = 1$ e $b > 0$. Ma allora

$$(1 + b)^n > 1 + nb.$$

Adesso ripassiamo un'altra proprietà, la *proprietà di Archimede*, la quale dice che se $b > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $Nb > 1$.

Allora

$$(1 + b)^N > 1 + Nb > 2.$$

Approfondimento

Quindi, in generale,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini.}$$

Adesso, se poniamo $a = 1$, troviamo

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \text{altri termini } \textit{strettamente positivi}$$

perché $a = 1$ e $b > 0$. Ma allora

$$(1 + b)^n > 1 + nb.$$

Adesso ripassiamo un'altra proprietà, la *proprietà di Archimede*, la quale dice che se $b > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $Nb > 1$.

Allora

$$(1 + b)^N > 1 + Nb > 2.$$

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2,

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4.

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8,

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8, poi di 16,

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8, poi di 16, poi di 32

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8, poi di 16, poi di 32 e così via, crescendo senza limite.

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8, poi di 16, poi di 32 e così via, crescendo senza limite.

Se invece $M = 1$ la cosa è facile:

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8, poi di 16, poi di 32 e così via, crescendo senza limite.

Se invece $M = 1$ la cosa è facile: la formula dice che

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8, poi di 16, poi di 32 e così via, crescendo senza limite.

Se invece $M = 1$ la cosa è facile: la formula dice che

$$x_n = aM^n = a \cdot 1^n = a$$

Approfondimento

Torniamo allora alla nostra formula. Abbiamo

$$x_n = aM^n.$$

Partiamo col valore iniziale più piccolo possibile, cioè $a = 1$. Se aspettiamo N unità di tempo, avremo

$$x_N = M^N = (1 + b)^N > 2 \text{ batteri.}$$

Se aspettiamo ora altre N unità di tempo, stiamo partendo da un numero > 2 di batteri, e dobbiamo moltiplicare nuovamente per M^N che è maggiore di 2, per cui saranno più di 4. Dopo altre N unità di tempo questo valore sarà maggiore di 8, poi di 16, poi di 32 e così via, crescendo senza limite.

Se invece $M = 1$ la cosa è facile: la formula dice che

$$x_n = aM^n = a \cdot 1^n = a$$

e quindi il valore rimane uguale a quello di partenza.

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così:

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

$$\frac{x_n}{M^n} = a$$

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

$$\frac{x_n}{M^n} = a$$

e poi

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

$$\frac{x_n}{M^n} = a$$

e poi

$$x_n m^n = a.$$

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

$$\frac{x_n}{M^n} = a$$

e poi

$$x_n m^n = a.$$

Supponiamo ora *per assurdo* che x_n resti sempre maggiore di 1, per tutti gli n possibili.

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

$$\frac{x_n}{M^n} = a$$

e poi

$$x_n m^n = a.$$

Supponiamo ora *per assurdo* che x_n resti sempre maggiore di 1, per tutti gli n possibili. Dalla formula appena scritta discende che

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

$$\frac{x_n}{M^n} = a$$

e poi

$$x_n m^n = a.$$

Supponiamo ora *per assurdo* che x_n resti sempre maggiore di 1, per tutti gli n possibili. Dalla formula appena scritta discende che

$$a = x_n m^n > m^n.$$

Approfondimento

Infine, se $0 < M < 1$, ragioniamo così: poniamo

$$m = \frac{1}{M}.$$

Questo numero è maggiore di 1.

Riscriviamo la nostra formula fondamentale così:

$$\frac{x_n}{M^n} = a$$

e poi

$$x_n m^n = a.$$

Supponiamo ora *per assurdo* che x_n resti sempre maggiore di 1, per tutti gli n possibili. Dalla formula appena scritta discende che

$$a = x_n m^n > m^n.$$

Di nuovo, siccome stavolta $m > 1$, possiamo scriverlo nella forma $m = 1 + b$ con $b > 0$, e usare lo stesso ragionamento di prima:

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n =$$

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n$$

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Questa formula è vera per ogni n .

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Questa formula è vera per ogni n . Adesso prendiamo n intero positivo tale che

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Questa formula è vera per ogni n . Adesso prendiamo n intero positivo tale che

$$n > \frac{a}{b}.$$

Dunque, per questo n succede che

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Questa formula è vera per ogni n . Adesso prendiamo n intero positivo tale che

$$n > \frac{a}{b}.$$

Dunque, per questo n succede che

$$a > 1 + nb$$

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Questa formula è vera per ogni n . Adesso prendiamo n intero positivo tale che

$$n > \frac{a}{b}.$$

Dunque, per questo n succede che

$$a > 1 + nb > 1 + \frac{a}{b}b = 1 + a$$

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Questa formula è vera per ogni n . Adesso prendiamo n intero positivo tale che

$$n > \frac{a}{b}.$$

Dunque, per questo n succede che

$$a > 1 + nb > 1 + \frac{a}{b}b = 1 + a$$

e dunque $a > 1 + a$, ossia $0 > 1$, che è assurdo.

Approfondimento

$$a = x_n m^n > m^n = (1 + b)^n > 1 + nb.$$

Questa formula è vera per ogni n . Adesso prendiamo n intero positivo tale che

$$n > \frac{a}{b}.$$

Dunque, per questo n succede che

$$a > 1 + nb > 1 + \frac{a}{b}b = 1 + a$$

e dunque $a > 1 + a$, ossia $0 > 1$, che è assurdo.

Quindi abbiamo che prima o poi x_n scende sotto 1, ossia tutti i batteri muoiono. ■

Mentre l'estinzione è un fenomeno ragionevolmente possibile, l'esplosione può avvenire solo per tempi limitati, perché le colture di batteri non hanno una quantità di cibo illimitata a loro disposizione.

Mentre l'estinzione è un fenomeno ragionevolmente possibile, l'esplosione può avvenire solo per tempi limitati, perché le colture di batteri non hanno una quantità di cibo illimitata a loro disposizione.

Di fatto, se si vuol tener conto della disponibilità di cibo, spesso si fa un'ipotesi diversa circa il tasso di crescita M_n :

Mentre l'estinzione è un fenomeno ragionevolmente possibile, l'esplosione può avvenire solo per tempi limitati, perché le colture di batteri non hanno una quantità di cibo illimitata a loro disposizione.

Di fatto, se si vuol tener conto della disponibilità di cibo, spesso si fa un'ipotesi diversa circa il tasso di crescita M_n : *lo si suppone dipendente dalla popolazione*. Più precisamente, si suppone che se la popolazione *aumenta*, il tasso di crescita *diminuisce*.

Mentre l'estinzione è un fenomeno ragionevolmente possibile, l'esplosione può avvenire solo per tempi limitati, perché le colture di batteri non hanno una quantità di cibo illimitata a loro disposizione.

Di fatto, se si vuol tener conto della disponibilità di cibo, spesso si fa un'ipotesi diversa circa il tasso di crescita M_n : *lo si suppone dipendente dalla popolazione*. Più precisamente, si suppone che se la popolazione *aumenta*, il tasso di crescita *diminuisce*.

L'ipotesi più semplice è pensare che il tasso di crescita sia dato da un valore di riferimento m , *meno* il valore della popolazione, moltiplicato per un coefficiente positivo k :

Mentre l'estinzione è un fenomeno ragionevolmente possibile, l'esplosione può avvenire solo per tempi limitati, perché le colture di batteri non hanno una quantità di cibo illimitata a loro disposizione.

Di fatto, se si vuol tener conto della disponibilità di cibo, spesso si fa un'ipotesi diversa circa il tasso di crescita M_n : *lo si suppone dipendente dalla popolazione*. Più precisamente, si suppone che se la popolazione *aumenta*, il tasso di crescita *diminuisce*.

L'ipotesi più semplice è pensare che il tasso di crescita sia dato da un valore di riferimento m , *meno* il valore della popolazione, moltiplicato per un coefficiente positivo k :

$$M_n = m - kx_n.$$

Quindi la nostra equazione fondamentale

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente.

