

Soluzione «scolastica» della Prova di matematica per il liceo scientifico - PNI

Cristina Agazzi, Patrizia Marastoni

La prova di quest'anno era complessivamente affrontabile da uno studente di livello medio. La cosa che si notava subito con estrema evidenza era l'assenza di uno studio di funzione completo, cosa che certamente ha spiazzato i ragazzi, ma che pone molti interrogativi anche agli insegnanti, in quanto si tratta dell'argomento fondamentale dell'ultimo anno di corso e che è presente tra le righe di tutti i temi d'esame degli anni precedenti. Ci chiediamo quindi se sia stata una scelta casuale o invece dettata da precise motivazioni e basata su una meditata linea educativa: quale?

Il primo problema era certamente molto intelligente, elegante, originale e apprezzabile da parte di un insegnante, ma richiedeva fin dall'inizio delle competenze di alto livello e soprattutto grande familiarità, sciolta dimestichezza e meditata padronanza di concetti appresi solo nella seconda parte dell'ultimo anno. Secondo noi invece un problema d'esame dovrebbe partire con richieste che possano essere affrontate da tutti gli studenti in possesso dei requisiti minimi, per poi aumentare gradatamente il grado di difficoltà e profondità nei punti successivi. In tal modo si riuscirebbe ad evitare che uno studente o risolva tutto il problema o non riesca neppure a iniziarlo (situazione demoralizzante per lo studente e problematica da valutare per il docente) e si potrebbero mettere in luce e differenziare i vari livelli di preparazione, di possesso consapevole delle competenze e di autonomia presenti nella classe.

Il secondo problema era di livello medio e più vicino a quanto normalmente affrontato dai ragazzi.

Non è però chiaro perché non sia stato richiesto il calcolo dei volumi, ottenibile con integrali non complessi, ma soprattutto è di difficile interpretazione la frase: «si scrivano, spiegandone il perché, gli integrali definiti che forniscono i volumi» (anche formalmente è ambiguo il suffisso «ne» di «spiegandone»: a cosa si riferisce?). Qual era la spiegazione richiesta? Quella generale dei volumi dei solidi di rotazione o quella legata alla figura in questione? E fino a che livello di approfondimento e precisione bisognava arrivare nella spiegazione? Ci si può chiedere se la linea di tendenza sia quella di evitare calcoli macchinosi, e questo ci trova concordi, ma sembra invece smentita dal quesito 10 e soprattutto dalla prova dello scorso anno.

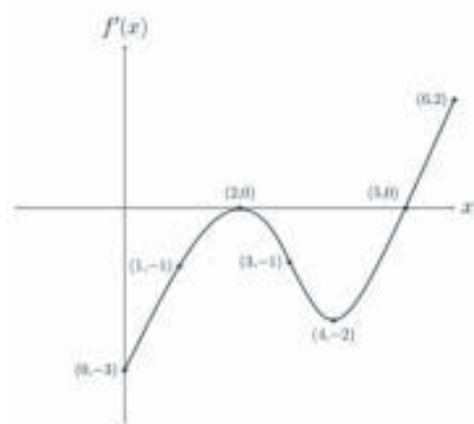
Per quanto riguarda i quesiti, molto positivo è che spazino su argomenti diversi e che alcuni ripropongano questioni fondamentali affrontate durante l'anno o problemi «classici» visti sicuramente nel quinquennio o che qualcuno sia simile ad altri assegnati in maturità precedenti (non dimentichiamo infatti che la prova di matematica è molto ardua per un ragazzo di livello medio, perché richiede conoscenze e competenze relative a tutti gli argomenti dei 5 anni!)

Questo è essenziale, perché l'Esame deve valorizzare non solo le eccellenze, ma anche chi possiede i requisiti di base e si è impegnato costantemente in tutto il percorso di studio.

L'unico appunto che ci sentiamo di fare ai quesiti è che non sempre è chiaro dalle richieste quando la risoluzione è da considerarsi completa, in quanto in alcuni casi viene esplicitamente richiesto di fornire motivazioni e spiegazioni e in altri no, per cui, attenendosi strettamente al testo, sembrerebbero non necessarie, mentre nella logica di una prova d'Esame secondo noi sono sempre indispensabili.

Risoluzione del problema 1

Diamo una traccia della soluzione del primo problema lasciando la suddivisione per punti presente nel testo.



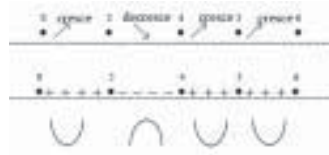
1) Osservando il grafico della derivata prima $y = f'(x)$ si possono rilevare gli intervalli di crescita e decrescenza della f' stessa e da ciò dedurre la concavità e convessità della funzione $y = f(x)$. Conoscendo la monotonia di $f'(x)$ ed essendo la derivata se-

conda la derivata della derivata prima si può concludere che dove f' cresce allora $f'' \geq 0$, dove f' decresce $f'' \leq 0$

Monotonia di $f'(x)$

Segno di $f''(x)$

Concavità della funzione $f(x)$



La funzione presenta un flesso nel punto di ascissa $x=2$ e poiché

$f'(2) = 0$ si può dire che è un flesso a tangente orizzontale. La funzione presenta un ulteriore flesso nel punto di ascissa $x=4$ e poiché $f'(4) = -2$ si può dire che è un flesso a tangente obliqua con coefficiente angolare $m = -2$.

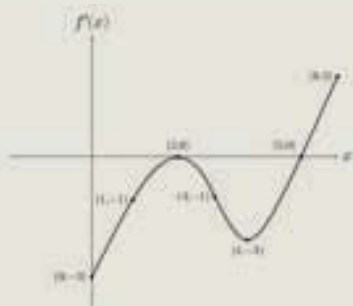
2) Dal grafico della derivata prima $y = f'(x)$ si ne ricava immediatamente il segno e dal segno della derivata si deduce la crescita e decrescenza della funzione $y = f(x)$ (mediante il criterio di monotonia per le funzioni derivabili).

