

MATEMATICA

Esame di Stato di Liceo Scientifico Corso di Ordinamento Indirizzo: Scientifico

Elisa Appiani - Francesca Baresi - Giulia Cavallari

TRACCIA MINISTERIALE

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0, 9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f .
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x , $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x , area $A(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di W .

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy . Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2; 1)$ e $Q(2; 1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ . Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0; 1)$. Una retta t , per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y = 2$ in un punto B . Si provi che, qualunque sia t , l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x; y)$ di un punto di Φ .

3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0, 2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R , ruotando attorno all'asse y , genera il solido W . Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W .

QUESTIONARIO

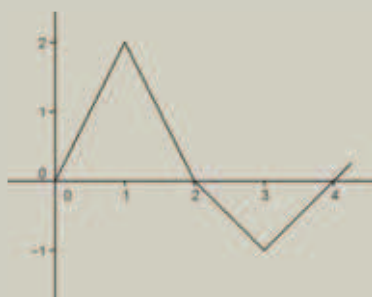
1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$$

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A .
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a , b e h , illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge: "Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o

100%: raddoppio)". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?
7. Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b , ha area 1 m^2 e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b ?
8. La funzione f ha il grafico in figura.

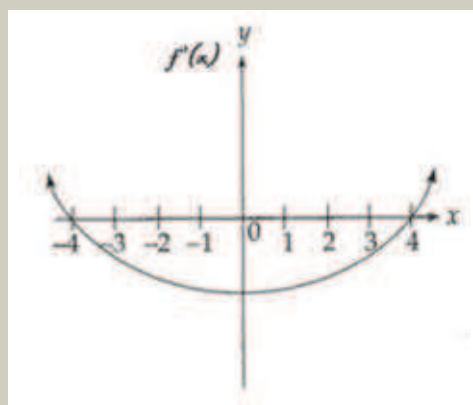
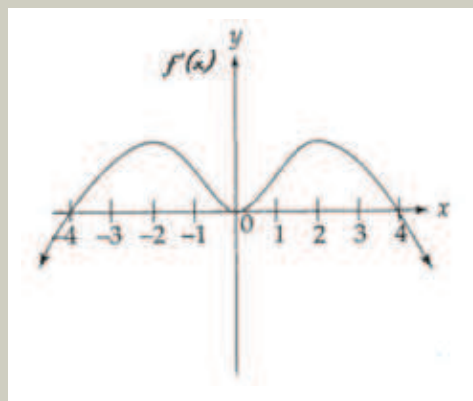
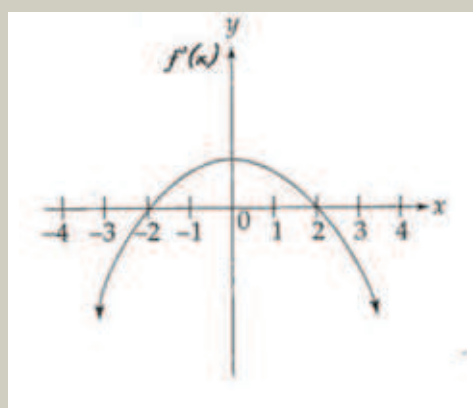
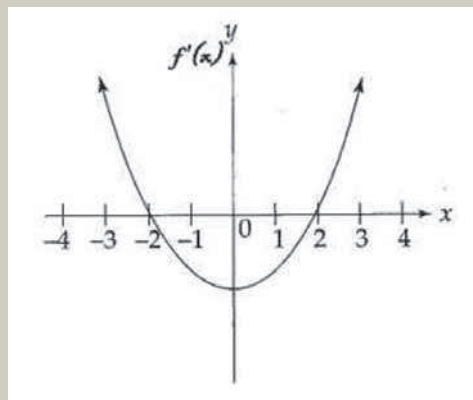
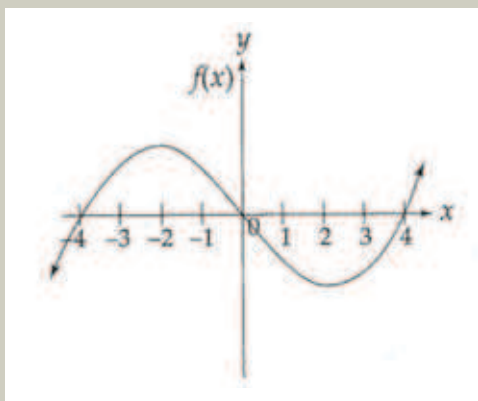


Se $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, per quale valore positivo di x , g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.

9. Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}$$

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.



PROBLEMA 1

Il primo problema presenta una funzione integrale $f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt$ i cui estremi di integrazione sono di facile gestione, infatti sono proprio 0 e x , il che permette, di fronte alla prima richiesta di trovare $y = f'(x)$ come derivata di $y = f(x)$ applicando il Teorema fondamentale del calcolo integrale senza alcun intoppo. Non troppo scontata la scelta di considerare $y = f(x)$ nell'intervallo $[0,9]$. Questo intervallo non espresso con misure in radianti può aver messo in difficoltà alcuni studenti nel posizionamento del 9 sull'asse delle ascisse, in particolare nel confronto con il 3π . Non è inoltre chiaro nel testo del problema se i punti successivi debbano continuare a tenere in considerazione tale intervallo o meno, soprattutto quando in gioco c'è la $y = f'(x)$ invece della $y = f(x)$. In questo scritto si considerano entrambe le funzioni in $[0,9]$.

Risulta quindi $y = f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$,
da cui $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, mentre $f'(2\pi) = -\frac{1}{2}$.

Il secondo punto è costituito da diverse richieste. Anzitutto viene chiesto di rappresentare il grafico Σ (scelta abbastanza infelice nominare in questo modo il grafico, dato l'utilizzo della stessa lettera in matematica per indicare le sommatorie) di $y = f'(x)$. Il grafico Σ si può rappresentare deducendolo dalla funzione base $y = \cos x$ attraverso due trasformazioni nel piano: la dilatazione lungo l'asse delle ascisse

$\delta: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$ e la traslazione $\tau: \begin{cases} x' = x \\ y' = y + \frac{1}{2} \end{cases}$ (figura 1).