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente.

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

$$y_n = kx_n$$

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

$$y_n = kx_n$$

per cui $x_n = y_n/k$

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

$$y_n = kx_n$$

per cui $x_n = y_n/k$ e

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

$$y_n = kx_n$$

per cui $x_n = y_n/k$ e

$$y_{n+1} = kx_{n+1} =$$

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

$$y_n = kx_n$$

per cui $x_n = y_n/k$ e

$$y_{n+1} = kx_{n+1} = k(m - kx_n)x_n =$$

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

$$y_n = kx_n$$

per cui $x_n = y_n/k$ e

$$y_{n+1} = kx_{n+1} = k(m - kx_n)x_n = k(m - y_n)\frac{y_n}{k} =$$

Quindi la nostra equazione fondamentale

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = M_n$$

diventa

$$x_{n+1} = (m - kx_n)x_n.$$

Questa equazione è *molto* più difficile della precedente. Vediamo di trasformarla in un modo conveniente. Poniamo

$$y_n = kx_n$$

per cui $x_n = y_n/k$ e

$$y_{n+1} = kx_{n+1} = k(m - kx_n)x_n = k(m - y_n)\frac{y_n}{k} = (m - y_n)y_n.$$

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito;
conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un
nome

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito; conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un nome

Definizione

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito; conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un nome

Definizione

La legge

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito; conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un nome

Definizione

La legge

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito; conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un nome

Definizione

La legge

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

si chiama *legge logistica*.

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito; conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un nome

Definizione

La legge

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

si chiama *legge logistica*.

Vediamo se riusciamo a scoprire qualcosa su questa nuova legge.

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito; conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un nome

Definizione

La legge

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

si chiama *legge logistica*.

Vediamo se riusciamo a scoprire qualcosa su questa nuova legge. Cominciamo a chiederci:

Questa legge è più semplice perché ora il coefficiente a è sparito; conviene, per abitudine, riscriverla con le x al posto delle y e darle un nome

Definizione

La legge

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

si chiama *legge logistica*.

Vediamo se riusciamo a scoprire qualcosa su questa nuova legge. Cominciamo a chiederci: ci sono dei valori della popolazione che restano *costanti*?

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così:

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

$$x_{n+1} = x_n.$$

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

$$x_{n+1} = x_n.$$

Dunque, che succede? Succede che dopo un'unità di tempo la popolazione non è cambiata.

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

$$x_{n+1} = x_n.$$

Dunque, che succede? Succede che dopo un'unità di tempo la popolazione non è cambiata. Ma allora, siccome $x_n = x_{n+1}$, avremo che

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

$$x_{n+1} = x_n.$$

Dunque, che succede? Succede che dopo un'unità di tempo la popolazione non è cambiata. Ma allora, siccome $x_n = x_{n+1}$, avremo che

$$(m - x_{n+1})x_{n+1} = x_{n+1}$$

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

$$x_{n+1} = x_n.$$

Dunque, che succede? Succede che dopo un'unità di tempo la popolazione non è cambiata. Ma allora, siccome $x_n = x_{n+1}$, avremo che

$$(m - x_{n+1})x_{n+1} = x_{n+1}$$

e dunque

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

$$x_{n+1} = x_n.$$

Dunque, che succede? Succede che dopo un'unità di tempo la popolazione non è cambiata. Ma allora, siccome $x_n = x_{n+1}$, avremo che

$$(m - x_{n+1})x_{n+1} = x_{n+1}$$

e dunque

$$x_{n+2} = x_{n+1}$$

Per rispondere a questa domanda, ragioniamo così: supponiamo che per un dato valore x_n si abbia

$$(m - x_n)x_n = x_n.$$

Siccome il primo membro è x_{n+1} , da questa uguaglianza segue

$$x_{n+1} = x_n.$$

Dunque, che succede? Succede che dopo un'unità di tempo la popolazione non è cambiata. Ma allora, siccome $x_n = x_{n+1}$, avremo che

$$(m - x_{n+1})x_{n+1} = x_{n+1}$$

e dunque

$$x_{n+2} = x_{n+1}$$

e quindi la popolazione resta costante anche dopo *due* unità di tempo.

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante.

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*.

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*.

Abbiamo quindi trovato che i valori costanti della popolazione (che chiamiamo x) devono verificare l'equazione

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*.

Abbiamo quindi trovato che i valori costanti della popolazione (che chiamiamo x) devono verificare l'equazione

$$(m - x)x = x.$$

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*.

Abbiamo quindi trovato che i valori costanti della popolazione (che chiamiamo x) devono verificare l'equazione

$$(m - x)x = x.$$

Questa equazione è spuria; la riscriviamo

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*.

Abbiamo quindi trovato che i valori costanti della popolazione (che chiamiamo x) devono verificare l'equazione

$$(m - x)x = x.$$

Questa equazione è spuria; la riscriviamo

$$x(m - 1 - x) = 0$$

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*.

Abbiamo quindi trovato che i valori costanti della popolazione (che chiamiamo x) devono verificare l'equazione

$$(m - x)x = x.$$

Questa equazione è spuria; la riscriviamo

$$x(m - 1 - x) = 0$$

e quindi ammette le soluzioni $x = 0$,

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*.

Abbiamo quindi trovato che i valori costanti della popolazione (che chiamiamo x) devono verificare l'equazione

$$(m - x)x = x.$$

Questa equazione è spuria; la riscriviamo

$$x(m - 1 - x) = 0$$

e quindi ammette le soluzioni $x = 0$, $x = m - 1$.

Continuando con questo ragionamento, si trova che la popolazione resta costante. Ovviamente, invece, se

$$(m - x_n)x_n \neq x_n.$$

troviamo che $x_{n+1} \neq x_n$, e quindi la popolazione *cambia*. Abbiamo quindi trovato che i valori costanti della popolazione (che chiamiamo x) devono verificare l'equazione

$$(m - x)x = x.$$

Questa equazione è spuria; la riscriviamo

$$x(m - 1 - x) = 0$$

e quindi ammette le soluzioni $x = 0$, $x = m - 1$. Vediamo ora due casi.

Primo caso: $0 < m < 1$.

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema.

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso?

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n =$$

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione*.

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Dunque avremo, se $x_0 = a \neq 0$

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Dunque avremo, se $x_0 = a \neq 0$ (se $a = 0$ la popolazione resta costantemente nulla)

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Dunque avremo, se $x_0 = a \neq 0$ (se $a = 0$ la popolazione resta costantemente nulla)

$$x_1 < mx_0 = ma,$$

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Dunque avremo, se $x_0 = a \neq 0$ (se $a = 0$ la popolazione resta costantemente nulla)

$$x_1 < mx_0 = ma, \quad x_2 < mx_1 < m(ma) = m^2a,$$

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Dunque avremo, se $x_0 = a \neq 0$ (se $a = 0$ la popolazione resta costantemente nulla)

$$x_1 < mx_0 = ma, \quad x_2 < mx_1 < m(ma) = m^2a,$$

$$x_3 < mx_2 < m(m^2a) =$$

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Dunque avremo, se $x_0 = a \neq 0$ (se $a = 0$ la popolazione resta costantemente nulla)

$$x_1 < mx_0 = ma, \quad x_2 < mx_1 < m(ma) = m^2a,$$

$$x_3 < mx_2 < m(m^2a) = m^3a$$

Primo caso: $0 < m < 1$.

In questo caso la soluzione $x = m - 1$ è negativa, e quindi non ha senso per il nostro problema. Dunque l'unica possibile soluzione di equilibrio è zero.

Cosa succede in questo caso? La cosa è molto più difficile ora, perché non abbiamo una formula come $x_n = aM^n$ ad aiutarci.