TRACCIA MINISTERIALE

Problema 1

Della funzione f , definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$.

Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.

2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto?

Sapendo che $\int_0^3 f'(t) dt = -5$

per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?

3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f ?

4. Sia g la funzione definita da $g(x) = x f(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

Problema 2

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1. Fissato un riferimento cartesiano Oxy , si disegnino i grafici di f e di g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$

2. La regione R , ruotando attorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0 . Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.

4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta,

nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Questionario

1. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}$$

2. Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire interamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

3. Sia $f(x) = 3x$. Per quale valore di x , approssimato a meno di 10^{-3} , la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

5. Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6. Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .

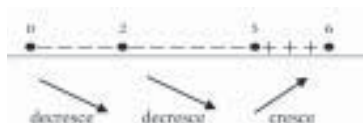
8. Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r , quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

Segno di $f'(x)$

Monotonia
della funzione $f(x)$



La funzione presenta un minimo relativo per $x=5$ ed è anche minimo assoluto perché f decresce per $0 < x < 5$ e cresce per $5 < x < 6$.

Sapendo che

$$\int_0^6 f'(x) dx = -5 \quad (*)$$

si può ricavare il valore della funzione nel punto di ascissa $x=6$, infatti

$$\int_0^6 f'(x) dx = [f(x)]_0^6 = f(6) - f(0)$$

Il testo del problema fornisce il valore $f(0)=9$, quindi sostituendo i valori noti nell'espressione (*) ottengo: $f(6)-9=-5 \rightarrow f(6)=4$ e poiché, come detto sopra f decresce per $0 < x < 5$ e cresce per $5 < x < 6$ confrontando il valore assunto dalla funzione per $x=0$ con quello assunto per $x=6$ si può concludere che il massimo assoluto della funzione è raggiunto nel punto $(0,9)$.

3) Sintetizzando, quindi, i dati forniti dal testo con quelli dedotti dallo studio del grafico della derivata prima, possiamo concludere che la funzione $y = f(x)$ parte dal punto di massimo assoluto $(0,9)$ con concavità rivolta verso l'alto e tangente di coefficiente angolare $m = -3$ e decresce presentando un flesso a tangente orizzontale nel punto di ascissa $x=2$, continua a decrescere cambiando la concavità verso il basso finché in $x=4$ ripresenta un flesso a tangente obliqua di coefficiente $m = -2$ che riporta la concavità verso l'alto, continua a decrescere sino al punto $(5,3)$ in cui presenta un minimo assoluto e sempre volgendo la concavità verso l'alto cresce sino ad $x=6$ dove assume il valore $y=4$. Il grafico qualitativo della funzione è del tipo rappresentato in Figura 1.

Non è possibile, dai dati forniti dal problema, ricavare le ordinate dei punti di flesso.

4) Posto $g(x) = xf(x)$, per trovare le tangenti ai grafici di f e di g nei punti di ascissa $x=3$ troviamo:

1. i coefficienti angolari delle rette, e a tal fine, dal grafico fornito dal testo del problema ricavo $f'(3) = -1$. Si calcola poi la derivata di $y = g(x)$. Avendo a che far e con un prodotto troviamo che $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ e calcolo $g'(3) = f(3) + 3 \cdot f'(3) = 6 + 3 \cdot (-1) = 3$.

2. le coordinate dei punti sono $(3,6)$ che erano fornito dal testo e si calcolano quelle dell'altro punto che appartiene a $y = g(x)$, $g(3) = 3 \cdot f(3) = 18$.

Le tangenti ai grafici hanno equazione:

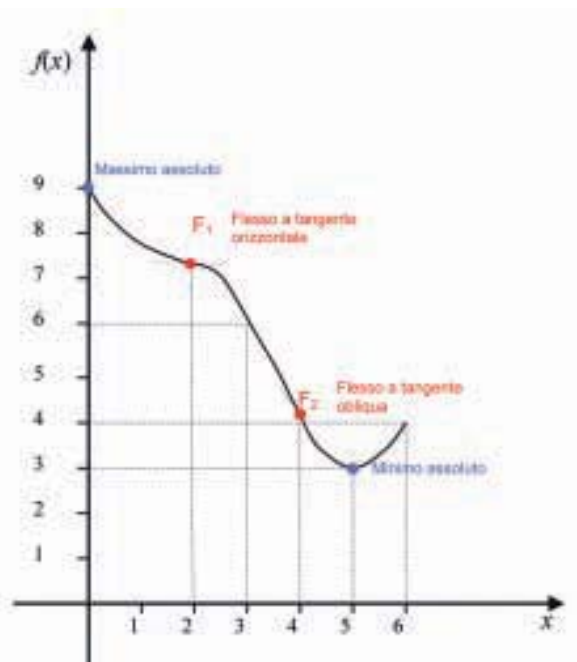


Figura 1. Andamento qualitativo della funzione $y = f(x)$ del primo problema.

$$tg_f: y = -(x-3) + 6 \rightarrow y = -x + 9$$

$$tg_g: y = 3(x-3) + 18 \rightarrow y = 3x + 9$$

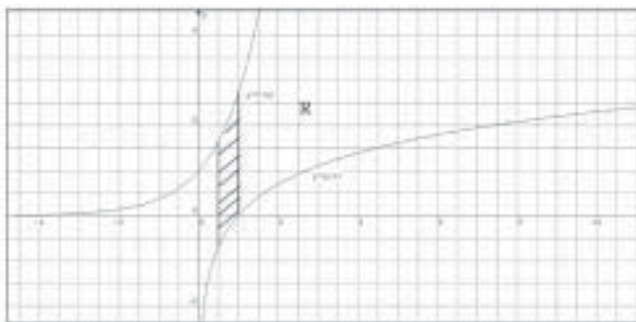
La misura dell'angolo acuto fra le tangenti

In matematica $\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{3 + 1}{1 - 3} \right| = 2 \quad \alpha = 63^\circ 26'$ quando si conosce il valore della tangente dell'angolo, non si capisce il perché della richiesta della misura dell'angolo in gradi e primi sessagesimali. Si tratta in tal caso di puro calcolo.