La funzione ottenuta risulta di periodo 4π . Per poter rappresentare la funzione $y = f'(x)$ con più precisione ed essere così in grado di trarre conclusioni su massimi e minimi per $y = f(x)$, si studiano le intersezioni con l'asse delle ascisse risolvendo l'equazione goniometrica $\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$ ottenendo $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ e quindi $\frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3}$ oppure $\frac{x}{2} = \frac{4\pi}{3}$.

Le due soluzioni nell'incognita x presenti all'interno dell'intervallo dichiarato all'inizio del problema risultano quindi $x = \frac{4}{3}\pi$ e $x = \frac{8}{3}\pi$.

Dedurre dal grafico di $y = f'(x)$ quello di $y = f(x)$ risulta facile se quest'ultima funzione la si interpreta come area (con relativo segno) compresa fra la curva e l'asse delle ascisse al variare del secondo estremo di integrazione e tenendo fisso lo 0 come primo estremo.

La funzione $y = f(x)$ è proprio la funzione integrale, che, calcolata, risulta $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}$. Si trovano alcuni valori significativi di questa funzione utili per la sua rappresentazione nel piano cartesiano.

Si può ottenere $f(0)$ algebricamente andando a sostituire nell'equazione della funzione $y = f(x)$ lo 0, oppure pensandola come funzione integrale fra 0 e 0; coincidendo i due estremi di integrazione si ottiene un rettangolo di base nulla e quindi l'integrale risulta nullo. L'area compresa fra $y = f'(x)$ e $y = 0$ è sopra l'asse delle ascisse (area positiva) fino a $x = \frac{4}{3}\pi$, sotto l'asse delle ascisse (integrale con segno negativo) nell'intervallo $\left[\frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right]$ e nuovamente sopra l'asse

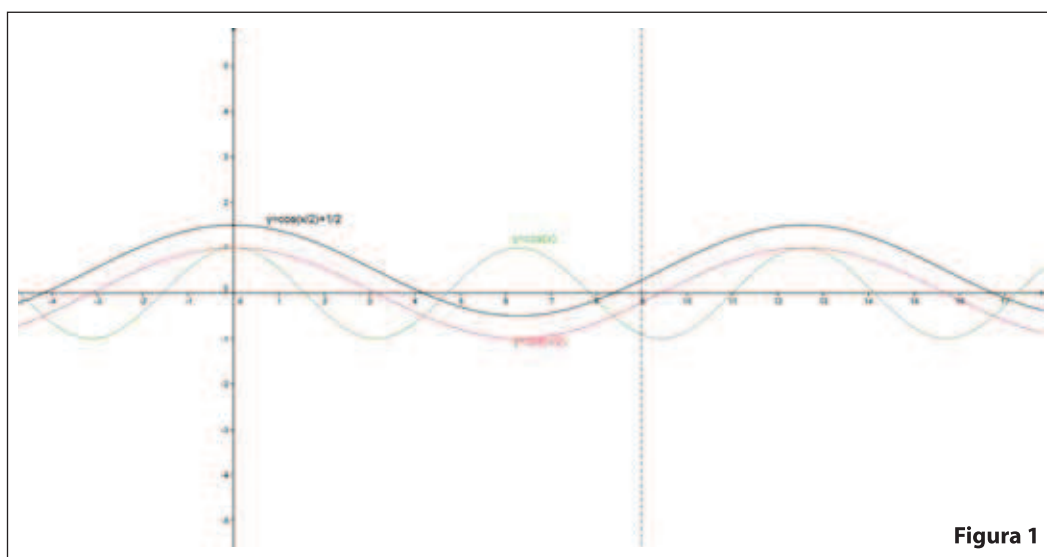


Figura 1

delle ascisse (positiva) in $\left[\frac{8}{3}\pi, 9\right]$. Si avranno quindi un minimo per $x = 0$, un massimo per $x = \frac{4}{3}\pi$ e un altro minimo si avrà per $x = \frac{8}{3}\pi$. Per determinare le ordinate di questi estremi, si sostituiscono le ascisse in $y = f(x)$, ottenendo i punti $O(0,0)$, $M\left(\frac{4}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}\right)$ e $N\left(\frac{8}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$.

Per poter tracciare con maggior precisione il grafico di $y = f(x)$ può essere utile calcolare $y = f''(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ e studiarne il segno. Si ottiene così che la $y = f(x)$ presenta concavità rivolta verso il basso in $]0, 2\pi[$, mentre in $]2\pi, 9[$ ha concavità rivolta verso l'alto. Si avrà un flesso a tangente obliqua per $x = 2\pi$. Per $x = 9$ la funzione assume valore $f(9) = 2\sin\frac{9}{2} + \frac{9}{2}$. Riassumiamo in una tabella le informazioni descritte fino ad ora che contribuiscono a determinare l'andamento di $y = f(x)$ a partire da quello di $y = f'(x)$ e da quello di $y = f''(x)$.

	0	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{8}{3}\pi$	9
Segno di $y = f'(x)$	+++++	-----	+++++	
Informazioni per $y = f(x)$				

	0	2π	9
Segno di $y = f''(x)$	-----	+++++	
Informazioni per $y = f(x)$			

Il grafico che si ottiene è quello rappresentato in **figura 2**.

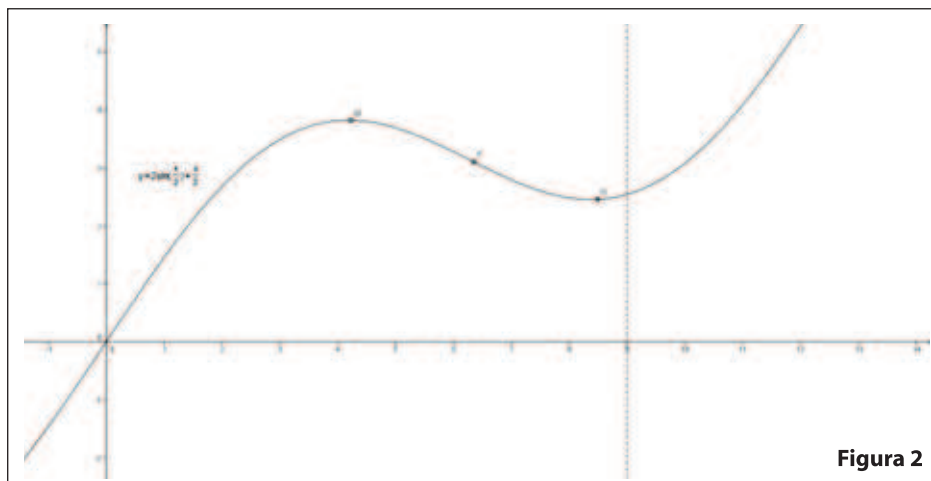


Figura 2

Nel *terzo punto* viene chiesto allo studente di determinare il valore medio di $y = f'(x)$ in $[0, 2\pi]$ il che significa trovare l'altezza h^1 del rettangolo di base 2π avente area uguale a quella della regione compresa fra la curva $y = f'(x)$ e l'asse delle ascisse, la retta $x = 0$ e $x = 2\pi$. Operativamente si tratta di risolvere l'equazione:

$$2\pi h = \int_0^{2\pi} f'(x) dx$$

$$2\pi h = \left[2\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$2\pi h = 2\sin\pi + \pi$$

$$h = \frac{1}{2}$$

La *quarta* e ultima *richiesta* è quella di trovare il volume del solido W avente per base la regione R descritta nel testo e come sezioni i piani ortogonali all'asse delle ascisse aventi area $A(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Tale volume è indipendente dalla forma della regione che fa da base al solido, e questo è assicurato dal Principio di Cavalieri. Essendo il volume la somma di tutte le aree delle sezioni di cui si conosce l'espressione analitica, è sufficiente risolvere:

$$V(W) = \int_0^4 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx = \frac{12}{\pi} \int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx = \frac{12}{\pi} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right]_0^4 = \frac{24}{\pi}$$

PROBLEMA 2

Il secondo problema presenta una funzione algebrica razionale fratta: $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

Il grafico della funzione f è una curva nota con il nome di «versiera di Agnesi», in quanto comparve nell'opera *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* del 1748 di Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese vissuta tra il 1718 e il 1799².

1. Che coincide con un certo valore $f(c)$ assunto dalla funzione per un certo $c \in [0, 2\pi]$ e la cui esistenza è assicurata dal Teorema della media (essendo la funzione continua).
2. L'equazione della funzione, in realtà, si trova già in un passo di Fermat (1666) che si occupò di quadrala; ma il nome ora riferito alla curva, si trova per la prima volta nelle note al *Trattato del Galileo del moto naturalmente accelerato* (1718) di Guido Grandi, il quale fa riferimento al fatto che la curva fu ottenuta da lui stesso nell'opera *Quadratura circuli et hyperbolae* e dove si legge che il nome versiera deriva dal latino *sinus versus*, ovvero curva con seno verso, cioè contrario, nemico. Da qui versiera, «aversaria», che al tempo era il nome attribuito alle streghe. Questo spiega il fatto che la curva sia nota agli anglofoni come «witch of Agnesi» (strega di Agnesi).

ESAMI CONCLUSIVI

Il *primo punto*, ovvero lo studio della funzione f ed il disegno del grafico Φ , è di facile risoluzione con i metodi classici dell'analisi matematica.

Si noti, tuttavia, che un modo alternativo e ben più rapido per studiare la funzione consiste nel considerarla come la reciproca della parabola $f(x) = 4 + x^2$, dilatata di 8 lungo l'asse delle ordinate; questo ultimo metodo, tuttavia, non è di così facile intuizione per uno studente.

Il dominio della funzione assegnata è costituito dal campo dei numeri reali ($D = R$) e la funzione è pari, per cui risulta simmetrica rispetto all'asse delle ordinate ($\forall x \in D, f(-x) = f(x)$); essa interseca l'asse delle ordinate nel punto E di coordinate (0; 2), mentre non presenta intersezioni con l'asse delle ascisse. Dallo studio del segno emerge che la funzione è sempre positiva nel dominio ($\forall x \in D, f(x) > 0$) e pertanto in tutto il campo dei numeri reali; la funzione, inoltre, non presenta asintoti verticali poiché il dominio coincide con R , mentre studiando i limiti agli estremi del dominio ($\pm\infty$), si ottiene che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale e la funzione evidentemente vi tende dall'alto (0^+). Lo studio della derivata prima, per determinare i punti di stazionarietà, mette in evidenza che la funzione presenta un massimo assoluto nel punto E, infatti:

$$f'(x) = -\frac{16x}{(4+x^2)^2} \quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

0		
Segno di $y = f'(x)$	+++++	-----
Informazioni per $y = f(x)$	↗	↘

Lo studio della derivata seconda, per determinare la concavità, convessità e punti di flesso, porta al seguente risultato:

$$f''(x) = 16 \cdot \frac{3x^2 - 4}{(4+x^2)^3} \quad \text{e} \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cup x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

pertanto i punti di flesso a tangente obliqua risultano essere $F_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{2}\right)$ (ascendente) e il suo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate $F_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{2}\right)$ (discendente):

$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$			
Segno di $y = f''(x)$	+++++	-----	+++++
Informazioni per $y = f(x)$			

Il grafico Φ della funzione f risulta quindi essere quello presentato in **figura 3**, dove l'asse delle ascisse, che è asintoto orizzontale come emerso dallo studio dei limiti, è asintoto d'inflessione perché la curva si avvicina ad esso dopo aver incontrato i due punti di flesso.

Proseguendo nella risoluzione delle richieste del primo punto, si devono determinare le equazioni delle rette tangenti a Φ nei punti P(-2; 1) e Q(2; 1). Per farlo, occorre anzitutto determinarne la pendenza calcolando la derivata prima nei punti assegnati e in seguito inserire il valore ottenuto nel fascio proprio di rette con centro rispettivamente in P e in Q:

$$y - y_P = f'(x_P)(x - x_P) \quad \text{da cui si ottiene la retta } y = \frac{1}{2}x + 2,$$

$$y - y_Q = f'(x_Q)(x - x_Q) \quad \text{da cui si ottiene la retta } y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Le due rette si intersecano nel punto E presente in **figura 4**. Si verifica facilmente che il quadrilatero di vertici O(0; 0), P(-2; 1), E(0; 2), Q(2; 1) è un rombo: le rette OP e OQ, essendo parallele alle rette tangenti rispettivamente in Q e in P ricavate precedentemente (hanno infatti il medesimo coefficiente angolare), formano con esse un parallelogramma le cui diagonali PQ e EO sono tra loro perpendicolari e si dividono scambievolmente a metà. Un metodo alternativo poteva consistere nel considerare il fatto che il quadrilatero OPEQ è diviso in due triangoli congruenti (perché f è pari) e isosceli (perché le altezze appartengono alla retta $y = 1$ che è mediana della base EO). Provare che il quadrilatero OPEQ è rombo può aver suscitato nello studente dei dubbi riguardanti le condizioni sufficienti per poter affermare che un quadrilatero sia un rombo. Forse nello svolgimento qualche ragazzo può aver abbondato nell'esprimere le proprietà di OPEQ.