Possiamo però dimostrare che *in questo caso la popolazione decresce e diventa sempre più piccola, cioè si ha estinzione.*

Infatti si vede subito che, siccome $x_n^2 > 0$, abbiamo

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n = mx_n - x_n^2 < mx_n.$$

Dunque avremo, se $x_0 = a \neq 0$ (se $a = 0$ la popolazione resta costantemente nulla)

$$x_1 < mx_0 = ma, \quad x_2 < mx_1 < m(ma) = m^2a,$$

$$x_3 < mx_2 < m(m^2a) = m^3a \dots$$

e quindi la popolazione è *minore* di quella che si avrebbe con tasso costante.

Però il tasso m è minore di 1, e quindi per quanto visto prima abbiamo che la popolazione di batteri tende a zero.

Però il tasso m è minore di 1, e quindi per quanto visto prima abbiamo che la popolazione di batteri tende a zero.

Secondo caso: $1 < m < 2$.

Però il tasso m è minore di 1, e quindi per quanto visto prima abbiamo che la popolazione di batteri tende a zero.

Secondo caso: $1 < m < 2$.

Questo caso è un po' più difficile, perché stavolta vi sono *due* possibili situazioni di equilibrio:

Però il tasso m è minore di 1, e quindi per quanto visto prima abbiamo che la popolazione di batteri tende a zero.

Secondo caso: $1 < m < 2$.

Questo caso è un po' più difficile, perché stavolta vi sono *due* possibili situazioni di equilibrio:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = m - 1.$$

Però il tasso m è minore di 1, e quindi per quanto visto prima abbiamo che la popolazione di batteri tende a zero.

Secondo caso: $1 < m < 2$.

Questo caso è un po' più difficile, perché stavolta vi sono *due* possibili situazioni di equilibrio:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = m - 1.$$

Quello che si può vedere è che

Però il tasso m è minore di 1, e quindi per quanto visto prima abbiamo che la popolazione di batteri tende a zero.

Secondo caso: $1 < m < 2$.

Questo caso è un po' più difficile, perché stavolta vi sono *due* possibili situazioni di equilibrio:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = m - 1.$$

Quello che si può vedere è che

Teorema

Nel caso $1 \leq m \leq 2$ la popolazione, partendo da un dato non nullo, si avvicina sempre più al valore $m - 1$.

Però il tasso m è minore di 1, e quindi per quanto visto prima abbiamo che la popolazione di batteri tende a zero.

Secondo caso: $1 < m < 2$.

Questo caso è un po' più difficile, perché stavolta vi sono *due* possibili situazioni di equilibrio:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = m - 1.$$

Quello che si può vedere è che

Teorema

Nel caso $1 \leq m \leq 2$ la popolazione, partendo da un dato non nullo, si avvicina sempre più al valore $m - 1$.

La dimostrazione di questo teorema è data come approfondimento.

Approfondimento

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Scriviamo x al posto di x_n per semplificare la scrittura: sviluppando i calcoli viene

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Scriviamo x al posto di x_n per semplificare la scrittura: sviluppando i calcoli viene

$$-x^2 + (m - 1)x > 0$$

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Scriviamo x al posto di x_n per semplificare la scrittura: sviluppando i calcoli viene

$$-x^2 + (m - 1)x > 0$$

ossia

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Scriviamo x al posto di x_n per semplificare la scrittura: sviluppando i calcoli viene

$$-x^2 + (m - 1)x > 0$$

ossia

$$x^2 - (m - 1)x < 0.$$

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Scriviamo x al posto di x_n per semplificare la scrittura: sviluppando i calcoli viene

$$-x^2 + (m - 1)x > 0$$

ossia

$$x^2 - (m - 1)x < 0.$$

Le soluzioni di questa disequazione sono $x = 0$, $x = m - 1$, e siccome $m > 1$, la seconda è positiva.

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Scriviamo x al posto di x_n per semplificare la scrittura: sviluppando i calcoli viene

$$-x^2 + (m - 1)x > 0$$

ossia

$$x^2 - (m - 1)x < 0.$$

Le soluzioni di questa disequazione sono $x = 0$, $x = m - 1$, e siccome $m > 1$, la seconda è positiva. Dunque la disequazione è verificata se

Approfondimento

Dimostrazione. Intanto facciamo vedere che se $m > 1$, allora se partiamo da un numero di batteri > 0 e inferiore a $m - 1$, questo numero cresce al passo successivo.

Questo è facile: poniamo $x_{n+1} > x_n$ e usiamo la legge per x_{n+1} , e troviamo

$$(m - x_n)x_n > x_n.$$

Scriviamo x al posto di x_n per semplificare la scrittura: sviluppando i calcoli viene

$$-x^2 + (m - 1)x > 0$$

ossia

$$x^2 - (m - 1)x < 0.$$

Le soluzioni di questa disequazione sono $x = 0$, $x = m - 1$, e siccome $m > 1$, la seconda è positiva. Dunque la disequazione è verificata se

$$0 < x < m - 1$$

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo.

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo. In questo caso dobbiamo vedere se

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo. In questo caso dobbiamo vedere se

$$x_{n+1} < x_n.$$

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo. In questo caso dobbiamo vedere se

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ma questo conduce alla disequazione appena vista, col verso cambiato:

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo. In questo caso dobbiamo vedere se

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ma questo conduce alla disequazione appena vista, col verso cambiato:

$$x^2 - (m - 1)x > 0$$

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo. In questo caso dobbiamo vedere se

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ma questo conduce alla disequazione appena vista, col verso cambiato:

$$x^2 - (m - 1)x > 0$$

che è verificata se $x_n < 0$, che non è possibile,

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo. In questo caso dobbiamo vedere se

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ma questo conduce alla disequazione appena vista, col verso cambiato:

$$x^2 - (m - 1)x > 0$$

che è verificata se $x_n < 0$, che non è possibile, oppure $x_n > m - 1$

Approfondimento

che significa, riscrivendo x_n al posto di x ,

$$0 < x_n < m - 1$$

che è proprio quanto abbiamo supposto.

Vediamo adesso che se $m > 1$ e se partiamo da un numero di batteri *maggiore* di $m - 1$ (quindi > 0), allora la popolazione *decresce* al passo successivo. In questo caso dobbiamo vedere se

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ma questo conduce alla disequazione appena vista, col verso cambiato:

$$x^2 - (m - 1)x > 0$$

che è verificata se $x_n < 0$, che non è possibile, oppure $x_n > m - 1$ che è proprio quanto abbiamo supposto.

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Poniamo per questo

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Poniamo per questo

$$y_n = (m - 1) - x_n.$$

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Poniamo per questo

$$y_n = (m - 1) - x_n.$$

Cerchiamo di determinare come evolve y_n . Innanzitutto

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Poniamo per questo

$$y_n = (m - 1) - x_n.$$

Cerchiamo di determinare come evolve y_n . Innanzitutto

$$y_{n+1} = (m - 1) - x_{n+1}$$

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Poniamo per questo

$$y_n = (m - 1) - x_n.$$

Cerchiamo di determinare come evolve y_n . Innanzitutto

$$y_{n+1} = (m - 1) - x_{n+1}$$

e sostituendo la legge logistica $x_{n+1} = (m - x_n)x_n$ troviamo

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Poniamo per questo

$$y_n = (m - 1) - x_n.$$

Cerchiamo di determinare come evolve y_n . Innanzitutto

$$y_{n+1} = (m - 1) - x_{n+1}$$

e sostituendo la legge logistica $x_{n+1} = (m - x_n)x_n$ troviamo

$$y_{n+1} =$$

Approfondimento

Infine, se partiamo con $m - 1$ batteri, allora questi restano gli stessi, perché $m - 1$ è una situazione di equilibrio.

Naturalmente è possibile che la popolazione *oscilli*: ossia che parta, per esempio, con un valore inferiore a $m - 1$ e che al passo successivo *superi* $m - 1$, dopodiché deve decrescere e potrebbe di nuovo tornare sotto il valore di equilibrio.