Risoluzione del problema 2

1)

Una primitiva di e^x è e^x , mentre per trovare una primitiva di $\ln$



Le funzioni date sono note e si può rilevare dal grafico che nell'intervallo assegnato $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ si ha che $e^x > \ln x$, per cui l'area della regione R richiesta si ottiene risolvendo $\int_{1/2}^1 (e^x - \ln x) dx$.

x bisogna ricorrere all'integrazione per parti, pensando $\ln x$ come $(1 \cdot \ln x)$.

Dunque

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

Per cui l'area di R risulta:

$$\left[e^x - x(\ln x - 1) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = e + 1 - e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = e - \sqrt{e} + \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2}.$$

2) Questo punto del problema potrebbe essere risolto in pochi passaggi, ma la cosa «strana» è che nella consegna non viene richiesto il calcolo degli integrali definiti che forniscono i volumi, bensì è richiesta esplicitamente la spiegazione del perché per calcolare i volumi devono essere usati proprio tali integrali. Quindi a nostro parere la soluzione corretta richiede una esauriente e motivata trattazione che mostri la comprensione del significato degli integrali usati. Per cui lo svolgimento è necessariamente lungo e articolato. È positivo il fatto che in una prova d'esame venga privilegiata la comprensione dei concetti rispetto all'applicazione di formule, ma non è facile per uno studente fornire una spiegazione completa e rigorosa se non è abituato a farlo.

Nel seguito, per chiarezza e rigore, detta D una generica regione piana, indicheremo con $A(D)$ l'area di tale regione e detto W un generico solido, indicheremo con $V(W)$ il volume di tale solido.

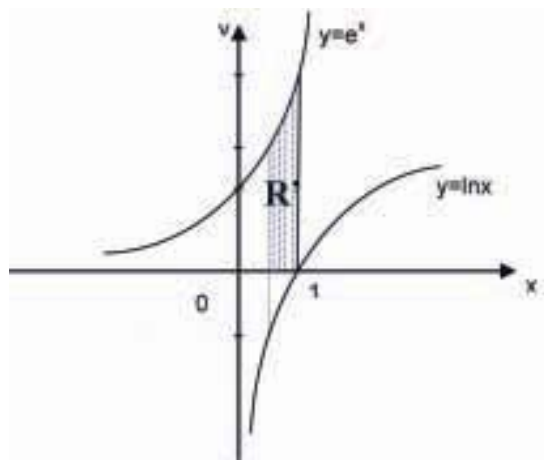
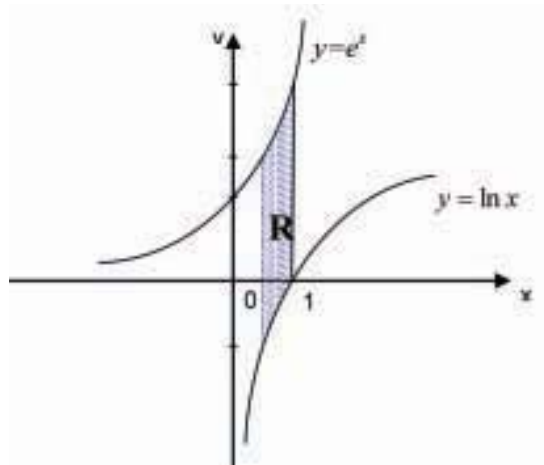
Per calcolare $V(S)$, immaginiamo di sezionare il solido S con un generico piano perpendicolare all'asse x : la sezione S_x ottenuta è un cerchio avente centro nel punto $P(x,0)$ in cui il piano incontra l'asse x e raggio e^x . L'area della generica sezione è dunque

$$A(S_x) = \pi x (e^x)^2 = \pi x e^{2x}$$

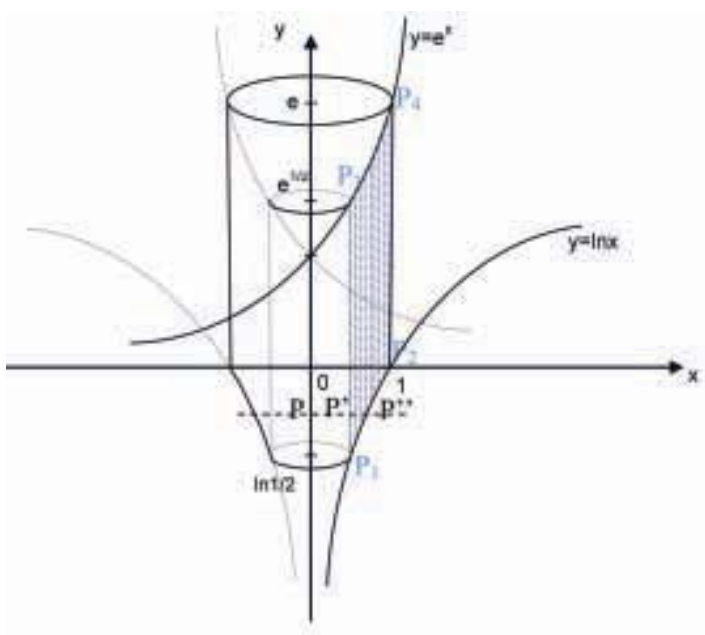
Il volume di S si ottiene «sommando» i volumi degli infiniti cilindretti di altezza Δx e area di base $A(S_x)$ al variare x in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, e dato che l'integrale definito è il limite della somma

$$\text{di infinite quantità infinitesime, } V(S) = \int A(S_x) \, dx = \int \pi x e^{2x} \, dx$$