Per determinare le misure degli angoli, si osserva che l'angolo acuto formato dalle due rette tangenti a Φ è isometrico ad $\hat{E}QO$ perché alterni interni, da cui:

$$\operatorname{tg}(\hat{E}QO) = \frac{m_P - m_Q}{1 + m_P \cdot m_Q} = \frac{4}{3} \quad \text{da cui} \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13^\circ.$$

Ovvero gli angoli, tra loro supplementari, del rombo avranno ampiezze di $53^\circ 8'$ e $126^\circ 52'$ circa. In merito a questo ultimo calcolo, si nota che gli studenti meno accorti potrebbero aver indicato direttamente il risultato fornito loro dalla calcolatrice come quello finale, considerando erroneamente i 13 centesimi già come primi del grado.

Il *secondo punto* è interessante in quanto costituisce un problema dinamico che ricalca, in termini più moderni, la costruzione geometrica della versiera così come venne fatta

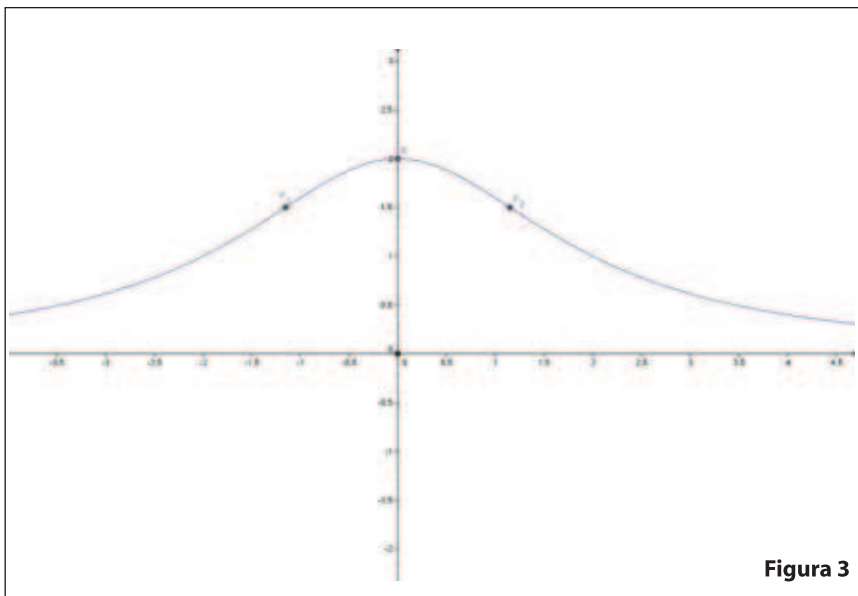


Figura 3

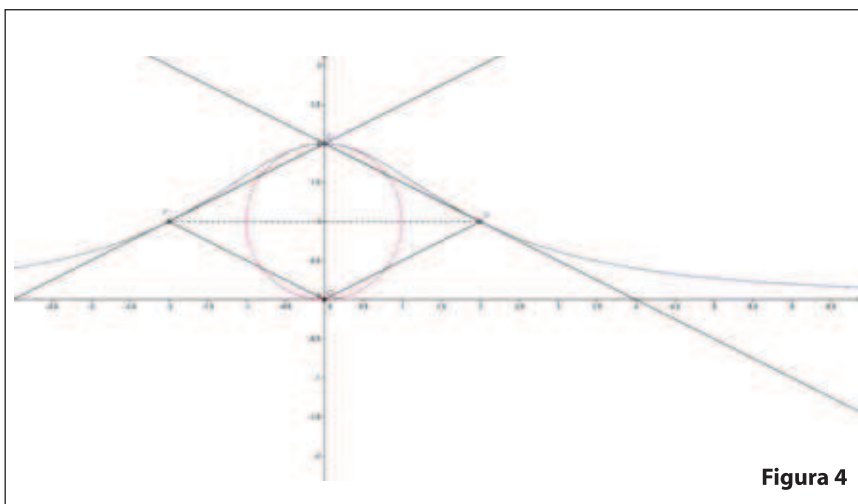


Figura 4

dalla Agnesi nell'opera citata. Per determinare il luogo dei punti richiesto, per prima cosa occorre scrivere l'equazione della circonferenza Γ , avente centro nel punto di coordinate $(0; 1)$ e raggio unitario: $x^2 + (y-1)^2 = 1$; in secondo luogo si deve scrivere il fascio proprio di rette con centro nell'origine degli assi cartesiani $y = mx$ con $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ (infatti, per $m=0$, si ottiene l'asse delle ascisse che è parallelo alla retta $y = 2$ e quindi non può intersecarla nel punto B) e porre le due equazioni a sistema per trovare le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

Da semplici passaggi algebrici si ottengono le due soluzioni, di cui la prima banale:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_A = \frac{2m}{1+m^2} \\ y_A = \frac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}$$

per cui il punto A ha coordinate: $\left(\frac{2m}{1+m^2}; \frac{2m^2}{1+m^2} \right)$.

Per trovare il punto B occorre invece porre a sistema il fascio proprio di rette passanti per l'origine con la retta $y = 2$; le coordinate di B risultano $\left(\frac{2}{m}; 2 \right)$ con $m \neq 0$. Si tratta ora di provare che, al variare di m reale diverso da zero, il punto

$P \left(\frac{2}{m}; \frac{2m^2}{1+m^2} \right)$ appartiene a Φ . Il luogo geometrico descritto dal punto P è dato dalle equazioni parametriche associate alle sue coordinate per cui, eliminando il parametro m attraverso la so-

stituzione $m = \frac{2}{x}$ nella seconda equazione parametrica, si ottiene esattamente l'equazione di $f(x)$:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{m} \\ y = \frac{2m^2}{1+m^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{x}; x \neq 0 \\ y = \frac{2m^2}{1+m^2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{8}{4+x^2} = f(x)$$

Si noti che la retta del fascio coincidente con l'asse delle ordinate non è contemplata nell'espressione esplicita del fascio $y = mx$; in questo caso particolare la retta t ha equazione $x = 0$ e i punti A e B coincidono nel punto E $(0; 2)$ che comunque appartiene a Φ .