Se però $m < 2$, allora si può vedere che se $x_n < m - 1$, anche il valore successivo sarà minore di $m - 1$ (benché superiore).

Poniamo per questo

$$y_n = (m - 1) - x_n.$$

Cerchiamo di determinare come evolve y_n . Innanzitutto

$$y_{n+1} = (m - 1) - x_{n+1}$$

e sostituendo la legge logistica $x_{n+1} = (m - x_n)x_n$ troviamo

$$y_{n+1} = (m - 1) - (m - x_n)x_n.$$

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

$$x_n = (m - 1) - y_n.$$

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

$$x_n = (m - 1) - y_n.$$

Sostituiamo tutto nella relazione

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

$$x_n = (m - 1) - y_n.$$

Sostituiamo tutto nella relazione

$$y_{n+1} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

$$x_n = (m - 1) - y_n.$$

Sostituiamo tutto nella relazione

$$y_{n+1} = (m - 1) - (m - x_n)x_n$$

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

$$x_n = (m - 1) - y_n.$$

Sostituiamo tutto nella relazione

$$y_{n+1} = (m - 1) - (m - x_n)x_n$$

e troviamo

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

$$x_n = (m - 1) - y_n.$$

Sostituiamo tutto nella relazione

$$y_{n+1} = (m - 1) - (m - x_n)x_n$$

e troviamo

$$y_{n+1} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla prima relazione scritta

$$y_n = (m - 1) - x_n$$

deduciamo due conseguenze:

$$m - x_n = y_n + 1$$

$$x_n = (m - 1) - y_n.$$

Sostituiamo tutto nella relazione

$$y_{n+1} = (m - 1) - (m - x_n)x_n$$

e troviamo

$$y_{n+1} = (m - 1) - (y_n + 1)((m - 1) - y_n).$$

Approfondimento

Sviluppiamo tutti i conti, che sono facili, e giungiamo a

Approfondimento

Sviluppiamo tutti i conti, che sono facili, e giungiamo a

$$y_{n+1} = (2 - m)y_n + y_n^2$$

Approfondimento

Sviluppiamo tutti i conti, che sono facili, e giungiamo a

$$y_{n+1} = (2 - m)y_n + y_n^2$$

Da qui vediamo che se $m \leq 2$, cioè se $2 - m \geq 0$, abbiamo che da $y_n > 0$ segue $y_{n+1} > 0$, perché il secondo membro è positivo.

Approfondimento

Sviluppiamo tutti i conti, che sono facili, e giungiamo a

$$y_{n+1} = (2 - m)y_n + y_n^2$$

Da qui vediamo che se $m \leq 2$, cioè se $2 - m \geq 0$, abbiamo che da $y_n > 0$ segue $y_{n+1} > 0$, perché il secondo membro è positivo.

Ma $y_n > 0 \Rightarrow y_{n+1} > 0$ significa, sostituendo il valore di $y_n = (m - 1) - x_n$,

Approfondimento

Sviluppiamo tutti i conti, che sono facili, e giungiamo a

$$y_{n+1} = (2 - m)y_n + y_n^2$$

Da qui vediamo che se $m \leq 2$, cioè se $2 - m \geq 0$, abbiamo che da $y_n > 0$ segue $y_{n+1} > 0$, perché il secondo membro è positivo.

Ma $y_n > 0 \Rightarrow y_{n+1} > 0$ significa, sostituendo il valore di $y_n = (m - 1) - x_n$,

$$x_n < m - 1 \Rightarrow x_{n+1} < m - 1,$$

Approfondimento

Sviluppiamo tutti i conti, che sono facili, e giungiamo a

$$y_{n+1} = (2 - m)y_n + y_n^2$$

Da qui vediamo che se $m \leq 2$, cioè se $2 - m \geq 0$, abbiamo che da $y_n > 0$ segue $y_{n+1} > 0$, perché il secondo membro è positivo.

Ma $y_n > 0 \Rightarrow y_{n+1} > 0$ significa, sostituendo il valore di $y_n = (m - 1) - x_n$,

$$x_n < m - 1 \Rightarrow x_{n+1} < m - 1,$$

che è quanto abbiamo affermato.

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Ragioniamo allora intuitivamente così:

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Ragioniamo allora intuitivamente così: dalla legge logistica per x_n

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Ragioniamo allora intuitivamente così: dalla legge logistica per x_n

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Ragioniamo allora intuitivamente così: dalla legge logistica per x_n

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

se c'è un valore al quale la popolazione tende, questo deve essere vero tanto per x_n che per x_{n+1} .

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Ragioniamo allora intuitivamente così: dalla legge logistica per x_n

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

se c'è un valore al quale la popolazione tende, questo deve essere vero tanto per x_n che per x_{n+1} .

Se chiamiamo l questo “valore limite”, scopriremo quanto vale sostituendo nella legge l al posto *sia* di x_n *sia* di x_{n+1} .

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Ragioniamo allora intuitivamente così: dalla legge logistica per x_n

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

se c'è un valore al quale la popolazione tende, questo deve essere vero tanto per x_n che per x_{n+1} .

Se chiamiamo l questo “valore limite”, scopriremo quanto vale sostituendo nella legge l al posto *sia* di x_n *sia* di x_{n+1} . Quindi

Approfondimento

Quindi siamo nella seguente situazione: se partiamo con *meno* di $m - 1$ batteri, questi crescono senza superare $m - 1$, mentre se partiamo con *più* di $m - 1$ batteri, questi calano (e se scendono sotto $m - 1$, poi risaliranno senza superare $m - 1$).

Ma questo non basta per vedere che effettivamente la popolazione *si avvicina sempre più* al valore $m - 1$.

Ragioniamo allora intuitivamente così: dalla legge logistica per x_n

$$x_{n+1} = (m - x_n)x_n$$

se c'è un valore al quale la popolazione tende, questo deve essere vero tanto per x_n che per x_{n+1} .

Se chiamiamo l questo “valore limite”, scopriremo quanto vale sostituendo nella legge l al posto *sia* di x_n *sia* di x_{n+1} . Quindi

$$l = (m - l)l.$$

Approfondimento

Questa equazione equivale a

Approfondimento

Questa equazione equivale a

$$I^2 - (m - 1)I = 0$$

Approfondimento

Questa equazione equivale a

$$I^2 - (m - 1)I = 0$$

e ammette come soluzioni

Approfondimento

Questa equazione equivale a

$$l^2 - (m - 1)l = 0$$

e ammette come soluzioni $l = 0$ e $l = m - 1$.

Approfondimento

Questa equazione equivale a

$$l^2 - (m - 1)l = 0$$

e ammette come soluzioni $l = 0$ e $l = m - 1$. Ma questi sono i valori di equilibrio!

