

ESAMI CONCLUSIVI

Piano Nazionale Informatica

Alessandro Musesti

Viene proposta nel seguito una possibile risoluzione del tema di Matematica dell'Esame di Stato di Liceo Scientifico 2009, relativo al corso sperimentale PNI. Verranno proposti solo i passaggi essenziali, sperando che questi non risultino troppo oscuri. Alcuni semplici calcoli sono lasciati al lettore, per non rendere troppo tediosa l'esposizione. Dopo la trattazione delle soluzioni verrà dedicato uno spazio al commento sulla prova.

Problema 1

Soluzione. Notiamo, anche se non ne faremo uso nel seguito, che possiamo riscrivere la funzione in modo più compatto, introducendo la notazione di sommatoria:

$$f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Il campo di esistenza di queste funzioni è tutto l'insieme dei numeri reali.

1. Derivando $f(x)$ rispetto a x si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} \left(1 + 2 \frac{x}{2!} + 3 \frac{x^2}{3!} + \dots + n \frac{x^{n-1}}{n!} \right) - f(x) = \\ &= e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) - f(x) \end{aligned}$$

e dunque $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

2. Per trovare i massimi e i minimi della funzione, studiamo il segno della derivata prima della funzione, ovvero

$$-\frac{x^n}{n!} e^{-x} \geq 0.$$

Poiché l'esponenziale è sempre positiva e $n!$ è un numero positivo, resta da studiare la disequazione $x^n \leq 0$. Conviene studiare due casi: se n è pari la soluzione è $x=0$, mentre se n è dispari si ha $x \leq 0$. Quindi per n pari la funzione è strettamente decrescente e non ammette massimi e minimi: in $x=0$, $y=1$ c'è un punto di flesso a tangente orizzontale. Per n dispari si ha un massimo assoluto in $x=0$ e il valore del massimo, sostituendo, risulta 1. Quindi in particolare la funzione è sempre minore o uguale a 1 per n dispari.

3. Per $n=2$ si ottiene la funzione

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) e^{-x}.$$

Si verifica facilmente che la funzione è sempre strettamente positiva e, come abbiamo osservato al punto precedente, essendo n pari la funzione è strettamente crescente e ha un flesso a tangente orizzontale in $(0,1)$. La derivata seconda vale

$$g''(x) = -xe^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x} = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) e^{-x}$$

e dunque $g''(x) \geq 0$ per $x \leq 0 \vee x \geq 2$. Si ha un altro flesso in $(2, 5e^{-2})$ con coefficiente angolare della tangente che vale $-2e^{-2}$.

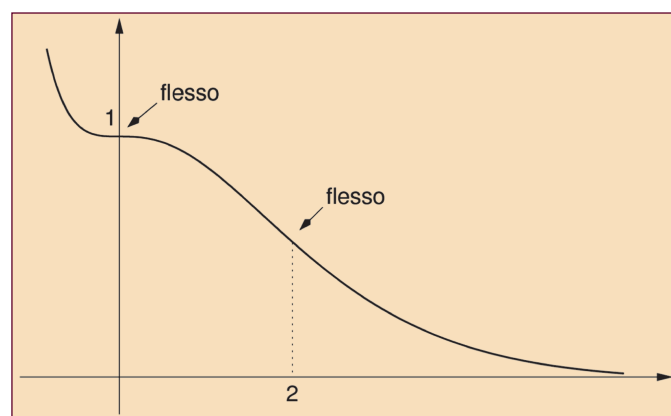
Per quanto riguarda i limiti, è immediato vedere che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

mentre applicando due volte il Teorema di de l'Hôpital si trova

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2}}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Quindi la funzione ha come asintoto orizzontale destro la retta $y=0$. Ecco un grafico della funzione:



4. Per calcolare l'integrale proposto, applichiamo due volte la formula per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx &= \left[-\left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) e^{-x} \right]_0^2 + \int_0^2 (x+1) e^{-x} dx = \\ &= -5e^{-2} + 1 - \left[(x+1) e^{-x} \right]_0^2 = 3 - 9e^{-2} \cong 1,782. \end{aligned}$$

L'interpretazione geometrica è quella solita dell'integrale definito: essendo la funzione positiva, l'integrale denota l'area della parte di piano compresa tra l'asse x e la funzione, tra le rette verticali $x=0$ e $x=2$.