Il terzo punto del problema prevede anzitutto il calcolo dell'area del cerchio delimitato da Φ che misura π , e dell'area della regione R che corrisponde all'integrale di $f(x)$ in $[0; 2]$:

$$Area(R) = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2} dx = 4 \left[\arctg\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

L'area della regione di piano compresa tra Φ e l'asse delle ascisse è data invece dall'integrale improprio:

$$Area(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2} dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{8}{4+x^2} dx, \text{ poiché } f(x) \text{ è pari.}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} Area(\Phi) &= 2 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{8}{4+x^2} dx = 8 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \\ &= 8 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctg\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^b = 8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi. \end{aligned}$$

Si è verificata dunque una delle proprietà della versiera, quella secondo cui l'area tra la versiera e il suo asintoto è quattro volte l'area della circonferenza che si utilizza nella costruzione geometrica per descriverla.

Il quarto punto, infine, richiede (senza il calcolo esplicito) il volume del solido W generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle ordinate.

Il metodo classico consiste nell'invertire la funzione $f(x)$, che è invertibile perché monotona nell'intervallo $[0;2]$, ottenendo così

$$g(y) = \sqrt{\frac{8}{y} - 4} = 2\sqrt{\frac{2}{y} - 1} \text{ nell'intervallo } [1;2].$$

Quindi è possibile calcolare il volume del solido usando la formula dell'integrale di rotazione della funzione definita a tratti:

$$h(y) = \begin{cases} g(y), & y \in [1;2] \\ 2, & y \in [0;1] \end{cases}$$

Dunque:

$$W = \pi \int_0^2 [h(y)]^2 dy = \pi \int_1^2 \left(2\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy + \pi \int_0^1 (2)^2 dy$$

La soluzione dell'integrale, anche se non richiesta, è $W = 4\pi \ln 4$.

Il volume richiesto può essere calcolato anche attraverso il metodo dei gusci cilindrici di superficie generica $2\pi x \cdot f(x)$, ovvero:

$$W = \int_0^2 2\pi x \cdot f(x) dx = 2\pi \int_0^2 x \cdot \frac{8}{4+x^2} dx$$

dove si è immaginato il solido come costituito da tante sezioni circolari concentriche moltiplicate per l'altezza $f(x)$, che vengono sommate nell'intervallo considerato. Questo procedimento, tuttavia, non fa parte dei metodi classici insegnati secondo il programma del liceo scientifico di ordinamento.

QUESTIONARIO

Quesito 1. L'area di un triangolo può essere calcolata noti due lati e il seno dell'angolo compreso. In questo caso quindi, conoscendo area e due lati, si ricava il seno dell'angolo compreso tra i lati.

Con riferimento alla figura 5, la formula dell'area è

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha, \text{ quindi } \sin \alpha = \frac{2 \cdot A}{a \cdot b} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1.$$

I calcoli ci portano a concludere che l'angolo compreso tra i due lati assegnati è retto perché il suo seno vale 1. Il triangolo proposto nel quesito è dunque rettangolo, di cui si conoscono i cateti e il lato mancante è l'ipotenusa. Quindi, per il teorema di Pitagora, $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Il risultato $\sin \alpha = 1$ rende la risoluzione del problema semplice e immediata, in quanto esiste un solo angolo con seno pari a 1. Nel caso in cui il seno dell'angolo compreso tra i lati fosse stato diverso da 1, ci si sarebbe trovati di fronte a due possibili angoli, uno acuto e uno ottuso, aventi lo stesso seno. Le soluzioni possibili per c sarebbero quindi state due: dal seno si ricavava il coseno dell'angolo e tramite il teorema del coseno si arrivava alla misura del lato incognito.

Quesito 2. Per trovare il dominio della funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$, è necessario porre i radicandi delle radici maggiori o uguali a zero.

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0 \end{cases}$$

Si risolvono quindi le tre disequazioni e si intersecano le loro soluzioni.

Prima disequazione: $3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$

Seconda disequazione: $2 - \sqrt{3 - x} \geq 0$

Per risolvere tale disequazione si dovrebbe porre la condizione $3 - x \geq 0$ e risolvere quindi $\begin{cases} 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$, ma la condizione sul radicando della seconda disequazione del sistema (*) è già presente nella prima disequazione di (*). Si ha perciò

$2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3 - x} \leq 2 \Rightarrow 3 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq -1$

$2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3 - x} \leq 2 \Rightarrow 3 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq -1$

Terza disequazione: $1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0$ anche la risoluzione di questa disequazione comporta delle condizioni sui radicandi che però sono già presenti nel sistema (*). Con questa motivazione è sufficiente scrivere quanto segue:

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0 &\Rightarrow \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \leq 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{3 - x} \leq 1 \Rightarrow \\ \sqrt{3 - x} \geq 1 &\Rightarrow 3 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2 \end{aligned}$$

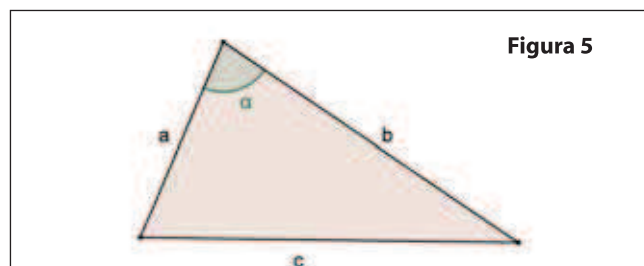
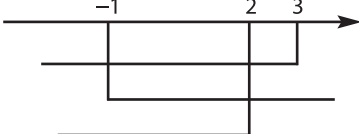


Figura 5

A questo punto si intersecano le soluzioni delle tre disequazioni:

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$


Il dominio di $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$ è $[-1; 2]$.

Quesito 3. L'equazione del fascio di rette che passano per B è $f_B: y + 8 = m(x + 6) \cup x = -6$.

Tra queste rette quella che ha distanza massima dal punto A è la retta *perpendicolare* alla retta AB , quindi, trovato il coefficiente angolare della retta AB , il suo antireciproco sarà il coefficiente angolare della retta cercata (**figura 6**).

