

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Alessandro Musesti

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1. Il limite per $x \rightarrow +\infty$ viene immediatamente $+\infty$. Il limite per $x \rightarrow -\infty$, tenendo conto che $e^x \rightarrow 0$, dà

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln 4 + 2 = -\infty.$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \\ &= 2 \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = 2 \ln 4 + 2, \end{aligned}$$

quindi $f(x) + f(-x)$ è costante. Ora trasliamo la funzione f in verticale, ponendo

$$g(x) = f(x) - (\ln 4 + 1).$$

Otteniamo che $g(x) + g(-x) = 0$, ovvero che g è una funzione dispari. Quindi $(0; 0)$ è centro di simmetria per la funzione g ; questo significa, tornando indietro con la traslazione, che $(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria per f .

2. Dimostriamo che f è strettamente monotona:

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e f è monotona, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione per ogni $m \in \mathbb{R}$. Se α è tale che $f(\alpha) = 3$, avendo mostrato prima che $f(x) + f(-x) = 2 \ln 4 + 2$ per ogni x , otteniamo

$$f(-\alpha) = 2 \ln 4 + 2 - f(\alpha) = 2 \ln 4 - 1.$$

3. È immediato vedere che

$$2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 2 - 2e^x}{e^x + 1} = \frac{2}{e^x + 1},$$

quindi le due espressioni di f sono uguali. Cerchiamo gli asintoti obliqui: per $x \rightarrow +\infty$ usiamo l'espressione

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0,$$

si ha $f(x) = x + \ln 4 + o(x)$, dove con $o(x)$ si intende un'espressione che va a 0 per $x \rightarrow +\infty$.

Questo vuol dire che $y = x + \ln 4$ è asintoto obliquo *destro*.

Per $x \rightarrow -\infty$ conviene usare l'espressione

$$f(x) = x + \ln 4 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = 0,$$

LA TRACCIA MINISTERIALE

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy .

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$.

Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto $A(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ .

2. Si provi che, per tutti i reali m , l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?

3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s .

4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4] dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy . Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.

2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R .

3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).

4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y , la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

QUESTIONARIO

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera

perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.

3. Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .

4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .

5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali («i numeri tutti»). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

6. Di tutti i coni iscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

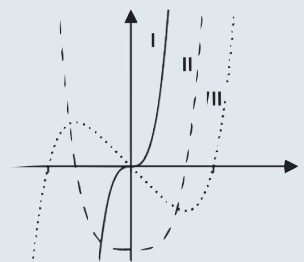
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II



Si motivi la risposta.

si ha $f(x) = x + \ln 4 + 2 + o(x)$, dove con $o(x)$ stavolta si intende un'espressione che va a 0 per $x \rightarrow -\infty$. Questo vuol dire che $y = x + \ln 4 + 2$ è asintoto obliquo *sinistro*.

Inoltre, essendo $\frac{2}{e^x + 1}$ sempre strettamente positiva, si ha che

$$f(x) > x + \ln 4,$$

quindi il grafico di f sta sempre sopra la retta $y = x + \ln 4$.

Essendo poi $-\frac{2e^x}{e^x + 1}$ sempre negativo, si ha

$$f(x) < x + \ln 4 + 2,$$

e quindi il grafico di f sta sempre sotto la retta $y = x + \ln 4 + 2$.

4. Calcoliamo l'integrale; conviene usare la seconda espressione di f :

$$\begin{aligned} I(\beta) &= \int_0^\beta \left(2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \right) dx = [2x - 2 \ln(e^x + 1)]_0^\beta = \\ &= 2(\beta - \ln(e^\beta + 1) + \ln 2). \end{aligned}$$

Per poter calcolare il limite per $\beta \rightarrow +\infty$, poniamo $\beta > 0$ e riscriviamo β come $\ln e^\beta$, in modo da poterlo raggruppare con l'altro logaritmo. Si ha

$$I(\beta) = 2 \left(\ln e^\beta - \ln(e^\beta + 1) + \ln 2 \right) = 2 \left(\ln \frac{e^\beta}{e^\beta + 1} + \ln 2 \right),$$

quindi

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} 2 \left(\ln \frac{e^\beta}{e^\beta + 1} + \ln 2 \right) = 2 \ln 2.$$

Geometricamente questo risultato indica che l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle y , Γ e l'asintoto obliquo destro è finita e vale $2 \ln 2$ (Fig. 6).