Problema 2

Soluzione.

1) La funzione $f(x) = x^3 + kx$ è una cubica passante per l'origine, e si può scrivere nella forma $f(x) = x(x^2 + k)$. In particolare si ha

LA TRACCIA MINISTERIALE

MATEMATICA

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.

3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n=2$ e se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).

2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.

3. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g . Si calcoli l'area di D .

4. La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W .

QUESTIONARIO

1. Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che:

$$\int_{-b}^b |x - a| dx = a^2 + b^2.$$

2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possi-

bili funzioni (o applicazioni) di A in B , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)

4. "Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

9. Nei "Discorsi e dimostrazioni

matematiche intorno a due nuove

scienze", Galileo Galilei descrive la

costruzione di un solido che chia-

ma *scodella* considerando una

semisfera di raggio r e il cilindro

ad essa circoscritto. La *scodella* si

ottiene togliendo la semisfera dal

cilindro.

Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. "Se due punti P e Q del piano

giacciono dalla stessa parte rispetto

ad una retta AB e gli angoli PAB e

QBA hanno somma minore di 180° ,

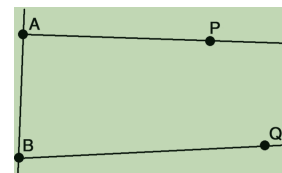
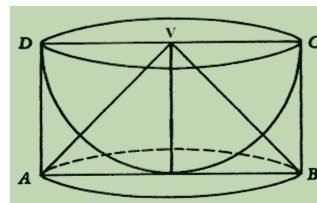
allora le semirette AP e BQ , prolunga-

te adeguatamente al di là dei punti P e

Q , si devono intersecare". Questa

proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di

matematici. Si dica perché e con quali risultati.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

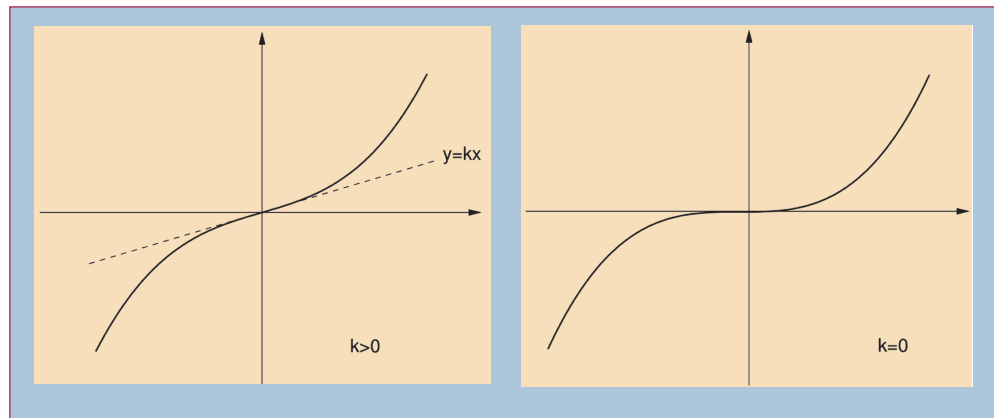
La derivata seconda è $f''(x) = 6x$, quindi la funzione è convessa per $x \geq 0$ e concava per $x \leq 0$. In $x=0$ c'è un flesso con tangente di coefficiente angolare k .

Caso $k \geq 0$: la funzione è positiva per x positivo e negativa per x negativo, e non ci sono massimi e minimi. Se $k=0$ il

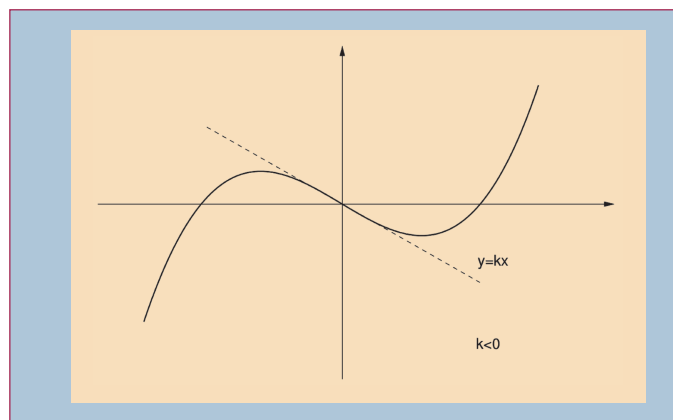


ESAMI CONCLUSIVI

flesso nell'origine ha tangente orizzontale, se $k > 0$ il flesso ha tangente positiva. La funzione ha il seguente andamento:



Caso $k < 0$: la funzione cambia segno in 0 e in $\pm\sqrt{-k}$. La derivata prima vale $f'(x) = 3x^2 + k$ e quindi la funzione ha un massimo e un minimo per $x = \mp\sqrt{-\frac{k}{3}}$. I valori di massimo e minimo sono $\mp\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}$. Inoltre il flesso nell'origine ha tangente di coefficiente angolare negativo k . L'andamento è il seguente:



2. Sia $g(x) = x^3$ e $r(x) = 1 - x$. Poiché g è strettamente crescente e r è strettamente decrescente, le due funzioni si intersecano al più in un punto. Inoltre, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $r(0) = 1$ e $r(1) = 0$, quindi le due funzioni si intersecano esattamente in un punto, che è compreso tra 0 e 1.

Trovare l'ascissa di questo punto significa trovare dove si annulla il polinomio $p(x) = x^3 + x - 1$. Scriviamone la derivata prima: $p'(x) = 3x^2 + 1$. Possiamo usare il metodo di Newton: partendo da $p(0) = -1$, $p'(0) = 1$ otteniamo

$$x_0 = 0 - \frac{p(0)}{p'(0)} = 1, \quad x_1 = 1 - \frac{p(1)}{p'(1)} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{p\left(\frac{3}{4}\right)}{p'\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{59}{86}.$$

Poiché la differenza tra 0,75 e 0,686 è più piccola di 0,1, abbiamo ottenuto la stima cercata (un'approssimazione migliore, eseguita al calcolatore, dà 0,6823278).

3. L'inversa di $g(x)$ è la funzione

$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$

e le due funzioni si intersecano in 0 e in 1. Poiché tra 0 e 1 si ha che $g(x) \leq h(x)$, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3) dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. La bisettrice del primo quadrante è asse di simmetria per la figura D, poiché il grafico della funzione inversa si ottiene proprio facendo una simmetria con asse lungo la bisettrice. Quindi per trovare la sezione di area massima cerchiamo la massima distanza tra il grafico di $g(x)$ e la bisettrice. Usiamo la formula della distanza punto retta: un generico punto della funzione $g(x)$ ha coordinate (x, x^3) , con x compreso tra 0 e 1. La sua distanza dalla retta $x - y = 0$ è

$$d = \frac{|x - x^3|}{\sqrt{2}} = \frac{x - x^3}{\sqrt{2}},$$

dove abbiamo tolto il modulo per le limitazioni su x . Il massimo di tale funzione si trova derivando e cercando i punti stazionari:

$$d' = \frac{1 - 3x^2}{\sqrt{2}} = 0,$$

da cui $x = \sqrt{3}/3$ è il punto di massimo. Il massimo quindi vale

$$d_M = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{9},$$

e la sezione di area massima vale

$$12 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{9} = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Per calcolare il volume del solido W, basta moltiplicare l'area di D per l'altezza costante 12, dunque $W = 12 \cdot D = 6$.

Questionario

1. Per le condizioni poste si ha $-b < 0 < a < b$ e $(x-a) > 0$ per $x > a$.

$$\text{Quindi} \quad \int_{-b}^b |x-a| dx = \int_{-b}^a (a-x) dx + \int_a^b (x-a) dx =$$

$$= a^2 - a^2/2 + ab + b^2/2 + b^2/2 - ab - a^2/2 + a^2 = a^2 + b^2.$$

ESAMI CONCLUSIVI

2. Non possono esserci funzioni iniettive, perché la cardinalità di A è strettamente maggiore di quella di B. Quindi non possono esserci neanche funzioni biiettive. Funzioni suriettive invece ne esistono: ad esempio

$$1 \rightarrow a, \quad 2 \rightarrow b, \quad 3 \rightarrow c, \quad 4 \rightarrow a.$$

Anzi, si può dimostrare che esistono esattamente 36 funzioni suriettive da A a B, anche se la dimostrazione richiede l'uso di tecniche combinatorie non molto semplici.