Per motivare la scelta della retta perpendicolare alla retta AB come retta che passa per B e ha massima distanza da A , si possono disegnare, in uno stesso piano cartesiano, alcune rette del fascio f_B , tracciare il segmento la cui misura rappresenta la loro distanza da A e fare alcune considerazioni di carattere geometrico. Con riferimento alla **figura 6** la distanza tra la retta c e il punto A è $\overline{AC}$, la distanza tra la retta d e il punto A è $\overline{AD}$, la distanza tra la retta b (che è la retta del fascio f_B perpendicolare a AB) e il punto A è $\overline{AB}$. $\overline{AB} > \overline{AC}$ in quanto $\overline{AB}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC , mentre $\overline{AC}$ è un suo cateto e $\overline{AB} > \overline{AD}$ perché $\overline{AB}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABD , mentre $\overline{AD}$ è un suo cateto. Qualsiasi retta si tracci per B (diversa da b) con la relativa distanza da A , si può fare un discorso analogo a quello per le rette c e d .

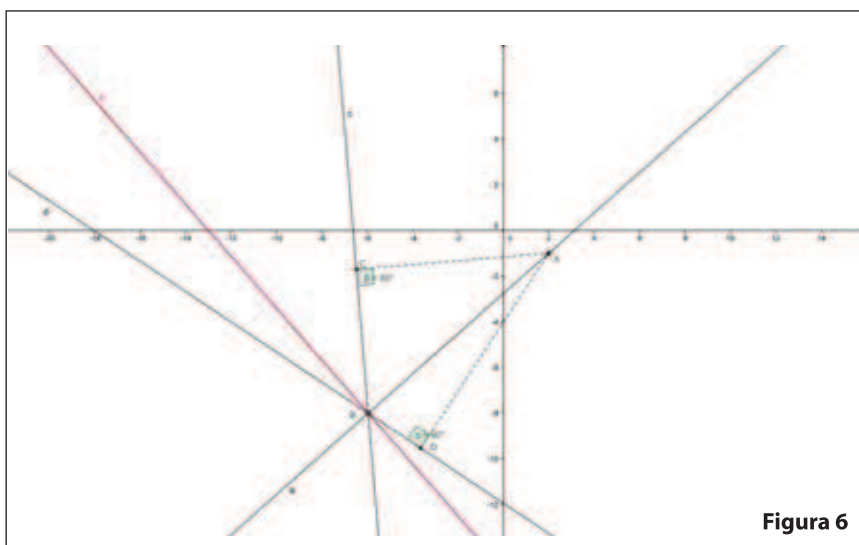


Figura 6

Troviamo ora l'equazione della retta che passa per B e ha distanza massima da A :

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{7}{8} \Rightarrow m_{\perp AB} = -\frac{8}{7}.$$

Sostituiamo tale coefficiente nell'equazione del fascio $f_B: y + 8 = m(x + 6)$ e otteniamo

$$y = -\frac{8}{7}(x + 6) - 8 \Rightarrow 8x + 7y + 104 = 0.$$

Il quesito poteva essere risolto anche in un altro modo. Dato il fascio di rette passanti per B

$$f_B: y + 8 = m(x + 6) \Rightarrow f_B: mx - y - 8 + 6m = 0$$

si cercava la retta con massima distanza da A mediante la formula della distanza punto-retta:

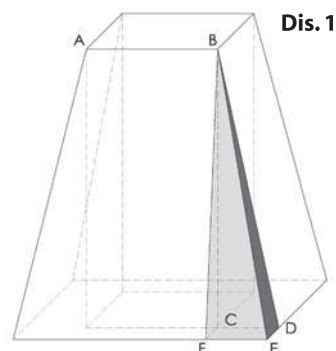
$$d(m) = \frac{|m \cdot 2 - 1 \cdot (-1) - 8 + 6m|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

A questo punto però ci si sarebbe trovati di fronte allo studio della funzione $d(m)$, che contiene un valore assoluto, e il rischio di *perdersi* nei calcoli è abbastanza elevato.

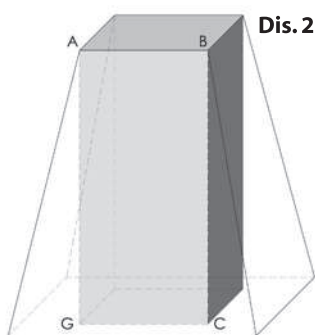
Il primo procedimento non solo risulta più veloce e presenta meno difficoltà di calcolo, mette anche in luce le competenze dello studente: un ragazzo che risolve l'esercizio attraverso il metodo *geometrico* ha saputo unire le conoscenze analitiche alle proprietà delle figure studiate nella geometria sintetica.

Quesito 4. Un modo per trovare il volume del tronco della piramide può essere quello di suddividere il solido in:

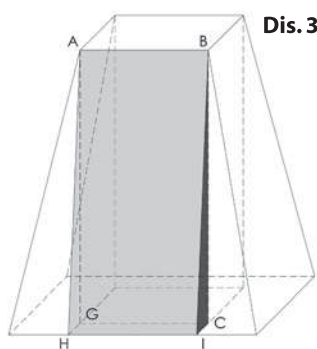
- quattro piramidi rette (**disegno 1**) di altezza $\overline{BC} = h$ e come base il quadrato di lato $\overline{FE} = \frac{b-a}{2}$
- un parallelepipedo (**disegno 2**) di altezza $\overline{BC} = h$ e come base il quadrato di lato $\overline{AB} = a$
- quattro prismi a base triangolare (**disegno 3**) di altezza $\overline{GC} = a$ e base il triangolo $\triangle ICB$ di area $\left(\frac{b-a}{2} \cdot h\right) : 2$.