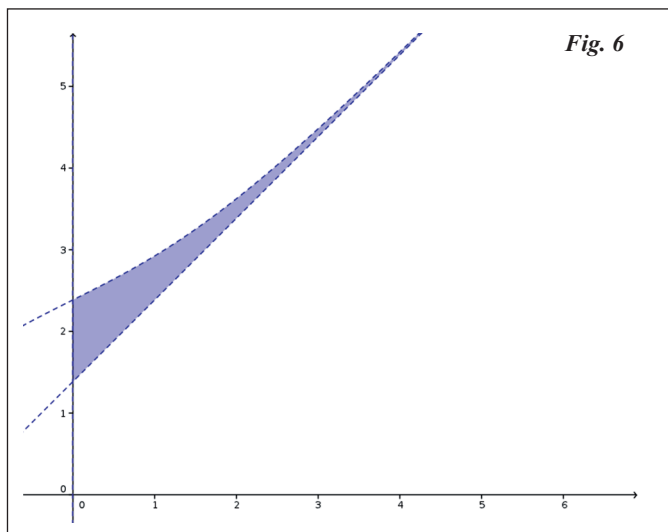


Fig. 6

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1. Il grafico delle due funzioni è piuttosto semplice da tracciare: la funzione f è una cubica, con flesso nell'origine, massimo in $x = -4\sqrt{3}/3$ e minimo in $x = 4\sqrt{3}/3$. Le quote del massimo e del minimo valgono $\pm \frac{128}{9}\sqrt{3}$.

La funzione g è una senoide che si annulla sugli interi pari, infatti:

$$\frac{\pi}{2}x = k\pi \Rightarrow x = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

I massimi (che ovviamente valgono 1) si hanno per

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = 1 + 4k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e i minimi (che valgono -1) si hanno per

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = 3 + 4k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il disegno è mostrato in Fig. 7, dove abbiamo riscalato molto l'asse verticale.

I punti di g a tangente orizzontale nell'intervallo $[-10; 10]$ sono i punti di ascissa dispari, quindi:

$(-9; -1); (-7; 1); (-5; -1); (-3; 1); (-1; -1); (1; 1); (3; -1); (5; 1); (7; -1); (9; 1).$

2. Si può osservare che nell'intervallo $[0; 4]$ le due funzioni si intersecano soltanto negli estremi dell'intervallo, anche se per dimostrarlo bisogna fare alcune stime non semplici. Poiché $f \leq g$, per trovare l'area calcoliamo l'integrale definito

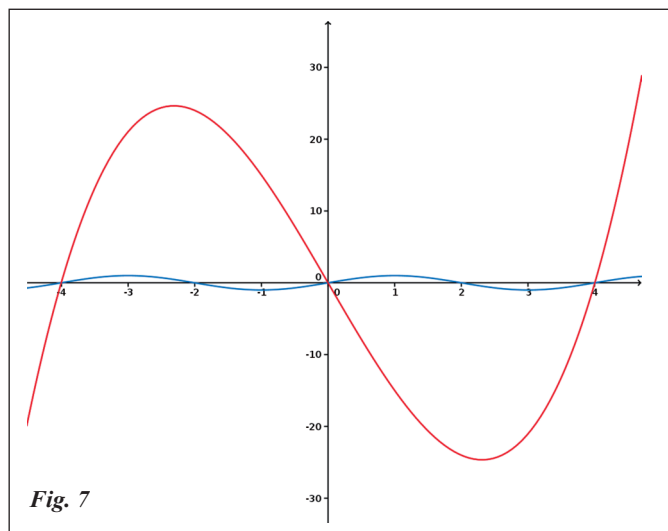


Fig. 7

$$\begin{aligned} \int_0^4 (g(x) - f(x)) dx &= \int_0^4 \left(\sin \frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x \right) dx = \\ &= \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right]_0^4 = -\frac{2}{\pi} - 64 + 128 + \frac{2}{\pi} = 64. \end{aligned}$$

3. Le rette $y = -15$ e $y = -5$ intersecano il bordo di R sul grafico di f . Quindi cominciamo a calcolare

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -15 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 16x + 15 = 0.$$

L'equazione cubica ha soluzione $x = 1$ e scomponendo con Ruffini si ottiene

$$\begin{aligned} x^3 - 16x + 15 &= (x - 1)(x^2 + x - 15) \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}. \end{aligned}$$

La soluzione negativa non è accettabile, mentre quella positiva, approssimando $\sqrt{61}$, vale circa

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} \simeq 3.4.$$

Troviamo le intersezioni con l'altra retta ponendo

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow P(x) = x^3 - 16x + 5 = 0.$$

Stavolta non troviamo soluzioni esplicite per applicare Ruffini, quindi procediamo col teorema degli zeri, aiutandoci col disegno e con una calcolatrice.

La prima soluzione accettabile sta tra 0 e 0.5, infatti:

$$P(0) = 5; \quad P(0.5) = -2.875 < 0.$$

Provando in qualche punto troviamo

$P(0.2) = 1.808 > 0$; $P(0.3) = 0.227 > 0$; $P(0.4) = -1.336 < 0$; quindi la soluzione sta tra 0.3 e 0.4 (con Maxima, un software libero di calcolo numerico, si trova $x_1 \simeq 0.31444315047958$).