Approfondimento

Questa equazione equivale a

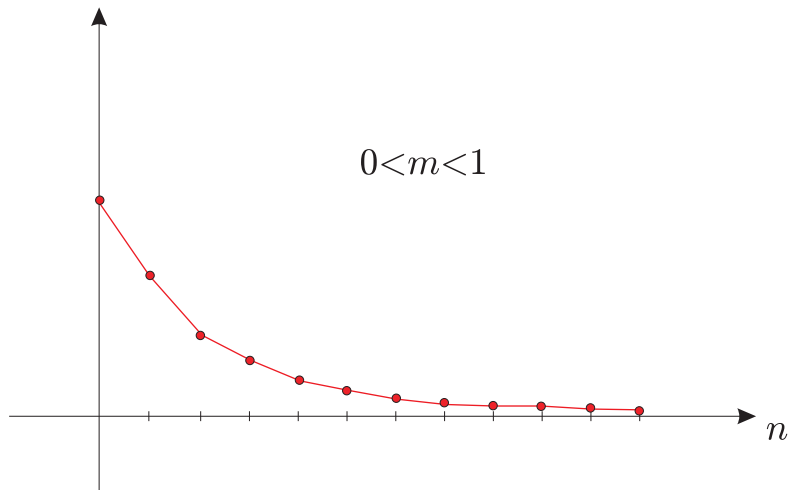
$$l^2 - (m - 1)l = 0$$

e ammette come soluzioni $l = 0$ e $l = m - 1$. Ma questi sono i valori di equilibrio! E sappiamo che la popolazione *si allontana* da zero, che se parte da un valore superiore ad $m - 1$ allora *scende* (per cui non può crescere all'infinito), e quindi deve tendere ad $m - 1$. ■

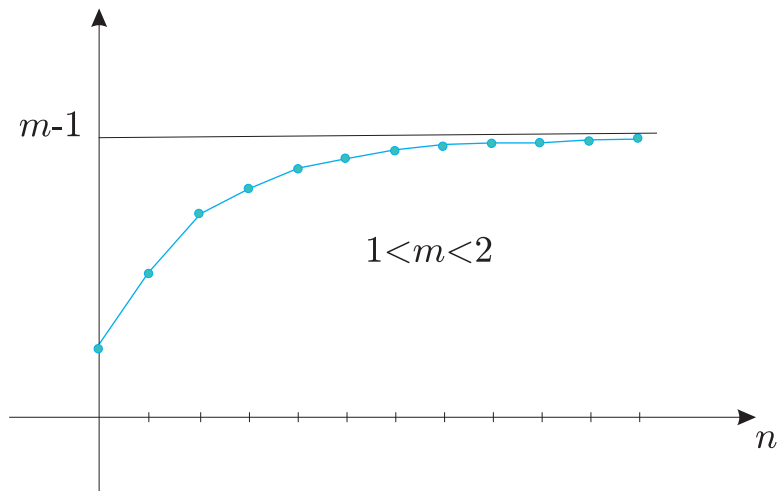
E che succede se $m \geq 2$? La cosa diventa *molto* complicata.

E che succede se $m \geq 2$? La cosa diventa *molto* complicata. Intanto il teorema che abbiamo dimostrato per $1 < m \leq 2$ si può estendere fino a $1 < m < 3$, ma stavolta vi sono delle oscillazioni, sempre più piccole, attorno a $m - 1$. Per valori ancora superiori di m è possibile *simulare* l'evoluzione dei batteri in modo semplice con un computer, perché, noto il valore iniziale dei batteri, si tratta di usare sempre la stessa formula per trovare i numeri successivi.

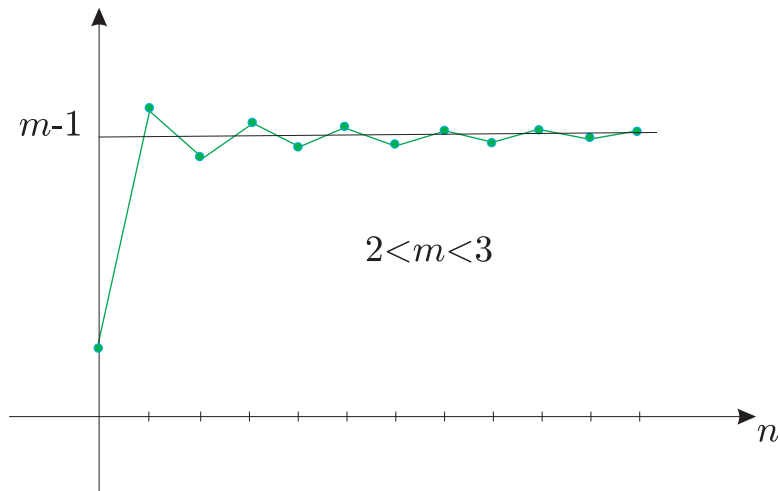
E che succede se $m \geq 2$? La cosa diventa *molto* complicata. Intanto il teorema che abbiamo dimostrato per $1 < m \leq 2$ si può estendere fino a $1 < m < 3$, ma stavolta vi sono delle oscillazioni, sempre più piccole, attorno a $m - 1$. Per valori ancora superiori di m è possibile *simulare* l'evoluzione dei batteri in modo semplice con un computer, perché, noto il valore iniziale dei batteri, si tratta di usare sempre la stessa formula per trovare i numeri successivi. Possiamo poi disegnare dei grafici che ci mostrano come evolvono i valori di x_n , che mostrano che, al di là di un certo valore speciale di m , superiore a 3, le oscillazioni non hanno nessuna regolarità: sono *caotiche*.



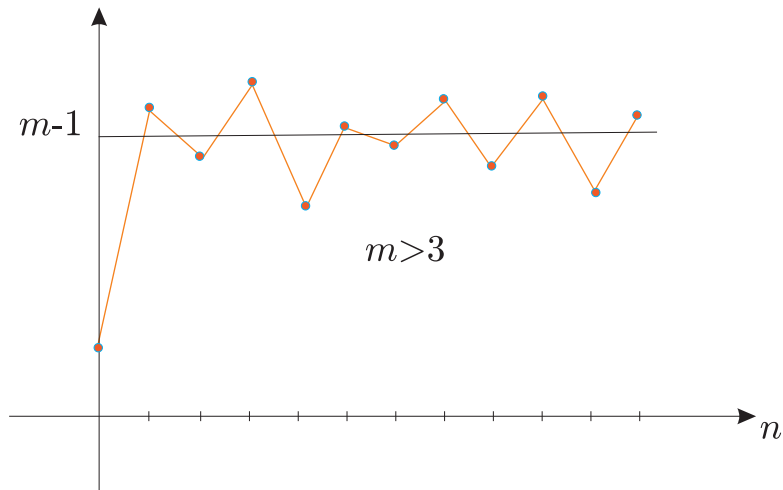
L'estinzione nel caso $0 < m < 1$.



L'evoluzione nel caso $1 < m < 2$.



L'evoluzione nel caso $2 < m < 3$, con le oscillazioni verso l'equilibrio.



Oscillazioni caotiche nel caso $m > 3$.

Il problema di Fibonacci

Un altro problema legato alla Biologia, che siamo in grado di trattare, è il cosiddetto *problema di Fibonacci*.

Il problema di Fibonacci

Un altro problema legato alla Biologia, che siamo in grado di trattare, è il cosiddetto *problema di Fibonacci*. Esso suona così:

Il problema di Fibonacci

Un altro problema legato alla Biologia, che siamo in grado di trattare, è il cosiddetto *problema di Fibonacci*. Esso suona così:

Abbiamo una popolazione di coppie di conigli; ogni mese ogni coppia genera una nuova coppia di conigli. Una nuova coppia di conigli, però, non genera un'altra coppia subito, ma deve aspettare un mese. Si chiede quante coppie di conigli vi sono dopo n mesi, supponendo che i conigli non muoiano mai.

Il problema di Fibonacci

Un altro problema legato alla Biologia, che siamo in grado di trattare, è il cosiddetto *problema di Fibonacci*. Esso suona così:

Abbiamo una popolazione di coppie di conigli; ogni mese ogni coppia genera una nuova coppia di conigli. Una nuova coppia di conigli, però, non genera un'altra coppia subito, ma deve aspettare un mese. Si chiede quante coppie di conigli vi sono dopo n mesi, supponendo che i conigli non muoiano mai.

Incominciamo allora con un calcolo elementare.

Il problema di Fibonacci

Un altro problema legato alla Biologia, che siamo in grado di trattare, è il cosiddetto *problema di Fibonacci*. Esso suona così:

Abbiamo una popolazione di coppie di conigli; ogni mese ogni coppia genera una nuova coppia di conigli. Una nuova coppia di conigli, però, non genera un'altra coppia subito, ma deve aspettare un mese. Si chiede quante coppie di conigli vi sono dopo n mesi, supponendo che i conigli non muoiano mai.

Incominciamo allora con un calcolo elementare. Partiamo con una coppia “comprata in negozio”, appena nata.