La difficoltà nel calcolo del volume di S consisteva nel fatto che, ruotando R intorno all'asse x , la parte di solido ottenuta ruotando il sottoinsieme R' di R appartenente al primo quadrante inglobava anche l'altra parte. Questo poteva creare dubbi negli studenti sul motivo per cui il testo chiedesse di far ruotare tutta la regione R quando lo stesso solido si sarebbe ottenuto facendo ruotare solo R' . Si poteva anche essere erroneamente indotti a pensare di dover eseguire una mezza rotazione della regione R' e una mezza rotazione di $(R - R')$.



Per calcolare $V(T)$, immaginiamo di sezionare il solido T con un generico piano perpendicolare all'asse y : la sezione T_y è diversa a seconda dell'intervallo in cui varia il punto $P(0,y)$ in cui il piano incontra l'asse y .



Troviamo le ordinate dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 che sono estremi dei vari intervalli.

P_1 è il punto di ascissa $\frac{1}{2}$ appartenente a $y = \ln x$,

per cui $P_1 \left(\frac{1}{2}, \ln \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\ln 2 \right)$

P_2 è il punto di ascissa 1 appartenente a $y = \ln x$,

per cui $P_2 (1, \ln 1) = (1, 0)$

P_3 è il punto di ascissa $\frac{1}{2}$ appartenente a $y = e^x$,

per cui $P_3 \left(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{e} \right)$

P_4 è il punto di ascissa 1 appartenente a $y = e^x$,

per cui $P_4 (1, e)$.

Spostando il generico piano perpendicolare all'asse y in modo che seci il solido T , la variabile da considerare è la y di P , quindi per trovare i punti in cui tale piano incontra $y = \ln x$ e $y = e^x$ bisogna ricavare in entrambi i casi x in funzione di y , ottenendo rispettivamente $x = e^y$ e $x = \ln y$.

Prima situazione

Se $y_P \in [y_{P_1}, y_{P_2}]$, cioè $-\ln 2 \leq y \leq 0$, la sezione T_y è una corona circolare delimitata internamente dalla circonferenza di centro P e raggio $\overline{PP'}$ ed esternamente dalla circonferenza di centro P e raggio $\overline{PP''}$, essendo $P(0, y)$, $P' \left(\frac{1}{2}, y \right)$ e $P''(e^y, y)$.

Si ha dunque che $\overline{PP'} = \frac{1}{2}$, $\overline{PP''} = e^y$, per cui l'area della corona circolare è: $A(T_y) = \pi \left(e^{2y} - \frac{1}{4} \right)$.

Il volume della prima parte del solido T è quindi:

$$V(T_{[y_1, y_2]}) = \int_{-\ln 2}^0 A(T_y) dy = \int_{-\ln 2}^0 \pi \left(e^{2y} - \frac{1}{4} \right) dy.$$

Seconda situazione

Se $y_P \in [y_{P_3}, y_{P_4}]$, cioè $0 \leq y \leq \sqrt{e}$,

la sezione T_y è una corona circolare delimitata internamente dalla circonferenza di centro P e raggio $\overline{PP'}$ ed esternamente dalla circonferenza di centro P e raggio $\overline{PP''}$, essendo $P(0, y)$, $P' \left(\frac{1}{2}, y \right)$ e $P''(1, y)$.

Si ha dunque che $\overline{PP'} = \frac{1}{2}$ e $\overline{PP''} = 1$, per cui l'area della corona circolare è $A(T_y) = \pi \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} \pi$.

e il volume della seconda parte del solido T è:

$$V(T_{[y_3, y_4]}) = \int_0^{\sqrt{e}} A(T_y) dy = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{3}{4} \pi dy.$$

In questo intervallo il volume poteva essere trovato anche come differenza tra i volumi di due cilindri coassiali di raggi 1 e $\frac{1}{2}$ e altezza $\sqrt{e}$.

Terza situazione

Se $y_P \in [y_{P_1}, y_{P_3}]$, cioè $\sqrt{e} \leq y \leq e$, la sezione T_y è una corona circolare delimitata internamente dalla circonferenza di centro P e raggio $\overline{PP'}$ ed esternamente dalla circonferenza di centro P e raggio $\overline{PP''}$, essendo $P(0, y)$, $P'(\ln y, y)$ e $P''(1, y)$. Si ha dunque che $\overline{PP'} = \ln y$ e $\overline{PP''} = 1$, per cui l'area della corona circolare è $A(T_y) = \pi (1 - \ln^2 y)$.