Sulla seconda soluzione si fa un discorso simile: partiamo da 3.5 e incrementiamo:

$P(3.5) = -8.125 < 0$; $P(3.7) = -3.547 < 0$; $P(3.9) = 1.919 > 0$;
 $P(3.8) = -0.928 < 0$ quindi la soluzione sta tra 3.8 e 3.9
 (Maxima dice $x_2 \approx 3.833498175486558$).

4. Questo punto è difficile. Il volume si può trovare come somme di «parallelepipedi infinitesimi» di spessore dx , altezza $5 - x$ e base $g(x) - f(x)$, quindi

$$V = \int_0^4 \left(\sin \frac{\pi}{2} x - x^3 + 16x \right) (5 - x) dx.$$

Calcoliamolo per parti, visto che conosciamo già una primitiva di $g(x) - f(x)$:

$$\begin{aligned} V &= \left[\left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right) (5 - x) \right]_0^4 + \\ &\quad + \int_0^4 \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} - 64 + 128 + \frac{10}{\pi} + \left[-\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} x - \frac{x^5}{20} + \frac{8}{3} x^3 \right]_0^4 = \\ &= \frac{8}{\pi} + 64 - \frac{256}{5} + \frac{512}{3} = \frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15} \approx 186.013. \end{aligned}$$

Quindi 186.013 m³ corrispondono a 186 013 litri.

SOLUZIONE DEL QUESTIONARIO

(Per i quesiti mancanti si veda il commento alla maturità scientifica tradizionale).

1. Brevemente: la geometria euclidea è vera così come sono veri altri modelli di geometrie, nel senso che hanno tutti la stessa coerenza interna. Il tipo di geometria da usare diventa una scelta modellistica, in funzione del fenomeno che si vuole descrivere: ad esempio, sulla scala di una città andrà benissimo la geometria euclidea, a scala planetaria ci vorrà invece la geometria sferica. Sulla scala dell'universo poi potrebbe essere utile una geometria ancora più generale.

3. **Primo modo (lungo).** Poiché la regione R ruota attorno all'asse y , il solido ha una sorta di "buco" centrale, e il volume si ottiene per differenza. Conviene invertire la funzione, che però non è monotona sull'intervallo $[0; \pi]$. Quindi otteniamo due funzioni definite per $y \in [0; 1]$: $x = \arcsen y$ e $x = \pi - \arcsen y$. Ricordando la formula del volume di un solido di rotazione, si ha

$$\begin{aligned} \pi \left[\int_0^1 (\pi - \arcsen(y))^2 dy - \int_0^1 (\arcsen(y))^2 dy \right] &= \\ &= \pi \left[\int_0^1 \pi^2 dy - 2\pi \int_0^1 \arcsen(y) dy \right]. \end{aligned}$$

L'integrale di $\arcsen(y)$ può essere calcolato per parti (moltiplicando per la funzione fittizia 1) e si ha

$$\begin{aligned} \int 1 \arcsen(y) dy &= y \arcsen(y) - \int \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \\ &= y \arcsen(y) + \sqrt{1 - y^2}. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$V = \pi \left[\pi^2 - 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = 2\pi^2.$$

Secondo modo. Per chi l'ha studiata e se la ricorda, esiste una formula semplice per il volume dei solidi di rotazione attorno all'asse y :

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

(la formula può essere ricavata pensando di suddividere il solido in tante superfici cilindriche relative all'asse y).

Applicando direttamente la formula si trova

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi [-x \cos x]_0^\pi - 2\pi \int_0^\pi \cos x dx = \\ &= [-x \cos x - \sin x]_0^\pi = 2\pi(\pi) = 2\pi^2. \end{aligned}$$

Terzo modo. Esiste una formula abbastanza generale per il volume dei solidi di rotazione, che però presuppone di conoscere il baricentro della superficie: il volume del solido di rotazione è dato da

$$V = 2\pi \cdot d \cdot S;$$

dove d è la distanza del baricentro dall'asse di rotazione e S è l'area della superficie che ruota.