Il problema di Fibonacci

Un altro problema legato alla Biologia, che siamo in grado di trattare, è il cosiddetto *problema di Fibonacci*. Esso suona così:

Abbiamo una popolazione di coppie di conigli; ogni mese ogni coppia genera una nuova coppia di conigli. Una nuova coppia di conigli, però, non genera un'altra coppia subito, ma deve aspettare un mese. Si chiede quante coppie di conigli vi sono dopo n mesi, supponendo che i conigli non muoiano mai.

Incominciamo allora con un calcolo elementare. Partiamo con una coppia “comprata in negozio”, appena nata.

All'inizio, quindi, abbiamo una coppia non ancora matura: $x_1 = 1$.

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1.

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1. Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie.

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1. Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie. Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare:

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1. Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie. Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$.

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1.

Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie.

Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$.

Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$.

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1.

Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie.

Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$.

Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$.

Di queste, due sono mature, una è in attesa di maturare e due sono appena nate.

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1. Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie. Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$. Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$. Di queste, due sono mature, una è in attesa di maturare e due sono appena nate. Durante il quinto mese, le due mature generano due coppie, la terza appena maturata pure, mentre le due appena nate aspettano. In tutto quindi abbiamo

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1. Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie. Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$. Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$. Di queste, due sono mature, una è in attesa di maturare e due sono appena nate. Durante il quinto mese, le due mature generano due coppie, la terza appena maturata pure, mentre le due appena nate aspettano. In tutto quindi abbiamo

3 mature

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1.

Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie.

Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$.

Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$.

Di queste, due sono mature, una è in attesa di maturare e due sono appena nate.

Durante il quinto mese, le due mature generano due coppie, la terza appena maturata pure, mentre le due appena nate aspettano. In tutto quindi abbiamo

$$3 \text{ mature} + 2 \text{ in attesa}$$

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1.

Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie.

Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$.

Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$.

Di queste, due sono mature, una è in attesa di maturare e due sono appena nate.

Durante il quinto mese, le due mature generano due coppie, la terza appena maturata pure, mentre le due appena nate aspettano. In tutto quindi abbiamo

$$3 \text{ mature} + 2 \text{ in attesa} + 3 \text{ appena nate}$$

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1. Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie. Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$. Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$. Di queste, due sono mature, una è in attesa di maturare e due sono appena nate. Durante il quinto mese, le due mature generano due coppie, la terza appena maturata pure, mentre le due appena nate aspettano. In tutto quindi abbiamo

$$3 \text{ mature} + 2 \text{ in attesa} + 3 \text{ appena nate} = 8 \text{ coppie.}$$

Dopo un mese, la coppia è matura, ma non ha ancora generato, per cui possiamo dire che x_2 , il numero di coppie dopo un mese, è ancora 1. Nel secondo mese genera una seconda coppia, quindi alla fine del secondo mese abbiamo $x_3 = 2$ coppie. Nel terzo mese, la prima coppia genera un'altra coppia, mentre la seconda deve aspettare: quindi $x_4 = 3$. Ora, nel *quarto* mese vi sono *due coppie* mature: la primissima e la seconda, quindi alla fine di questo mese vi saranno *due* coppie nuove, e in tutto fanno $x_5 = 5$. Di queste, due sono mature, una è in attesa di maturare e due sono appena nate. Durante il quinto mese, le due mature generano due coppie, la terza appena maturata pure, mentre le due appena nate aspettano. In tutto quindi abbiamo

$$3 \text{ mature} + 2 \text{ in attesa} + 3 \text{ appena nate} = 8 \text{ coppie.}$$

Quindi $x_6 = 8$.

Facciamo ancora un mese.

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie.

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13.

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò?

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò? Una cosa che osserviamo è che *il numero di coppie è uguale alla somma dei due numeri precedenti*.

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò? Una cosa che osserviamo è che *il numero di coppie è uguale alla somma dei due numeri precedenti*.

Infatti

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò? Una cosa che osserviamo è che *il numero di coppie è uguale alla somma dei due numeri precedenti*.

Infatti

$$2 = 1 + 1$$

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò? Una cosa che osserviamo è che *il numero di coppie è uguale alla somma dei due numeri precedenti*.

Infatti

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & = & 1 & + & 1 \\ & \searrow & & & \searrow \\ 3 & = & 2 & + & 1 \end{array}$$

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò? Una cosa che osserviamo è che *il numero di coppie è uguale alla somma dei due numeri precedenti*.

Infatti

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & = & 1 & + & 1 & & \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ 3 & = & 2 & + & 1 & & \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ 5 & = & 3 & + & 2 & & \end{array}$$

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò? Una cosa che osserviamo è che *il numero di coppie è uguale alla somma dei due numeri precedenti*.

Infatti

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & = & 1 & + & 1 & & \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ 3 & = & 2 & + & 1 & & \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ 5 & = & 3 & + & 2 & & \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ 8 & = & 5 & + & 3 & & \end{array}$$

Facciamo ancora un mese. Durante il sesto mese, le 2 in attesa maturano e diventano 5, generando altre 5 coppie. Poi ci sono le 3 appena nate, e in tutto fanno 13. Quindi $x_7 = 13$.

Possiamo trovare una regola in tutto ciò? Una cosa che osserviamo è che *il numero di coppie è uguale alla somma dei due numeri precedenti*.

Infatti

$$\begin{array}{rcccc} 2 & = & 1 & + & 1 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 3 & = & 2 & + & 1 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 5 & = & 3 & + & 2 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 8 & = & 5 & + & 3 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 13 & = & 8 & + & 5 \end{array}$$

In simboli, possiamo affermare che, detto x_n il numero di coppie al mese n , *sembra* che esso sia la somma dei due precedenti, che sono x_{n-1} e x_{n-2} .

In simboli, possiamo affermare che, detto x_n il numero di coppie al mese n , *sembra* che esso sia la somma dei due precedenti, che sono x_{n-1} e x_{n-2} .

È meglio però affermare, equivalentemente, che al mese $n+2$ vi è la somma delle coppie al mese precedente (che ora è $n+1$) e a quello ancora prima (che ora è n):

In simboli, possiamo affermare che, detto x_n il numero di coppie al mese n , *sembra* che esso sia la somma dei due precedenti, che sono x_{n-1} e x_{n-2} .

È meglio però affermare, equivalentemente, che al mese $n+2$ vi è la somma delle coppie al mese precedente (che ora è $n+1$) e a quello ancora prima (che ora è n):

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

In simboli, possiamo affermare che, detto x_n il numero di coppie al mese n , *sembra* che esso sia la somma dei due precedenti, che sono x_{n-1} e x_{n-2} .

È meglio però affermare, equivalentemente, che al mese $n+2$ vi è la somma delle coppie al mese precedente (che ora è $n+1$) e a quello ancora prima (che ora è n):

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

(in questo modo non c'è rischio di indici negativi).

In simboli, possiamo affermare che, detto x_n il numero di coppie al mese n , *sembra* che esso sia la somma dei due precedenti, che sono x_{n-1} e x_{n-2} .

È meglio però affermare, equivalentemente, che al mese $n+2$ vi è la somma delle coppie al mese precedente (che ora è $n+1$) e a quello ancora prima (che ora è n):

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

(in questo modo non c'è rischio di indici negativi).

Ma è proprio così?

In simboli, possiamo affermare che, detto x_n il numero di coppie al mese n , *sembra* che esso sia la somma dei due precedenti, che sono x_{n-1} e x_{n-2} .

È meglio però affermare, equivalentemente, che al mese $n + 2$ vi è la somma delle coppie al mese precedente (che ora è $n + 1$) e a quello ancora prima (che ora è n):

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

(in questo modo non c'è rischio di indici negativi).

Ma è proprio così?

In effetti è vero, e come approfondimento lo dimostriamo.