Il volume della terza parte del solido T è:

$$V(T_{[y_4, y_5]}) = \int_e^{\sqrt{e}} A(T_y) dy = \int_e^{\sqrt{e}} \pi (1 - \ln^2 y) dy.$$

Sommando i tre volumi trovati si ottiene il volume di T :

$$V(T) = V(T_{[y_1, y_2]}) + V(T_{[y_3, y_4]}) + V(T_{[y_5, y_6]}).$$

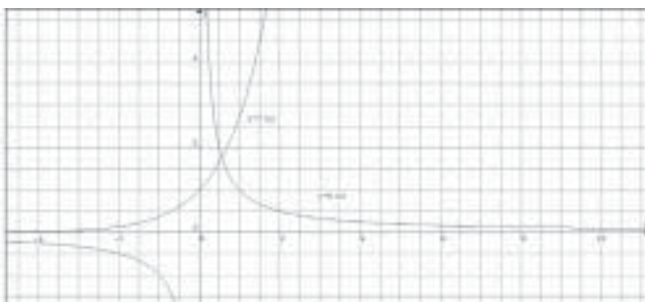
3) Fissato $x_0 > 0$, i punti di tangenza delle rette r e s con $y = \ln x$ sono rispettivamente $T_1(x_0, e^{x_0})$ e $T_2(x_0, \ln x_0)$.

e i coefficienti angolari di tali tangenti sono le derivate delle rispettive funzioni calcolate nel punto di ascissa x_0 , cioè

$$m_r = e^{x_0} \text{ e } m_s = \frac{1}{x_0}.$$

Affinché tali tangenti risultino parallele si deve avere che $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$.

Questa equazione non ammette soluzione algebrica, ma rappresentando le funzioni note $f(x) = e^x$ e $h(x) = \frac{1}{x}$ si vede chiaramente che tali funzioni hanno un unico punto di intersezione per $x > 0$: l'ascissa di tale punto è il valore x_0 cercato.



Per trovare un intervallo da cui partire per applicare un metodo numerico necessario per approssimare x_0

possiamo notare che per $x = \frac{1}{2}$ si ha che $e^{\frac{1}{2}} < 1 : \frac{1}{2}$, cioè

$\sqrt{e} < 2$ e dunque $f(x) < h(x)$, mentre per $x = 1$ si ha che $e > 1$ e dunque $f(x) > h(x)$.

Per cui, essendo x_0 l'unico punto in cui $f(x) = h(x)$,

si ha che $x_0 \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

Si potrebbe obiettare che la sola osservazione dei grafici di $y = e^x$ e $y = \frac{1}{x}$ non è sufficiente per stabilire l'esistenza e unicità

di x_0 e che per garantirne l'esistenza bisogna applicare in un opportuno intervallo chiuso alla funzione $y = e^x - \frac{1}{x}$ il teorema di esistenza degli zeri, mentre per garantirne l'unicità bisogna notare che $y' = e^x + \frac{1}{x^2}$ è sempre positiva, quindi la funzione è sempre crescente e dunque biunivoca.

Noi ribadiamo che, se all'inizio del problema abbiamo considerato $y = e^x$ e $y = \ln x$ come funzioni note e abbiamo ricavato dai grafici le informazioni necessarie per calcolare le aree e i volumi richiesti, allora anche in questo caso, dobbiamo considerare $y = e^x$ e $y = \frac{1}{x}$ come funzioni note e ricavare dai loro grafici le informazioni richieste.

Consideriamo dunque l'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e iteriamo il procedimento seguito per individuarlo, applicando il metodo di bisezione (poteva essere usato un qualunque altro metodo numerico, ma quello di bisezione è il più semplice e visualizzabile graficamente in modo immediato).

Per aiutarci possiamo completare la seguente tabella in cui di volta in volta nella riga successiva si rinomina con x_1 l'ascissa del primo estremo e con x_2 l'ascissa del secondo estremo dell'intervallo individuato nella riga precedente il procedimento termina quando $x_2 - x_1 < 0,01$.

x_1	x_2	$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$f(x_0) = h(x_0)$	$f(x_0) > h(x_0)$	se $f(x_0) < h(x_0) \Rightarrow x_0 \in [x_1, x_2]$ se $f(x_0) > h(x_0) \Rightarrow x_0 \in [x_0, x_2]$
1/2	1	3/4=0,75	no	sì	$x_0 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$
1/2	3/4	5/8=0,625	no	sì	$x_0 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$
1/2	5/8	9/16=0,5625	no	sì	$x_0 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right]$
1/2	9/16	17/32=0,53125	sì	no	$x_0 \in \left[\frac{17}{32}, \frac{9}{16}\right]$
17/32	9/16	35/64=0,546875	sì	no	$x_0 \in \left[\frac{35}{64}, \frac{9}{16}\right]$
35/64	9/16	71/128=0,55468	sì	no	$x_0 \in \left[\frac{71}{128}, \frac{9}{16}\right]$

Essendo $\frac{9}{16} - \frac{71}{128} = 0,008 < 0,01$ abbiamo trovato l'approssimazione richiesta.

4) Sia $k(x) = f(x) - g(x) = e^x - \ln x$. Per trovare eventuali massimi e minimi assoluti in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, prima si cercano i massimi e minimi relativi in tale intervallo e poi si confrontano le ordinate di tali punti con le ordinate degli estremi dell'intervallo stesso. Essendo $k'(x) = f'(x) - g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, ponendo la derivata uguale a zero, si ottiene che l'unico possibile estremo relativo, è il punto x_0 precedentemente trovato.

Siccome $k'(x) > 0$ se $f'(x) > g'(x)$, cioè se $e^x > \frac{1}{x}$, dal grafico precedente si vede che $k'(x)$ risulta negativa in $\left]\frac{1}{2}, x_0\right[$ e positiva in $]x_0, 1[$, dunque $k(x)$ decresce prima di x_0 e poi cresce, per cui il punto x_0 è un punto di minimo relativo e assoluto.

Essendo poi $k\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \ln 2$ e $k(1) = e$ si ricava che il massimo assoluto si ha per $x=1$ e vale e .