Nel nostro caso,

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2,$$

e poiché il baricentro della superficie sta sull'asse di simmetria $x = \frac{\pi}{2}$, si ha $d = \frac{\pi}{2}$, quindi

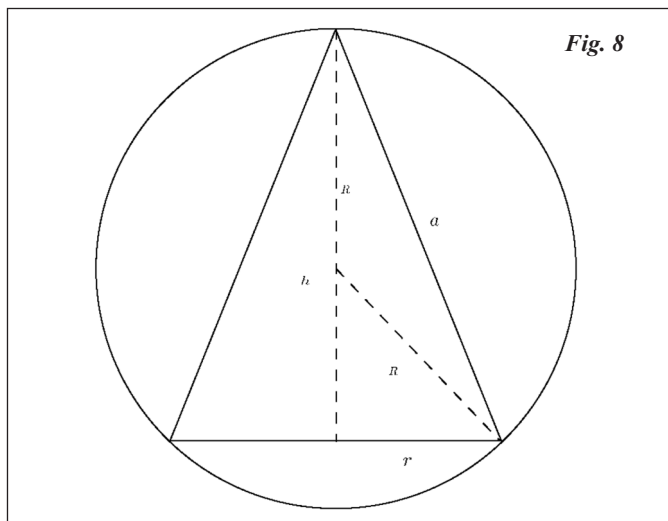
$$V = 2\pi \frac{\pi}{2} 2 = 2\pi^2.$$

5. Brevemente: si può richiamare il concetto di *corrispondenza biunivoca* (o di funzione biiettiva) e spiegare che una caratteristica degli insiemi infiniti è proprio quella di poter essere messi in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio. Anzi, nella matematica contemporanea questa è proprio la definizione di insieme infinito, e un insieme è finito quando non verifica questa proprietà. Per i più preparati, si può anche accennare alla teoria di Cantor per cui esistono vari tipi di infinito, e mostrare ad esempio che l'insieme dei numeri reali ha un ordine di infinito più grande di quello dei numeri naturali.

6. Anche se non è scritto, si immagina che i coni siano retti (visto che trovare la superficie laterale di un cono non retto non è per niente facile). Per i coni retti la superficie laterale è data da

$$S = \pi r a.$$

dove a è l'apotema del cono. Vediamo una figura in sezione (indichiamo con $R = 10$ cm il raggio della sfera).



Usiamo come incognita l'altezza h del cono: si ha

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2hR - h^2 \Rightarrow r = \sqrt{2hR - h^2}$$

e quindi

$$a = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2hR}.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} S(h) &= \pi r \sqrt{2hR} = \pi \sqrt{2hR - h^2} \sqrt{2hR} = \\ &= \pi \sqrt{2R} \sqrt{2Rh^2 - h^3}. \end{aligned}$$

Il massimo si trova derivando la funzione:

$$\begin{aligned} S'(h) &= \pi \sqrt{2R} \frac{4Rh - 3h^2}{2\sqrt{2Rh^2 - h^3}} \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4R &\geq 3h \Rightarrow h \leq \frac{4}{3}R. \end{aligned}$$

Quindi il massimo si ha per $h = \frac{4}{3}$ e $R = \frac{40}{3}$ cm $\simeq 13.33$ cm.

La superficie laterale vale

$$S\left(\frac{40}{3}\right) = \pi \frac{800}{9} \sqrt{3} \text{ cm}^2 \simeq 483.68 \text{ cm}^2.$$

7. Conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare, ovvero la probabilità di sbagliarle tutte o di azzeccarne una soltanto. Si ha

$$P(\text{tutte sbagliate}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10},$$

mentre la probabilità di azzeccarne esattamente una si può trovare moltiplicando il numero totale di domande, cioè 10, per la probabilità di azzeccare esattamente una domanda fissata, che è

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^9.$$

Quindi la probabilità dell'evento cercato si ottiene per complementarità:

$$\begin{aligned} P &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - 10 \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9 \left[\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right] = \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9 \frac{13}{4} \simeq 0.756. \end{aligned}$$

COMMENTO ALLA PROVA

Cerchiamo di commentare in modo piuttosto dettagliato la prova di Matematica PNI di quest'anno. A mio modesto parere, la prova di quest'anno è particolarmente difficile, anche se per certi versi ripropone alcuni schemi che già si potevano vedere negli anni passati. Ci sono alcuni fatti generali che è bene sottolineare subito, e che potranno guidare la preparazione della prova di Matematica agli esami di stato nei prossimi anni.

- Si osserva un progressivo abbandono dei problemi di geometria sintetica: tali problemi, che la facevano quasi da padrone un po' di anni fa, ora sono praticamente assenti. Solo in alcuni quesiti ne rimangono delle tracce (si veda ad esempio il Quesito 6, dove però non si va al di là di semplici applicazioni del Teorema di Pitagora).
- Anche gli argomenti trigonometrici quest'anno sono quasi completamente assenti: i concetti goniometrici compaiono solo attraverso l'aspetto funzionale (si veda il Problema 2 e il Quesito 3).
- Un'altra assenza rimarchevole è quella delle coniche: non c'è alcun accenno a parabole, ellissi, iperboli.
- Sono invece sviluppati parecchi argomenti legati allo studio di funzione, anche se non nel suo aspetto più classico: ad esempio, quest'anno non si è dovuta calcolare nemmeno una derivata seconda, mentre si sono dovuti fare ragionamenti più sofisticati sulle simmetrie.