Dis. 1



Dis. 2



Dis. 3

Si ottiene così:

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \cdot \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \cdot h \right] : 3 + h \cdot a^2 + 4 \cdot \left(\frac{b-a}{2} \cdot h \right) : 2 \cdot a = \\
 &= 4 \cdot \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} \cdot \frac{h}{3} + h \cdot a^2 + 4 \cdot \frac{b-a}{4} \cdot ha = \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab + 3a^2 + 3ab - 3a^2}{3} \cdot h = \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} \cdot h
 \end{aligned}$$

Con la strategia appena illustrata, il volume del tronco di piramide si ottiene *sommando* i volumi dei solidi individuati all'interno del tronco di piramide. Si poteva risolvere il quesito anche pensando al volume del tronco come alla *differenza* tra il volume di due piramidi presenti nella **figura 7**:

$$\text{Volume tronco} = \text{Volume piramide grande} - \text{Volume piramide piccola}$$

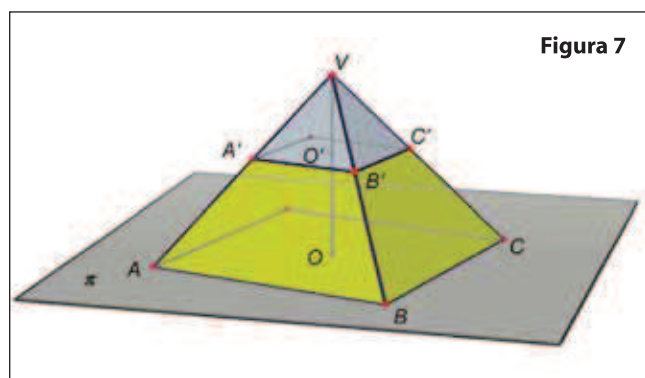


Figura 7

Questo secondo metodo si basa sulla similitudine fra le piramidi che si riflette sui triangoli di base $\frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ e $\frac{A'B'}{2} = \frac{b}{2}$ e con altezza rispettivamente $h + x$ e x . Impostando la proporzione di similitudine ed esplicitando la x incognita, si determina poi il volume come differenza.

Quesito 5. Immaginiamo le valigie come ai due parallelepipedi rettangoli della **figura 8**.

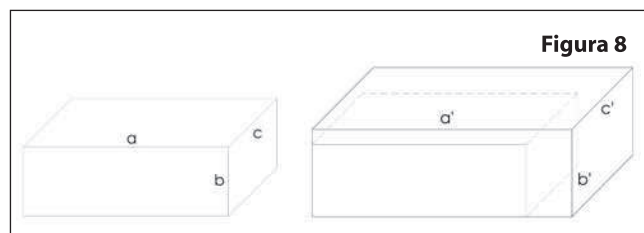


Figura 8

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V' = a' \cdot b' \cdot c'$$

Nel caso in cui le dimensioni della seconda valigia aumentino del 10% si ha

$$a' = a + 10\%a = 1,1a \quad b' = b + 10\%b = 1,1b \quad c' = c + 10\%c = 1,1c$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 V' &= 1,1a \cdot 1,1b \cdot 1,1c = (1,1)^3 \cdot a \cdot b \cdot c = 1,331 \cdot V = V + 0,331V = \\
 &= V + 33\%V
 \end{aligned}$$

In generale, se le dimensioni a' , b' , c' aumentano di un coefficiente k , si avrà $a' = (1+k)a$ $b' = (1+k)b$ $c' = (1+k)c$ e quindi $V' = (1+k)^3 V$

Nel caso l'aumento sia del 20% o del 25%, k è 0,2 oppure 0,25 e i volumi delle rispettive valigie risultano

$$\begin{aligned}
 V' &= (1,2)^3 V = 1,728 V = V + 0,728 V = V + 72,8\%V \\
 \text{oppure} \\
 V' &= (1,25)^3 V = 1,953125 V = V + 0,953125 V = V + 95,3125\%V
 \end{aligned}$$

Tali risultati sono compatibili con l'affermazione presentata nel quesito.

In questo quesito viene chiesta una stima dell'aumento del volume e viene coinvolta così l'idea di *approssimazione*. Ciò rappresenta una novità rispetto ai temi di esame proposti negli anni precedenti.

Quesito 6. La richiesta potrebbe risultare un po' «strana» e forse questo è uno dei motivi che ha fatto del quesito 6 il meno gettonato dagli studenti (scelto solo dal 10% degli studenti, vedere **Tabella 2**). Bastava però notare che, tra i 5040 numeri che si possono ottenere permutando le cifre da 1 a 7, i più piccoli hanno come prima cifra a sinistra 1 e tali numeri sono $6! = 720$. Non a caso quindi il testo dell'esercizio chiede quale numero occupa la 721-esima posizione in ordine crescente, perché il numero cercato sarà il minore tra quelli composti dalle cifre 1,2,3,4,5,6,7 che inizia con la cifra 2, ossia 2134567.

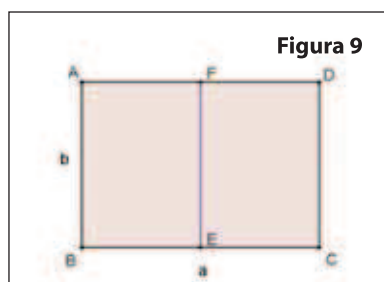
Per quanto riguarda la settimana posizione si possono scrivere in ordine crescente i primi sette numeri, lasciando in-

variate le prime cifre (cioè quelle con valore minore) e permutando le ultime.

1234567 - 1234576 - 1234657 - 1234675 - 1234756 - 1234765 - 1235467

L'ultimo numero elencato è quello che occupa la settima posizione.

Quesito 7. Con riferimento alla **figura 9**, essendo le dimensioni del rettangolo di partenza a e b , le dimensioni dei due rettangoli minori (che sono congruenti tra loro, in quanto si formano dividendo il lato maggiore a a metà) saranno b e $\frac{a}{2}$.



Sapendo che i rettangoli sono simili, si può impostare la seguente proporzione $a:b = b:\frac{a}{2}$. Dall'informazione sull'area del rettangolo maggiore $a \cdot b = 1$, si ricava $b = \frac{1}{a}$ e, sostituendo questa espressione di b nella proporzione precedente, si ottiene il valore di a .

$$a : \frac{1}{a} = \frac{1}{a} : \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a^4 = 2 \Rightarrow a = \pm \sqrt[4]{2}$$

Il valore di a che si sceglie è quello positivo in quanto a è la misura di un segmento.

Trovata la misura di a si ha che $b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Quesito 8. Per trovare il minimo della funzione $g(x)$, si può studiare la sua derivata prima: dove infatti la derivata prima di una funzione si annulla e passa da negativa a positiva si ha un minimo relativo della funzione di partenza. La derivata della funzione $g(x)$ è proprio $f(t)$ (teorema fondamentale del calcolo integrale); dal grafico di $f(t)$ si osserva che tale funzione si annulla in $x = 0$, $x = 2$ e $x = 4$. Il punto di ascissa 0 è da escludere perché il testo chiede «per quali valori *positivi* di x , g ha un minimo» e tra $x = 2$ e $x = 4$ la scelta cade su $x = 4$ perché solo nel punto con tale ascissa $f(t)$ passa da negativa a positiva. La funzione $g(x)$ ha dunque un minimo per $x = 4$.