Soluzione dei quesiti

Quesito 1. Utilizzando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ con $a > 0$, possiamo riscrivere il limite nella forma

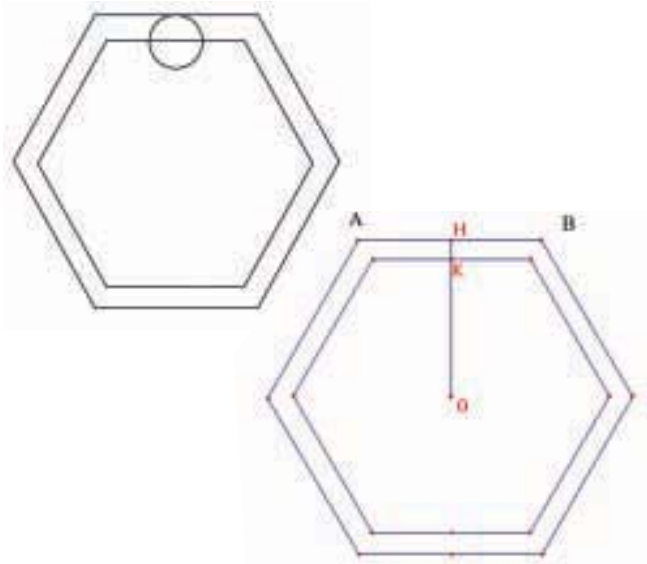
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x} - 3^{4x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{4x}}{x} \cdot \frac{\left(\frac{8}{81}\right)^x - 1}{x} = +\infty \cdot \ln\left(\frac{8}{81}\right) = -\infty$$

In alternativa poteva essere applicato il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x} \cdot 3 \ln 2 - 3^{4x} \cdot 4 \ln 3}{2x} = -\infty$$

Il primo modo è più elegante e permette allo studente di mostrare molte più competenze rispetto al secondo perché deve riconoscere il limite notevole e ricorrendo ad esso tramite un uso consapevole delle proprietà delle potenze.

Quesito 2. Il centro della moneta deve cadere all'interno dell'esagono e non deve intersecare i suoi lati. Pertanto dobbiamo considerare l'esagono inscritto in quello dato i cui lati cadono ad una distanza uguale al raggio della moneta dai lati dell'esagono assegnato come mostrato in figur a. La probabilità richiesta è data dal rapporto fra l'area dell'esagono interno e l'area di quello esterno



Dal momento che i due poligoni sono simili possiamo scrivere che:
(Area esagono interno): (Area esagono esterno) = $\overline{OK}^2 : \overline{OH}^2$.

Conoscendo la misura del lato dell'esagono $L=10\text{cm}=100\text{mm}$ e del diametro della moneta $D=23,25\text{mm}$ otteniamo $R=\text{raggio}=11,625\text{ mm}$ e

$$OH = 100 \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \quad (\text{essendo } OH \text{ l'altezza del triangolo equilatero } ABO), \quad OK = (50\sqrt{3} - 11,625) \text{ mm}$$

Da cui
$$p = \frac{(50\sqrt{3} - 11,625)^2}{(50\sqrt{3})^2} = 0,7496 \text{ mm}$$

Questa richiesta ricorda il quesito 3 assegnato nella Sessione Ordinaria del Liceo PNI 2008-2009, solo che allora la moneta doveva cadere all'interno di una mattonella quadrata. Quest'anno la difficoltà è aumentata perché per risolverlo sono necessarie competenze geometriche non elementari.

Quesito 3. La pendenza della retta tangente alla curva di equazione $y = 3^x$ nel suo punto di ascissa x è data dalla derivata prima della funzione calcolata in x , cioè $m = f'(x) = 3^x$. Per trovare il valore di x per cui la tangente nel punto di ascissa x ha pendenza 1, bisogna risolvere l'equazione:

$$3^x \ln 3 = 1, \text{ cioè } 3^x = \frac{1}{\ln 3}.$$

Si ottiene dunque
$$x = \log_3 \left(\frac{1}{\ln 3} \right) = -\frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3}.$$

A questo punto si sarebbe potuto banalmente trovare il valore di x con la calcolatrice e approssimarlo alla terza cifra decimale, ottenendo $x = -0,086$. Secondo noi non ha molto senso in un quesito d'esame richiedere l'approssimazione *solo* attraverso una operazione fatta *meccanicamente* con la calcolatrice!

A nostro parere per rispondere in modo esauriente era necessaria una interpretazione grafica dell'equazione $3^x = \frac{1}{\ln 3}$ e

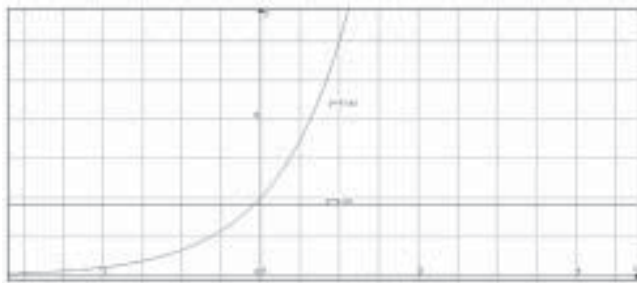
l'applicazione di un metodo numerico per approssimarne la soluzione.

Rappresentando le funzioni:

$$f(x) = 3^x \text{ e } g(x) = \frac{1}{\ln 3}$$

si nota subito che l'equazione data ha un'unica soluzione appartenente a $\left] \frac{1}{2}, 0 \right]$, per cui con un metodo numerico, ad esempio il metodo di bisezione (vedere soluzione problema 2) si giunge al valore di x con l'approssimazione voluta.