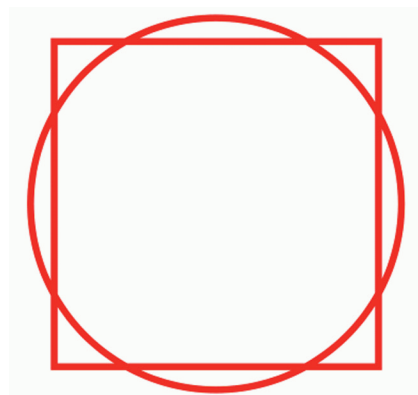


Fig. 9. Quadratura del cerchio. È uno dei problemi classici della geometria e consiste nel costruire con riga e compasso un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato.

- Gli integrali da calcolare sono parecchi e piuttosto difficili: molti da fare per parti, e c'è addirittura da calcolare una primitiva di $\arcsen x$.
- Il quesito «storico-critico», sempre presente nelle prove degli ultimi anni, quest'anno si è moltiplicato: sui dieci quesiti, ben tre sono di carattere storico (contando anche quello sugli insiemi infiniti).

• Mi pare anche di vedere una tendenza a «mascherare» i quesiti semplici, in modo da trarre in inganno lo studente che ha studiato in modo puramente meccanico. Questa tendenza è da leggere in modo positivo, ma ovviamente complica le cose per chi vuole operare una preparazione efficace dell'esame. Ma vediamo le cose più nel dettaglio.

Problema 1. Il problema riguarda lo studio di una funzione: in sé e per sé è abbastanza semplice, però alcune domande non sono standard ed escono da una preparazione canonica: questo avviene ad esempio nella domanda sulla verifica del centro di simmetria del grafico della funzione. La domanda non è difficile, ma di solito si parla di centro di simmetria solo per le funzioni dispari, e non per le loro traslate. Anche la presenza del termine $\ln 4$, assolutamente ininfluente ai fini dell'esercizio, potrebbe aver contribuito a "spaventare" alcuni studenti, traendoli in inganno. Globalmente, comunque, la difficoltà del problema è medio-difficile.

Problema 2. Qui le cose peggiorano: intanto già la funzione $\sin \frac{\pi}{2}x$, che è una funzione facile, può aver tratto in inganno parecchi studenti per la presenza del termine $\frac{\pi}{2}$ (che invece in realtà semplifica la vita).

C'è poi la questione del calcolo dell'area compresa tra i due grafici (punto 2): in sé il conto è standard, ma in teoria andrebbe verificato che le due funzioni si intersecano solo negli estremi dell'intervallo, e la verifica non è per niente semplice. Si veda a questo proposito la soluzione, in questa stessa rivista, proposta per un problema molto simile nella prova tradizionale.

Inoltre, anche la ricerca di soluzioni dell'equazione cubica $x^3 - 16x = -5$ con un errore di 10^{-1} richiedeva parecchi conti (anche se in questo caso un buon uso della calcolatrice poteva venire in aiuto).

Ma la domanda più difficile sta nel punto 4: per risolvere questo punto bisogna avere le idee molto chiare su come funziona l'integrazione tridimensionale, e non mi pare che di solito vengano fatti esempi in tal senso in un corso liceale di matematica. Anche se poi bisogna semplicemente moltiplicare la funzione precedente per $(5 - x)$, e magari qualche studente ci è arrivato usando un pò di intuizione, ritengo che questo punto sia quello che esce dagli schemi più di tutto in questa prova. Quindi: in assenza del punto 4 avrei giudicato medio-difficile il problema, ma la presenza di quel punto lo porta ad essere molto difficile.

Questionario

1. Il primo quesito è standard, ormai la domanda sulle geometrie non euclidee capita molto spesso, anche se stavolta è focalizzata molto sull'idea di modello geometrico e meno sulla storia del Quinto Postulato.
2. Direi che questo è un quesito normale.
3. Questo invece è un quesito molto subdolo: o si è vista una formula per il volume dei solidi di rotazione attorno all'asse y ,

oppure l'applicazione della formula solita alla funzione inversa si rivela in questo caso molto lunga e difficile.