Alla stessa domanda si poteva rispondere anche con un ragionamento puramente «grafico». La funzione $g(x)$ rappresenta l'area (con segno) sottesa al grafico della funzione

f . Dall'andamento di f si può concludere che $g(x)$ sarà crescente fino a raggiungere un massimo per $x = 2$ e poi decrescente (in quanto l'area sottesa a f tra $x = 2$ e $x = 4$ è negativa), fino a raggiungere un minimo per $x = 4$.

Quesito 9. Il limite proposto in questo quesito è abbastanza semplice in quanto può essere ricondotto a limiti notevoli con pochi e immediati passaggi.

Prima opzione:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Seconda opzione:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \sin x \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

In questo caso compare un solo limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Essendo un esercizio *puramente tecnico* e su un argomento della classe quinta ci si poteva aspettare che molti ragazzi scegliessero tale quesito: in realtà, dai dati presenti nella **Tabella 2**, risulta essere stato svolto solo dal 64%.

Quesito 10. Osservando il grafico della funzione $f(x)$ si può affermare che è una funzione continua e non presenta punti di non derivabilità nell'intervallo che vediamo, quindi ci aspettiamo un grafico della $f'(x)$ continuo. Per capire quale tra i grafici proposti potrebbe essere quello di $f'(x)$ bisogna ragionare sulla relazione tra una funzione e la sua derivata. La monotonia di una funzione è infatti legata al segno della sua derivata prima: se $f(x)$ è crescente, allora $f'(x)$ è *positiva*, mentre se $f(x)$ è decrescente, allora $f'(x)$ è *negativa* e i punti di massimo o di minimo relativi di una funzione sono punti in cui la derivata prima si annulla e cambia segno.

La prima informazione che uno studente poteva ricavare dal grafico di $f(x)$ per «costruire» quello di $f'(x)$ è relativa ai punti di ascissa -2 e $+2$: essi sono, rispettivamente, punti di massimo e minimo relativi e quindi per $x = -2$ e $x = +2$ la derivata prima si deve annullare. Già con questa osservazione i grafici C e D vengono scartati. Tra i due rimanenti, il grafico corretto per la rappresentazione di $f'(x)$ è il grafico A, in quanto $f(x)$ è crescente fino a $x = -2$, decrescente nell'intervallo $]-2; +2[$ e poi nuovamente crescente per $x > 2$. Per

quanto detto prima quindi $f'(x)$ dovrà essere negativa nell'intervallo $]-2; +2[$ e positiva all'esterno di tale intervallo, ossia per $x < -2 \cup x > +2$.

COMMENTO ALLA PROVA

Le tracce proposte nel tema d'esame di matematica del liceo scientifico di ordinamento vertono su argomenti affrontati abitualmente in un corso tradizionale non solo nell'ultimo anno di studio, ma nell'intero quinquennio. Se si osservano i quesiti, infatti, essi spaziano dall'uso delle percentuali (IV quesito) e della similitudine affrontati nel primo biennio, alla trigonometria (I quesito) e alla geometria analitica della retta (II quesito) del secondo biennio.

La prova risulta alla portata dell'alunno *medio* liceale per quanto concerne i contenuti, ma sembra anche voler andare ad appurare l'appropriazione da parte dello studente dei *significati* degli oggetti matematici coinvolti e la capacità di creare *relazioni* fra i diversi ambiti della matematica. Questo fatto è visibile in modo chiaro nel testo della prova quando viene richiesto di *motivare* le affermazioni e le scelte adottate o di *giustificare* le proprie assunzioni; ben 5 quesiti presentano tale struttura di risoluzione completa solo se costituita da passaggi integrati con la *parte argomentativa*. Interessante è anche l'ultimo punto del secondo problema dove viene chiesto non il calcolo dell'integrale, ma di *spiegare il perché* si imposterebbe la soluzione in un determinato modo piuttosto che in un altro.

Il focus della prova sono le *competenze matematiche* anche se per la maggior parte non vengono applicate a situazioni concrete o quotidiane. Le conoscenze e abilità singole acquisite dallo studente gli sono state di supporto se egli è sempre stato abituato a metterle le une a disposizione delle altre e non a considerarle come isole a sé. Poche le domande sul recupero della singola e specifica conoscenza mnemonica da individuare nel bagaglio delle nozioni e da spendere ed utilizzare in modo meccanico. Sono assenti anche calcoli o procedimenti pedanti e macchinosi che avrebbero potuto mettere in difficoltà o far perdere la trama dell'esercizio allo studente.

Interessante, nel primo problema, la richiesta di *intuire/dedurre* il grafico della funzione integrale data la funzione base. Questa *analisi qualitativa* (e poco quantitativa) dà il polso di quanto lo studente si sia appropriato dei contenuti e di quanto li sappia spendere nelle diverse situazioni.

Da notare come, pur senza dichiararlo, siano presenti oggetti presi dalla storia della matematica italiana; la funzione del se-

condo problema infatti è una curva studiata da M.G. Agnesi mentre il quinto quesito è preso dal libro *Il "saper vedere" in matematica* di Bruno de Finetti del 1967.

È forse arrivato il momento, anche per la matematica, di lavorare per competenze? Questa prova sembra dare questo indirizzo... Intanto però gli studenti prediligono il secondo problema (**Tabella 1**), optando per un esercizio più standard almeno ad una prima lettura. Nella prima richiesta infatti è presente uno studio di funzione, argomento ampiamente trattato nel quinto anno e nel quale essi si sentono abbastanza sicuri. Leggendo i punti successivi si capisce che il secondo problema è più articolato e intricato rispetto al primo, ma con richieste alla portata di tutti. Un problema più innovativo come il primo, viene scelto invece solo da un quarto all'incirca dei ragazzi.

Resta per noi aperta la questione della valutazione³ di una prova così fatta, che verrà affrontata successivamente.

Elisa Appiani, Francesca Baresi, Giulia Cavallari
Liceo scientifico paritario "G. Bonsignori", Remedello (BS)



Maria Gaetana Agnesi (1718-1799).

3. A questo proposito è presente una proposta sul sito www.matmedia.it.