Quesito 4. Questo è secondo noi un quesito assolutamente improponibile in una prova d'esame. Infatti la dimostrazione dell'equipotenza di N e Q è specifica, raffinata e particolare. Uno



studente non ha solitamente dimestichezza con queste questioni e questa dimostrazione forse l'ha incontrata una volta nel quinquennio, e solitamente nel biennio! Anche l'anno scorso c'era un quesito concettualmente simile, quello sulla questione galileiana se i quadrati perfetti fossero tanti quanti i numeri naturali, ma poteva essere affrontato semplicemente avendo chiaro il concetto di equipotenza e individuando quindi una «immediata» biiezione $n \rightarrow n^2$ tra l'insieme N e il suo sottoinsieme costituito dai quadrati perfetti. Per la soluzione del quesito si rimanda a un qualunque libro di testo, ribadendo però convintamente l'insensatezza di porlo a uno studente liceale come parte di un esame che dovrebbe verificare le competenze, le capacità logiche, l'uso consapevole delle conoscenze e delle tecniche e non la ripetizione mnemonica delle dimostrazioni di ogni minima questione teorica affrontata nei cinque anni, tranne nel caso in cui la dimostrazione possa essere ricostruita dallo studente durante la prova tramite il ragionamento.

Quesito 5. In tutti e tre i casi si tratta di combinazioni semplici di n oggetti, rispettivamente a 2 a 2, a 3 a 3 e a 4 a 4, infatti l'ordine con cui vengono raggruppati gli oggetti non conta e il testo fornisce l'informazione essenziale che i 3 punti non sono allineati e i 4 punti non sono complanari.

Dunque si ottiene:
$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

In questo caso si poteva arrivare alla soluzione anche ragionando sul fatto che ognuno degli n punti viene collegato con gli $(n-1)$ punti rimanenti, ottenendo coppie, ma in tal caso ogni coppia viene contata 2 volte, quindi bisogna dimezzare il numero ottenuto

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Secondo noi questo quesito è molto semplice e di difficoltà

non paragonabile a quella degli altri quesiti. Tanto più che non veniva chiesta alcuna spiegazione che giustificasse la soluzione (come il fatto che non contava l'ordine ...), quindi tutto si riduceva alla mera applicazione di una formula. Ci chiediamo perché i quesiti abbiano livelli di difficoltà così diversi e perché in certi casi venga richiesta esplicitamente la motivazione ai procedimenti e in altri casi no, per cui non è affatto chiaro il grado di approfondimento necessario per considerare il quesito completamente risolto!

Quesito 6. Essendo $y = x^3 + ax + b$, si ha $y' = 3x^2 + a$ e $y'' = 6x$. Dunque la derivata seconda si annulla solo per $x = 0$ e cambia segno in corrispondenza a tale valore, perciò il punto $F(0, b)$ è l'unico punto di flesso della funzione. Le equazioni della simmetria centrale

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' + 2b \end{cases}$$

per cui, sostituendo, l'immagine di $y = x^3 + ax + b$ è

$$-y' + 2b = (-x')^3 + a(-x') + b$$

che con facili calcoli diventa $y' = (-x')^3 + a(-x') + b$ il che dimostra la simmetria della curva rispetto al punto F .

Si sarebbe potuto traslare la funzione in modo da portare F in O e poi dimostrare che la funzione stessa era simmetrica rispetto a O , dunque dispari.

Il quesito non presenta grosse difficoltà, ma è apprezzabile perché richiede contemporaneamente la padronanza di semplici concetti e tecniche di analisi e conoscenze di base relative alle trasformazioni geometriche. Positiva è anche la scelta di richiedere le equazioni di una simmetria centrale, facili da ricostruire attraverso la formula del punto medio di un segmento (quello che collega un punto e la sua immagine), per cui anche non ricordandole si potevano ricavare attraverso il ragionamento.

Quesito 7. Nel tetraedro regolare $ABCD$ il piede dell'altezza DH cade nel baricentro del triangolo equilatero ABC , quindi il punto H divide l'altezza AM in due parti di cui quella che contiene il vertice doppia dell'altra.

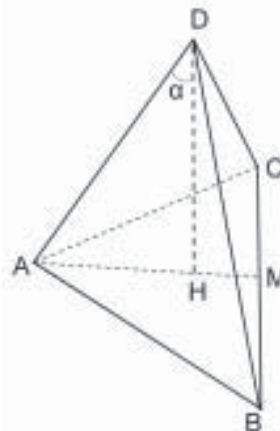
Una volta ricavata la misura di $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ posso calcolare

$$\overline{AH} = \frac{2}{3} \overline{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

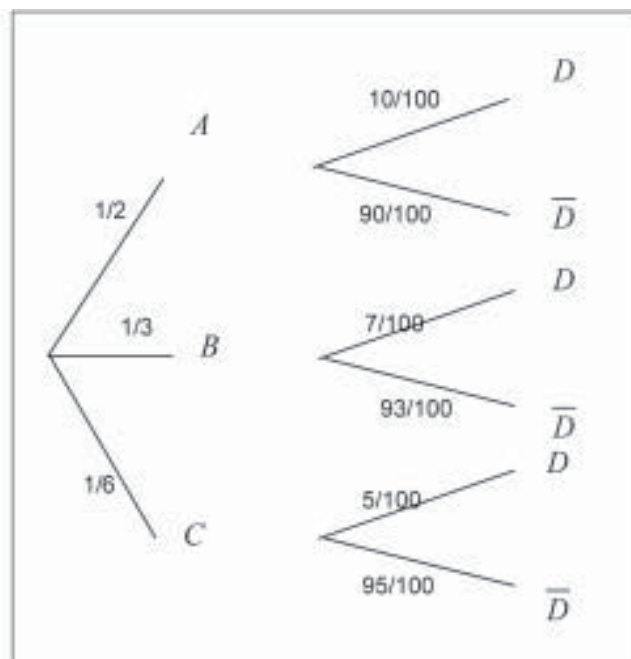
Considerato il triangolo rettangolo AHD si ha $\text{sen} \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}$ per definizione, e sostituendo i valori ottenuti

$$\text{sen} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Buona la scelta del problema che non richiede grandi calcoli, ma l'integrazione di competenze di base di geometria solida, piana e di trigonometria.