4. Il quesito è standard, a patto di ricordare come si calcolano le combinazioni di n oggetti. Altrimenti diventa un quesito di difficoltà insormontabile.
 5. Il quesito è interessante e si presta a molte discussioni. Però l'argomento della cardinalità degli insiemi (la Teoria di Cantor) di solito non viene trattato a fondo, quindi può risultare un quesito difficile.
 6. Il quesito è abbastanza standard, anche se richiede attenzione nei conti. È praticamente l'unico esercizio geometrico di tutta la prova.
 7. È un quesito classico di calcolo delle probabilità. Anche qui, la sua difficoltà dipende dalla profondità a cui ci si è spinti nella trattazione dell'argomento.
 8. L'argomento forse è classico, ma dire qualcosa di matematico è molto difficile: la trascendenza di π , che ha chiuso il problema, è stata dimostrata solo verso la fine del XIX secolo e di solito non viene affrontata neppure nei corsi universitari. Qui in realtà veniva richiesto solo un inquadramento teorico-storico del problema, ma il quesito resta comunque difficile.
 9. Il quesito non è difficile, ma richiede un po' di «visione tridimensionale», quindi può aver spiazzato parecchi studenti.
 10. Un quesito nella norma, anche se richiede una certa attenzione nello scartare le varie possibilità.
- Per chiudere questa parte di commento: a mio giudizio uno studente poteva arrivare a prendere il massimo con una scelta

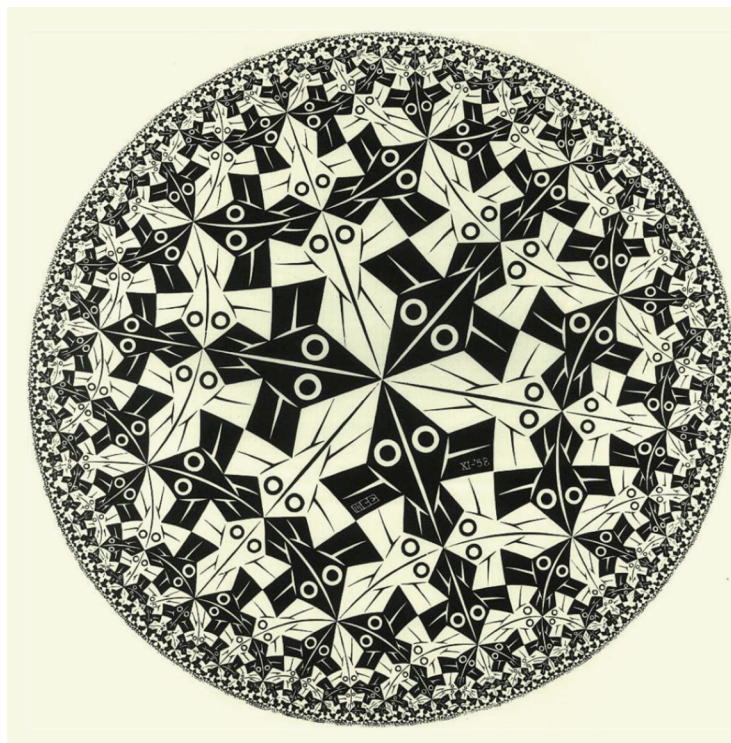


Fig. 10. A proposito di geometrie non euclidee: M.C. Escher, «Limite del cerchio I» (1958). Rappresenta una tassellazione del piano iperbolico, secondo il modello di Poincaré, opera ispirata dall'amico matematico Coxeter.

oculata dei problemi e dei quesiti: se supponiamo di avere uno studente bravo, che però non ha ampliato il suo orizzonte e si è limitato a studiare bene il programma curricolare, una scelta possibile poteva essere: problema 1, quesiti 2, 6, 7, 9, 10. In generale però credo che molti studenti siano caduti nei numerosi trabocchetti di cui la prova è infarcita, vanificando alcuni anni di studio.

CONSIGLI ED ORIENTAMENTI GENERALI

Ovviamente i consigli che mi sento di dare riflettono soltanto delle sensazioni, sensazioni che mi sono rimaste dopo un attento esame della prova e dopo averla risolta.

Una prima osservazione, a cui ho già fatto cenno, riguarda il tipico problema di geometria, da risolvere per via sintetica o goniometrica: questo problema è assente. Non c'è stata alcuna necessità di applicare le formule goniometriche, nè il Teorema dei seni o del coseno, nè il Teorema della corda. Visto che di solito la trattazione di questi problemi occupa una grossa fetta del tempo a disposizione nel quarto anno e anche parecchio del quinto, forse si potrebbe pensare di dedicare un po' di questo tempo alla trattazione di problemi meno standard e a qualche approfondimento storico.

Riguardo all'assenza delle coniche, invece, non me la sentirei di dire che è una tendenza generale: probabilmente è un caso che quest'anno non siano state neppure citate. Di solito invece è naturale aspettarsi qualche quesito o problema riguardante per lo meno la parabola.

Una seconda osservazione riguarda proprio la parte storico-critica: bisogna cercare di trovare del tempo per trattare alcuni argomenti anche dal punto di vista storico. Argomenti classici, che potrebbero capitare, sono:

- le geometrie non euclidee;
- i tre problemi classici impossibili da risolvere con riga e compasso: quadratura del cerchio, trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo;
- il concetto di sistema assiomatico;
- i teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange;
- i solidi platonici;
- la costruzione di poligoni regolari (Teorema di Gauss sulla costruibilità);
- i numeri di Fibonacci e la sezione aurea.