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)
- c_n quelle nuove (i “cuccioli”)

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)
- c_n quelle nuove (i “cuccioli”)

Chiaramente, la somma dei tre darà ad ogni mese il numero totale x_n delle coppie:

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)
- c_n quelle nuove (i “cuccioli”)

Chiaramente, la somma dei tre darà ad ogni mese il numero totale x_n delle coppie:

$$x_n = m_n + a_n + c_n.$$

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)
- c_n quelle nuove (i “cuccioli”)

Chiaramente, la somma dei tre darà ad ogni mese il numero totale x_n delle coppie:

$$x_n = m_n + a_n + c_n.$$

Al mese successivo, $n + 1$, sappiamo che le coppie in “attesa” diventano mature e si sommano a quelle già mature:

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)
- c_n quelle nuove (i “cuccioli”)

Chiaramente, la somma dei tre darà ad ogni mese il numero totale x_n delle coppie:

$$x_n = m_n + a_n + c_n.$$

Al mese successivo, $n + 1$, sappiamo che le coppie in “attesa” diventano mature e si sommano a quelle già mature:

$$m_{n+1} = m_n + a_n$$

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)
- c_n quelle nuove (i “cuccioli”)

Chiaramente, la somma dei tre darà ad ogni mese il numero totale x_n delle coppie:

$$x_n = m_n + a_n + c_n.$$

Al mese successivo, $n + 1$, sappiamo che le coppie in “attesa” diventano mature e si sommano a quelle già mature:

$$m_{n+1} = m_n + a_n$$

Sempre nello stesso mese, poi, i cuccioli del mese prima maturano, per cui

Approfondimento

Dimostrazione. Indichiamo ad ogni passo n le coppie di conigli così:

- m_n quelle “mature”
- a_n quelle “in attesa” (o “adolescenti” se preferite)
- c_n quelle nuove (i “cuccioli”)

Chiaramente, la somma dei tre darà ad ogni mese il numero totale x_n delle coppie:

$$x_n = m_n + a_n + c_n.$$

Al mese successivo, $n + 1$, sappiamo che le coppie in “attesa” diventano mature e si sommano a quelle già mature:

$$m_{n+1} = m_n + a_n$$

Sempre nello stesso mese, poi, i cuccioli del mese prima maturano, per cui

$$a_{n+1} = c_n.$$

Approfondimento

Infine, ad ogni mese, le coppie mature generano un ugual numero di coppie di cuccioli, per cui

Approfondimento

Infine, ad ogni mese, le coppie mature generano un ugual numero di coppie di cuccioli, per cui

$$c_n = m_n.$$

Approfondimento

Infine, ad ogni mese, le coppie mature generano un ugual numero di coppie di cuccioli, per cui

$$c_n = m_n.$$

Riassumiamo quanto abbiamo trovato:

Approfondimento

Infine, ad ogni mese, le coppie mature generano un ugual numero di coppie di cuccioli, per cui

$$c_n = m_n.$$

Riassumiamo quanto abbiamo trovato:

$$x_n = m_n + a_n + c_n$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n$$

$$a_{n+1} = c_n$$

$$c_n = m_n.$$

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n.$$

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n + 2$ al posto di n ,

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n+2$ al posto di n ,

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n + 2$ al posto di n ,

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Dalla seconda, scrivendo $n + 1$ al posto di n , viene invece

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n + 2$ al posto di n ,

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Dalla seconda, scrivendo $n + 1$ al posto di n , viene invece

$$m_{n+2} = m_{n+1} + a_{n+1}. \quad (4.5)$$

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n + 2$ al posto di n ,

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Dalla seconda, scrivendo $n + 1$ al posto di n , viene invece

$$m_{n+2} = m_{n+1} + a_{n+1}. \quad (4.5)$$

Quindi intanto

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n + 2$ al posto di n ,

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Dalla seconda, scrivendo $n + 1$ al posto di n , viene invece

$$m_{n+2} = m_{n+1} + a_{n+1}. \quad (4.5)$$

Quindi intanto

$$x_{n+2} =$$

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n + 2$ al posto di n ,

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Dalla seconda, scrivendo $n + 1$ al posto di n , viene invece

$$m_{n+2} = m_{n+1} + a_{n+1}. \quad (4.5)$$

Quindi intanto

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2} =$$

Approfondimento

$$x_n = m_n + a_n + c_n \quad (4.1)$$

$$m_{n+1} = m_n + a_n \quad (4.2)$$

$$a_{n+1} = c_n \quad (4.3)$$

$$c_n = m_n. \quad (4.4)$$

Adesso si tratta solo di fare dei conticini. Dalla prima abbiamo, scrivendo $n + 2$ al posto di n ,

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Dalla seconda, scrivendo $n + 1$ al posto di n , viene invece

$$m_{n+2} = m_{n+1} + a_{n+1}. \quad (4.5)$$

Quindi intanto

$$x_{n+2} = m_{n+2} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2}.$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$x_{n+2} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$x_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$x_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned}$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ora vediamo come scrivere c_{n+2} . Dalla (4.4) scritta per $n + 2$ abbiamo

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ora vediamo come scrivere c_{n+2} . Dalla (4.4) scritta per $n+2$ abbiamo

$$c_{n+2} = m_{n+2} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ora vediamo come scrivere c_{n+2} . Dalla (4.4) scritta per $n+2$ abbiamo

$$c_{n+2} = m_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{(4.5)} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ora vediamo come scrivere c_{n+2} . Dalla (4.4) scritta per $n+2$ abbiamo

$$c_{n+2} = m_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{(4.5)} = \underbrace{m_n + a_n}_{m_{n+1}} + a_{n+1}$$

e siccome $a_{n+1} = c_n$, troviamo infine

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ora vediamo come scrivere c_{n+2} . Dalla (4.4) scritta per $n+2$ abbiamo

$$c_{n+2} = m_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{(4.5)} = \underbrace{m_n + a_n}_{m_{n+1}} + a_{n+1}$$

e siccome $a_{n+1} = c_n$, troviamo infine

$$c_{n+2} = m_n + a_n + c_n = x_n.$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ora vediamo come scrivere c_{n+2} . Dalla (4.4) scritta per $n+2$ abbiamo

$$c_{n+2} = m_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{(4.5)} = \underbrace{m_n + a_n}_{m_{n+1}} + a_{n+1}$$

e siccome $a_{n+1} = c_n$, troviamo infine

$$c_{n+2} = m_n + a_n + c_n = x_n.$$

In definitiva, quindi, dalla (4.6),

$$x_{n+2} = x_{n+1} + c_{n+2} =$$

Approfondimento

Adesso, dalla (4.3) scritta con un indice aumentato, abbiamo

$$a_{n+2} = c_{n+1}$$

per cui x_{n+2} diventa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{m_{n+2}} + a_{n+2} + c_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}}_{x_{n+1}} + c_{n+2} = \\ &= x_{n+1} + c_{n+2}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ora vediamo come scrivere c_{n+2} . Dalla (4.4) scritta per $n+2$ abbiamo

$$c_{n+2} = m_{n+2} = \underbrace{m_{n+1} + a_{n+1}}_{(4.5)} = \underbrace{m_n + a_n}_{m_{n+1}} + a_{n+1}$$

e siccome $a_{n+1} = c_n$, troviamo infine

$$c_{n+2} = m_n + a_n + c_n = x_n.$$

In definitiva, quindi, dalla (4.6),

$$x_{n+2} = x_{n+1} + c_{n+2} = x_{n+1} + x_n. \blacksquare$$

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ?