Quesito 8. Schematizziamo il problema con un diagramma: indicando con D = pezzo difettoso e con $\bar{D}$ = pezzo non difettoso.



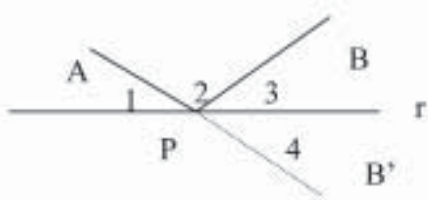
Applicando il teorema di Bayes, la probabilità richiesta è data dal rapporto fra la probabilità del cammino favorevole (cioè la probabilità che il pezzo difettoso provenga dalla macchina A) fratto la somma delle probabilità dei cammini possibili (ossia la probabilità che un pezzo sia difettoso).

$$p(A/D) = \frac{p(A) \cdot p(D/A)}{p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C)}$$

$$p(A/D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{100} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{100}} = 0,6122$$

Questo è un classico quesito di calcolo di probabilità espresso in modo chiaro senza possibilità di fraintendimenti.

Quesito 9.



Tracciamo il punto B' , simmetrico di B rispetto a r e congiungiamo A con B' . Chiamiamo P il punto di intersezione tra AB' ed r .

Essendo $|1| + |2| + |3| = 180^\circ$ e $1 \approx 4$ per ché opposti al vertice, si ha che $|4| + |2| + |3| = 180^\circ$, e dunque A, P e B' sono allineati. Siccome il cammino più breve tra due punti è un segmento di retta e $[PB] \approx [PB']$ il cammino minimo richiesto è $\overline{AP} + \overline{PB}$.

Si sarebbero potuti inserire i punti A, P, B in un opportuno riferimento cartesiano avente l'asse x coincidente con la retta r e il punto A sull'asse y . In tal caso si sarebbe ottenuta un'espressione in funzione dell'ascissa x di P , di cui bisognava ricavare il punto di minimo. Ma il procedimento sarebbe stato eccessivamente lungo e laborioso e dunque sconsigliabile.

È un quesito che richiede una buona dose di intuizione (nell'idea di simmetrizzare il punto) e solide competenze geometriche da applicare in una situazione non standard.

L'unico rischio era che i ragazzi potevano essere indotti a risolvere il problema di minimo con i metodi classici dell'analisi arrivando così ad una situazione analitica difficile da gestire. Ricorda il quesito numero 3 proposto nell'anno 2006 sempre per il Liceo PNI.

Quesito 10. Sezionando la figura con un piano passante per il vertice V , il problema si riduce ad un problema di geometria piana.

Posto $VO = x$ con $x > 0$ la superficie laterale $S = \pi \overline{HB} \cdot \overline{VB}$.

Dalla similitudine dei triangoli VOK e VBH posso ricavare la misura di $\overline{HB}$ e di $\overline{VB}$.

$\overline{VH} : \overline{HB} = \overline{VK} : \overline{OK}$ conoscendo $\overline{OK} = r$ $\overline{VH} = x + r$

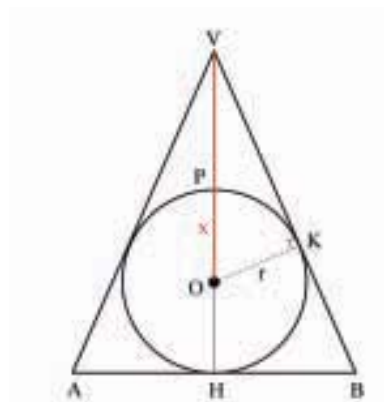
e ricavando con Pitagora $\overline{VK} = \sqrt{x^2 - r^2}$.

Otteniamo $\overline{HB} = \frac{(x+r)r}{\sqrt{x^2 - r^2}}$.

Da $\overline{VO} : \overline{VB} = \overline{VK} : \overline{VH}$ ricaviamo $\overline{VB} = \frac{(x+r)x}{\sqrt{x^2 - r^2}}$

quindi $S = \pi \overline{HB} \cdot \overline{VB} = \pi \frac{(x+r)r}{\sqrt{x^2 - r^2}} \cdot \frac{(x+r)x}{\sqrt{x^2 - r^2}}$.

$S = \pi \frac{(x+r)^2 x}{(x-r)^2}$.

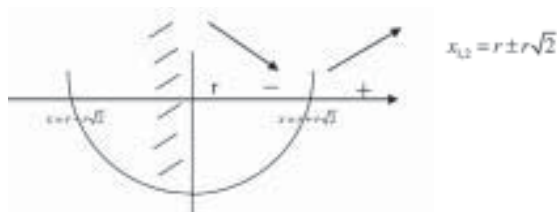


Calcoliamo la derivata $S'(x)$ e studiamone il segno:

$$S' = \pi \frac{(2rx + r^2)(x - r) - (rx^2 + r^2x)}{(x - r)^2}$$

e, svolgendo i calcoli, $S' = \pi r \frac{(x^2 - 2rx - r^2)}{(x - r)^2}$.

Essendo il denominatore positivo basta studiare il segno del numeratore: $x^2 - 2rx - r^2 \geq 0$



Si ha un minimo per $x = r + r\sqrt{2}$ quindi $\overline{VO} = r + r\sqrt{2}$ e di conseguenza $\overline{VP} = r + r\sqrt{2} - r = r\sqrt{2}$.

È un classico problema di minimo simile ad altri comparsi in maturità precedenti e che permette, giustamente, di utilizzare le competenze acquisite durante l'anno.

Cristina Agazzi, Patrizia Marastoni.
Liceo Scientifico «G.Falcone», Asola(MN)