Su alcuni, o tutti, questi argomenti, si potrebbe pensare di impostare una lezione, e magari inserirli nelle varie simulazioni delle prove durante l'anno. Mi rendo conto che il tempo è sempre tiranno, e non vorrei attirarmi delle critiche del tipo «Non c'è il tempo per fare questa cosa!». Non stento a crederlo: se però si riesce a recuperare qualche ora qui e là, piuttosto che rimettersi a ripassare meccanicamente tutta una serie di esercizi, io proverei a fare delle lezioni su argomenti alternativi.

Infine, non vanno tralasciati gli argomenti di Calcolo delle probabilità e di Combinatoria: anche quest'anno due quesiti erano proprio su questi argomenti.

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore - Brescia

CONSIDERAZIONI CRITICHE SULLA PROVA: PNI

Antonio Marro

PROBLEMA 1

Il problema è impegnativo sia dal punto di vista concettuale che da quello dei calcoli. Le quattro questioni proposte mostrano un «crescendo» di difficoltà che culmina con l'integrazione di cui al punto 4, che è lunga e complessa. Per affrontare un problema di questo tipo è indispensabile per i candidati possedere una preparazione estesa e di buon livello, e una capacità di ragionamento superiore alla media.

È da sottolineare, inoltre, che le questioni proposte sono tutte di «matematica pura», mancando qualsiasi «aggancio» a problemi del mondo reale. Ma in un tema d'esame che presenta una varietà di proposte, tra le quali il candidato è chiamato a scegliere, ci può ben stare anche un problema che richiede di risolvere solo quesiti di matematica teorica.

Anche in questo problema, purtroppo, la traccia presenta il «passaggio» assai criticabile dell'indicazione del sistema di riferimento *Oxy*, senza altra precisazione, come se si trattasse di un sistema di riferimento dalle caratteristiche ben individuate e del tutto scontate.

PROBLEMA 2

È del tutto analogo al Problema 1 del Corso di Ordinamento. Infatti le due funzioni,

$$f(x) = x^3 - 16x \text{ e } g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

che costituiscono il «filo conduttore» del problema e fanno da supporto alle quattro domande, hanno le medesime caratteristiche delle omonime funzioni ivi considerate.

La perfetta analogia con il Problema 1 del Corso di Ordinamento consente pertanto di rinviare il commento alle osservazioni e ai giudizi espressi in coda a tale problema. Qui si può aggiungere non senza un certo apprezzamento che il riferimento a situazioni reali non è né forzato né episodico. Il «progetto della piscina», ispirato ai grafici delle due funzioni, sembra verosimile in ogni sua parte e sicuramente ha fornito ai candidati un esempio efficace di «matematica concreta».

QUESTIONARIO

Per i quesiti 2, 4, 8, 9 e 10 si rimanda alle considerazioni fatte nell'articolo relativo al tema del Corso di Ordinamento (paragrafi ad essi relativi).

Quesito 1) È un quesito al quale i candidati non hanno potuto che rispondere in modo sommario, così come l'argomento viene affrontato (se viene trattato) nei corsi curricolari. D'altra parte, se si escludono le Indicazioni di matematica per il liceo scientifico della riforma Moratti – nelle quali si prevedeva, tra le conoscenze, «gli sviluppi della geometria nella storia» – non pare che le indicazioni ministeriali più recenti prevedano

nulla del genere. Ci si chiede allora che senso abbia la presenza di un quesito di questo tipo in un tema di Esame di Stato.

Quesito 3) Il quesito non è semplice. Ma in un questionario contenente diversi argomenti «abbordabili» ci sta anche che venga proposto qualche problema più difficile, nella cui soluzione si possano cimentare i candidati più bravi e preparati.

Quesito 5) La proposizione di un quesito simile ricorda ai docenti che è sempre opportuno, quando ciò è consentito dall'argomento di matematica che si sta affrontando, non trascurare riferimenti alla storia della matematica attraverso la lettura di brani della «letteratura» matematica. Non sono pochi, credo, gli studenti che, attraverso questa via, trarrebbero curiosità e motivazione allo studio della materia.

Quesito 6) Si tratta di un quesito di media difficoltà, simile al quesito 1 del questionario di Ordinamento, rispetto al quale, forse, è leggermente più complicato. È un quesito piuttosto comune, nel senso che si incontra facilmente negli eserciziari e non si esclude che nel corso dell'anno i candidati abbiano affrontato, nelle esercitazioni, problemi molto simili. Questa considerazione non va intesa, comunque, come un invito a non proporre quesiti di questo tipo. La caratteristica più importante di un tema d'Esame di Stato dev'essere quella di vertere principalmente su contenuti ed esercizi sui quali gli studenti hanno sicuramente lavorato nel corso dell'anno scolastico.