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

Allora $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$ e quindi, inserendo nella legge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ troviamo

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

Allora $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$ e quindi, inserendo nella legge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ troviamo

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

Allora $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$ e quindi, inserendo nella legge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ troviamo

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

Portiamo a primo membro e raccogliamo:

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

Allora $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$ e quindi, inserendo nella legge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ troviamo

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

Portiamo a primo membro e raccogliamo:

$$q^n(q^2 - q - 1) = 0.$$

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

Allora $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$ e quindi, inserendo nella legge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ troviamo

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

Portiamo a primo membro e raccogliamo:

$$q^n(q^2 - q - 1) = 0.$$

Siccome q non è zero, se c'è una soluzione, questa deve verificare

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

Allora $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$ e quindi, inserendo nella legge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ troviamo

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

Portiamo a primo membro e raccogliamo:

$$q^n(q^2 - q - 1) = 0.$$

Siccome q non è zero, se c'è una soluzione, questa deve verificare

$$q^2 - q - 1 = 0$$

I numeri x_n sono molto famosi in Matematica e si chiamano *numeri di Fibonacci*.

Possiamo trovare una formula per x_n ? Sì, anche se per calcolare i numeri di Fibonacci è meglio partire da due noti e usare la regola: sommarli e trovare quello successivo.

Facciamo così: ci chiediamo se per caso i numeri di Fibonacci siano delle *potenze* (evidentemente non di numeri interi!) del tipo

$$x_n = q^n.$$

Allora $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$ e quindi, inserendo nella legge $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ troviamo

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

Portiamo a primo membro e raccogliamo:

$$q^n(q^2 - q - 1) = 0.$$

Siccome q non è zero, se c'è una soluzione, questa deve verificare

$$q^2 - q - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ci accorgiamo subito però che non c'è speranza: se fosse

Ci accorgiamo subito però che non c'è speranza: se fosse

$$x_n = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Ci accorgiamo subito però che non c'è speranza: se fosse

$$x_n = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ci sarebbero senz'altro dei $\sqrt{5}$ nella formula, per cui non va.

Ci accorgiamo subito però che non c'è speranza: se fosse

$$x_n = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ci sarebbero senz'altro dei $\sqrt{5}$ nella formula, per cui non va.

Però potremmo tentare di *sommare o sottrarre* due potenze delle due radici q_1, q_2 , così:

Ci accorgiamo subito però che non c'è speranza: se fosse

$$x_n = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ci sarebbero senz'altro dei $\sqrt{5}$ nella formula, per cui non va.

Però potremmo tentare di *sommare o sottrarre* due potenze delle due radici q_1, q_2 , così:

$$x_n = q_1^n \pm q_2^n.$$

Ci accorgiamo subito però che non c'è speranza: se fosse

$$x_n = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ci sarebbero senz'altro dei $\sqrt{5}$ nella formula, per cui non va.

Però potremmo tentare di *sommare o sottrarre* due potenze delle due radici q_1, q_2 , così:

$$x_n = q_1^n \pm q_2^n.$$

Ma siamo sicuri che questi numeri sono ancora una soluzione della legge “di Fibonacci”?

Ci accorgiamo subito però che non c'è speranza: se fosse

$$x_n = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ci sarebbero senz'altro dei $\sqrt{5}$ nella formula, per cui non va.

Però potremmo tentare di *sommare o sottrarre* due potenze delle due radici q_1, q_2 , così:

$$x_n = q_1^n \pm q_2^n.$$

Ma siamo sicuri che questi numeri sono ancora una soluzione della legge “di Fibonacci”? È vero, vediamo in un approfondimento.

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1},$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} =$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} =$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2 =$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2 = q_1^n (q_1 + 1) - q_2^n (q_2 + 1) =$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2 = q_1^n (q_1 + 1) - q_2^n (q_2 + 1) = q_1^{n+1} + q_1^n - q_2^{n+1} - q_2^n$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2 = q_1^n (q_1 + 1) - q_2^n (q_2 + 1) = q_1^{n+1} + q_1^n - q_2^{n+1} - q_2^n$$

che equivale a

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2 = q_1^n (q_1 + 1) - q_2^n (q_2 + 1) = q_1^{n+1} + q_1^n - q_2^{n+1} - q_2^n$$

che equivale a

$$x_{n+2} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1} + q_1^n - q_2^n =$$

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2 = q_1^n (q_1 + 1) - q_2^n (q_2 + 1) = q_1^{n+1} + q_1^n - q_2^{n+1} - q_2^n$$

che equivale a

$$x_{n+2} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1} + q_1^n - q_2^n = x_{n+1} + x_n$$

che è proprio la legge di Fibonacci.

Approfondimento

Poniamo

$$x_{n+1} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1}, \quad x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2}.$$

Quindi

$$x_{n+2} = q_1^{n+2} - q_2^{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2.$$

Siccome $q_{1,2}$ verificano l'equazione $q^2 = q + 1$, possiamo continuare

$$x_{n+2} = q_1^n q_1^2 - q_2^n q_2^2 = q_1^n (q_1 + 1) - q_2^n (q_2 + 1) = q_1^{n+1} + q_1^n - q_2^{n+1} - q_2^n$$

che equivale a

$$x_{n+2} = q_1^{n+1} - q_2^{n+1} + q_1^n - q_2^n = x_{n+1} + x_n$$

che è proprio la legge di Fibonacci. Ugualmente viene con la somma.

Facciamo allora una prova:

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 =$$

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare.

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$?

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$? Proviamo, tanto a questo punto...

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$? Proviamo, tanto a questo punto...

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] =$$

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$? Proviamo, tanto a questo punto...

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1.$$

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$? Proviamo, tanto a questo punto...

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1.$$

Vediamo per $n = 2$:

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$? Proviamo, tanto a questo punto...

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1.$$

Vediamo per $n = 2$:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] =$$

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$? Proviamo, tanto a questo punto...

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1.$$

Vediamo per $n = 2$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right] = \end{aligned}$$

Facciamo allora una prova: per $n = 1$ viene

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \sqrt{5}!!!.$$

Non sembra funzionare. Anzi, sembrerebbe funzionare la somma (ma non è quella giusta).

E se dividessimo per $\sqrt{5}$? Proviamo, tanto a questo punto...

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1.$$

Vediamo per $n = 2$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} 2\sqrt{5} = 1. \end{aligned}$$

Va bene.

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per $1/\sqrt{5}$* la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci?

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per $1/\sqrt{5}$* la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per* $1/\sqrt{5}$ la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per* $1/\sqrt{5}$ la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

allora

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per* $1/\sqrt{5}$ la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

allora

$$z_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+2} =$$

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per $1/\sqrt{5}$* la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

allora

$$z_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_{n+1} + x_n) =$$

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per* $1/\sqrt{5}$ la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

allora

$$z_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_{n+1} + x_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}x_n = z_{n+1} + z_n$$

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per* $1/\sqrt{5}$ la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

allora

$$z_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_{n+1} + x_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}x_n = z_{n+1} + z_n$$

e quindi anche z_n verifica la legge di Fibonacci.

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per* $1/\sqrt{5}$ la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

allora

$$z_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_{n+1} + x_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}x_n = z_{n+1} + z_n$$

e quindi anche z_n verifica la legge di Fibonacci.

Abbiamo quindi dimostrato che i numeri di Fibonacci sono dati dalla formula

Va bene. Dobbiamo continuare? No, perché se la nostra formula segue la legge di Fibonacci, basta che vada bene nei primi due casi, poi *genererà automaticamente* tutti gli altri numeri.

Però noi abbiamo *moltiplicato per* $1/\sqrt{5}$ la nostra formula. Siamo sicuri che essa verifichi ancora la legge di Fibonacci? Questo è facile, perché se

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}x_n$$

allora

$$z_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_{n+1} + x_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}x_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}x_n = z_{n+1} + z_n$$

e quindi anche z_n verifica la legge di Fibonacci.

Abbiamo quindi dimostrato che i numeri di Fibonacci sono dati dalla formula

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

I numeri di Fibonacci si trovano molto frequentemente in Natura. Il rapporto di due numeri di Fibonacci consecutivi tende alla *sezione aurea*, e spesso il numero dei petali dei fiori segue la legge di Fibonacci (*si veda la lezione sulla Sezione Aurea*), che abbiamo ritrovato anche qui. Essi hanno innumerevoli proprietà, molte anche elementari, ma su questi torneremo in futuro.