3. Perché la moneta cada all'interno della mattonella, il centro della moneta deve cadere in un quadrato di lato (100-25,75) mm, quindi la probabilità si può calcolare come rapporto tra l'area di questo quadrato e quella di una mattonella completa:

$$p = \frac{74,25^2}{100^2} = (0,7425)^2 \cong 0,55.$$

Quindi la probabilità è circa del 55%.

4. Non può esistere un poliedro regolare le cui facce siano esagoni regolari: l'angolo di un esagono è 120° , quindi un vertice di questo solido, dove si devono incontrare almeno tre vertici delle facce esagonali, avrebbe un angolo diedrale di $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$. Questo vuol dire che tale vertice sarebbe piatto! In realtà, è noto che i poliedri regolari sono soltanto cinque (i solidi platonici) e che le loro facce possono essere solo triangoli equilateri, quadrati o pentagoni regolari.

5. Chiaramente l'espressione $0/1$ equivale a 0. Le espressioni $1/0$ e $0/0$ invece non rappresentano alcun numero, in quanto la divisione per 0 non è definita. Nella teoria dei limiti, però, le due espressioni sono alquanto diverse: a $1/0$ si attribuisce il significato di "infinito" (∞), in quanto tende all'infinito una funzione il cui numeratore tende a 1 e il denominatore tende a 0. L'espressione $0/0$ è invece una "forma indeterminata", visto che in generale non è possibile conoscere il risultato del limite del quoziente di due funzioni sapendo soltanto che esse tendono a 0; infatti si possono fare esempi di funzioni che tendono a 0 e il cui rapporto va a 0, o va all'infinito, o dà un numero reale a scelta. Ad esempio, si ha facilmente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{|x|}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$$

pur se tutti i limiti si presentano nella forma $0/0$.

L'espressione 0^0 merita un discorso a parte: nella teoria dei limiti è una forma indeterminata, per lo stesso motivo di $0/0$. Anche qui possiamo produrre degli esempi, che però sono decisamente più complicati dei precedenti: prima osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$$

visto che l'esponente tende a $-\infty$. Ora usiamo questa funzione come base: usando la regola della potenza di potenza (ovvero facendo il prodotto degli esponenti) si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{1}{|x|}} \right)^{\sqrt{|x|}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{1}{|x|}} \right)^0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{1}{|x|}} \right)^{-\sqrt{|x|}} = +\infty,$$

anche se tutti e tre i limiti si presentano nella forma 0^0 . Nella teoria dei numeri invece si preferisce solitamente assegnare a quest'espressione il valore 1, per poter estendere la validità di alcune formule anche a questo caso. In particolare, ponendo $0^0=1$ si ha che l'importantissima formula della potenza di un binomio (binomio di Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

vale anche nel caso in cui $a=0$ oppure $b=0$.

6. Abbiamo già incontrato il metodo di Newton nel Problema 2. In questo caso si ha, tenendo conto che $\sin'(x) = \cos(x)$:

$$x_0 = 3 - \frac{\sin(3)}{\cos(3)} \cong 3,142546543, \quad x_1 = x_0 + \frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)} \cong 3,1415926533,$$

che è una notevolissima approssimazione di π alla nona cifra decimale.

7. Scrivendo la definizione di coefficiente binomiale e moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)$ si ha

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)}{(k+1)} = \binom{n}{k} \frac{(n-k)}{(k+1)}.$$

8. Indicando con U il numero degli uomini e con D quello delle donne, si ha che la somma delle età di tutte le persone è $26U+19D$. Quindi, essendo $U+D$ il numero delle persone presenti, si ha

$$22 = \frac{26U+19D}{U+D},$$

da cui risulta

$$22U+22D=26U+19D \Rightarrow 3D=4U \Rightarrow \frac{U}{D} = \frac{3}{4}.$$

Quindi il rapporto fra numero di uomini e numero di donne è $3/4$.

9. Sezioniamo la scodella e il cono con un piano orizzontale, indicando con h la distanza di tale piano dal centro della sfera (che è anche il vertice del cono). La sezione della scodella è una corona circolare di raggi r e R , dove si ha, per il Teorema di Pitagora,

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

Quindi l'area di questa sezione è

$$\pi(R^2 - (R^2 - h^2)) = \pi h^2.$$

La sezione del cono col piano è più semplicemente un cerchio di raggio h , visto che il cono ha il raggio di base uguale alla sua altezza. Quindi l'area di tale sezione è

$$\pi h^2$$

e il principio di Cavalieri ci garantisce che i due volumi sono uguali.