Quesito 7) È un ottimo quesito, soprattutto perché esce dagli schemi usuali del «lancio di dadi» o della solita «estrazione di palline» dall'urna. Inoltre, sollecita il candidato a mostrare le sue capacità di riflessione e ragionamento.

I due temi (Ordinamento e PNI) coincidono sostanzialmente per metà delle questioni proposte. Infatti, il Problema 1 del Corso di Ordinamento e il Problema 2 del Corso PNI, come è stato osservato, sono praticamente uguali; e cinque dei dieci quesiti del questionario coincidono. Questa circostanza dovrebbe consigliare ormai di unificare le due prove, ancor prima che la riforma giunga a regime.

INDICAZIONI PER I DOCENTI

I docenti dovrebbero procedere allo svolgimento del programma occupandosi principalmente di ciò che è fondamentale e irrinunciabile, cercando di completare con cura tutto il programma. Infatti, nei temi d'esame degli ultimi anni, molte delle questioni proposte richiedono operazioni di integrazione (ultima parte del programma) e, spesso, la funzione da integrare non è di facile impostazione, richiedendo doti di intuito, di ragionamento e anche di «fantasia». Lo sviluppo di queste capacità e la «penetrazione»

del concetto di integrale richiedono tempo ed esercizio, che spesso manca.

Sarebbe consigliabile quindi un percorso più «veloce» nel corso dell'anno: sorvolando, per esempio, sulle dimostrazioni più complicate e inessenziali; e, così agendo, riservarsi un tempo più congruo per la «sistemazione» di tutti quei concetti che, come l'integrazione, sono prerequisiti funzionali alle questioni proposte più di frequente agli esami.

Vista la disinvoltura con cui i testi ministeriali si presentano imprecisi, poco rigorosi e incompleti nella formulazione, sarebbe utile analizzare insieme agli studenti gli enunciati dei problemi e dei quesiti, sottolineandone le imprecisioni e/o le carenze lessicali. Lo scopo è quello sia di evitare che i candidati siano fuorviati dalle formulazioni ambigue e superficiali che quello di rendere gli studenti sensibili, accorti e precisi nella lettura e interpretazione di un testo matematico.

Antonio Marro
Dirigente scolastico

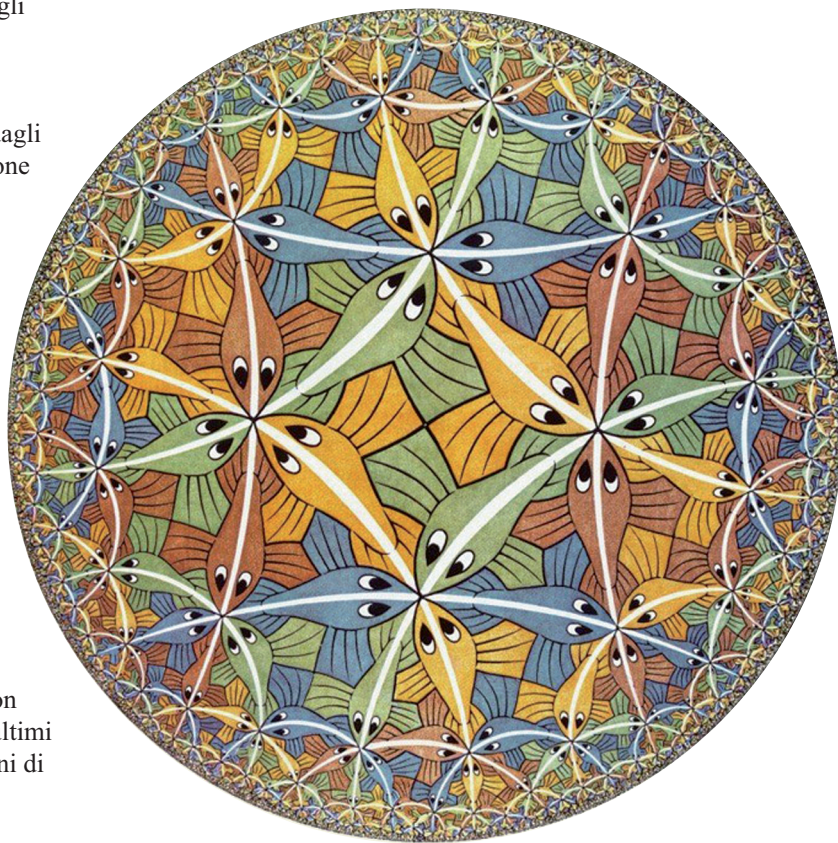


Fig. 11. M.C. Escher, «Limite del cerchio III» (1959).