10. La proposizione enunciata nel quesito è il celeberrimo V postulato di Euclide. Sulla storia di questo postulato si possono trovare moltissime fonti, non riteiamo sia il caso di trat-

ESAMI CONCLUSIVI

tarlo esaurientemente in questo contesto. In ogni caso, va puntualizzato che tale postulato è indipendente dagli altri quattro e che la sua assunzione porta a quella che oggi viene appunto chiamata “geometria euclidea”. La sostituzione del



V postulato con altri tipi di assiomi porta a geometrie diverse: in particolare spicca la “geometria iperbolica”, ottenuta assumendo che per un punto esterno a una retta data esistano sempre *almeno due* rette parallele. Questa geometria fu scoperta, inconsapevolmente, da Girolamo Saccheri nel XVIII secolo, nel tentativo di dedurre il V postulato a partire dagli altri quattro. L'altra importante tipologia di geometria, la cosiddetta “geometria ellittica”, deriva dalla sostituzione del V postulato con l'assunto che due rette di un piano abbiano sempre almeno un punto in comune. Affinché non sia contraddittoria, tale geometria richiede però anche la modifica di un altro postulato di Euclide, quello che riguarda la prolungabilità all'infinito delle rette. Infatti, il modello tipico di geometria ellittica è un modello *limitato*, quello dove i punti stanno sulla superficie di una sfera e le rette sono i cerchi massimi della sfera stessa.

Commento

In generale il tema proposto ci pare in linea con quelli degli ultimi anni e adeguato a misurare la preparazione degli studenti sui programmi ministeriali.

Nel primo problema viene fornita una successione di funzioni piuttosto interessante, che combina le somme parziali di un'esponenziale con l'esponenziale inversa, delle quali si stu-

dia la derivata prima e i punti critici. Il secondo problema tratta di nuovo una famiglia parametrica di funzioni, che sono delle cubiche passanti per l'origine. La richiesta di studiarne le proprietà al variare del parametro, sebbene non difficile, pare che sia una variante interessante e non scontata dei soliti esercizi sullo studio di funzione. Nel primo problema c'è poi un integrale che può aver portato qualcuno all'errore, visto che per calcolarlo si deve applicare due volte la formula per parti. Il problema di massimo è abbastanza facile, ma richiede un'accurata interpretazione geometrica del testo. Il calcolo finale del volume è invece molto elementare.

Manca, in questi due problemi, la parte di geometria sintetica. Non si è posta infatti alcuna domanda riguardante i classici teoremi sui triangoli o sulle circonferenze. Questo, a nostro avviso, denota un punto negativo della prova, che avrebbe potuto essere più organica nella parte dei problemi. La parte dei quesiti pare in linea con quelli proposti negli ultimi anni. Dobbiamo dire che in generale abbiamo sempre

trovato il questionario molto interessante: pur se tra alcune sbavature, infatti, i quesiti possono evidenziare meglio se lo studente ha assimilato le tematiche della disciplina, piuttosto che aver solo imparato didascalicamente a risolvere qualche esercizio. Ovviamente una buona preparazione dello studente al questionario richiede alcuni cambiamenti a livello didattico. Come ormai da alcuni anni, anche stavolta è stato proposto il quesito sulle geometrie non euclidee; pur essendo questo tema senza dubbio interessante e molto profondo, forse sarebbe opportuno che venissero individuati anche altri aspetti della matematica che possano essere trattati sia dal punto di vista storico che da quello tecnico. Pensiamo ad esempio ai temi delle formule risolutive per equazioni di terzo e quarto

grado, della costruzione dei numeri reali, della nascita del calcolo differenziale, delle serie convergenti, del calcolo delle probabilità. Non vorremmo, insomma, che ci si fossilizzasse sull'argomento delle geometrie non euclidee come unico approfondimento storico-scientifico nel corso del quinquennio di scuola. Del questionario abbiamo apprezzato in particolare il quesito 2 sulla moneta che cade sul pavimento, perché richiede una certa comprensione della definizione di probabilità nel caso di infiniti eventi possibili, e il quesito 9 sul principio di Cavalieri, perché si trova una sorprendente relazione tra la sfera e il cono.

Alessandro Musesti
Dip. di Matematica e Fisica «N. Tartaglia»
Università Cattolica del S. Cuore, Brescia