

MATEMATICA

La matematica presente nel tema di Matematica dato all'Esame di stato 2012 per il Liceo scientifico

Marco Costanzi, Silvia Dirupo

Premesso che l'azione didattica non deve essere mirata al superamento dei test ma alla comprensione della materia e che i test non devono orientare la didattica ma valutare se è riuscita nei suoi intenti, vogliamo cercare di capire le intenzioni che hanno portato alla formulazione della seconda prova dell'esame di Stato del Liceo Scientifico nella sessione ordinaria 2012, mediante un'attenta analisi critica. Cominceremo con l'esaminare ogni esercizio da diversi punti di vista: linguaggio con cui si esprime il testo, caratteristiche matematiche presenti nella prova, problemi di valutazione da parte dei docenti valutatori, implicazioni delle scelte consentite allo studente, significatività dei quesiti proposti. Dall'analisi emergerà che varie domande sono di tipo mnemonico-meccanico dove la memorizzazione di formule o procedure è sufficiente per risolvere il problema senza però dimostrare l'effettiva comprensione da parte dello studente. Così, partendo da un'idea di matematica che non sia esclusivamente elaborazione sintattica, procedura senza senso e priva di significati, esaminiamo il test in modo da coglierne i vari aspetti.

Il primo problema

Il primo problema proposto nel test parte dall'analisi di due diverse funzioni: $f(x)$, modulo di una semplice cubica ($f(x) = |27x^3|$), e $g(x)$, senoide di periodo $4/3$ ($g(x) = \sin((3/2)\pi x)$).

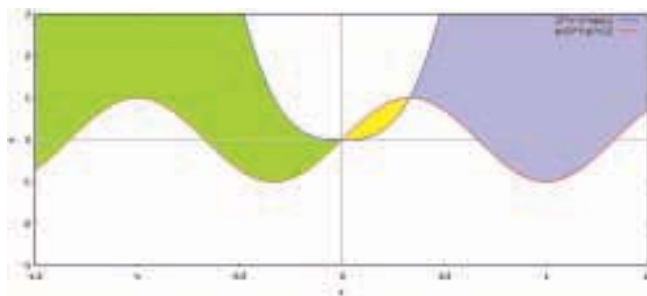
Nel primo punto viene richiesto lo «studio» delle funzioni. La parola «studio» presente nel testo è fuorviante in quanto può spingere il candidato allo svolgimento di una serie di calcoli non funzionali alla situazione presente, e rispondere ad altre domande, come ad esempio la ricerca di asintoti, lo studio del segno. Nell'ambito scolastico «studiare una funzione» ha un significato ben preciso: si parte dal dominio, si analizza il segno, le eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del campo di esistenza per determinare eventuali asintoti, si ottengono le derivate prima e seconda, per conoscere crescenze e concavità, e infine si disegna il grafico sfruttando i risultati precedentemente ottenuti. Erano queste le conoscenze che il quesito voleva indagare? La successione di passi ricordata diviene una procedura standard che esorta il candidato a tra-

lasciare la possibilità di creare il grafico immediatamente grazie alla conoscenza di funzioni elementari. Con poche e semplici osservazioni su $f(x)$ (dovrebbe essere ben noto che questa funzione è crescente nel primo quadrante, simmetrica rispetto all'asse y essendo l'applicazione della funzione valore assoluto alla semplice cubica che è simmetrica rispetto all'origine, per $x=0$ sia la funzione che la sua derivata valgono 0 e ha quindi tangente orizzontale, in $x=1$ vale 27 e in $x=1/3$ vale 1) e sulla funzione $g(x)$ (senoide di periodo $4/3$, in $x=0$ vale 0 e in $x=1/3$ vale 1) si ricava il grafico. Per non appesantire la risposta con procedure standardizzate e per non creare l'equivoco se queste fossero richieste o no (creando imbarazzi poi per la valutazione), la parola «studio» poteva essere omessa lasciando «si disegnano» (perché funzioni così semplici dovrebbero essere ben note a un ragazzo che sta affrontando la maturità scientifica), oppure chiedendo esplicitamente che lo studio indichi segno, asintoti, ecc... La stessa commissione chiamata a valutare gli svolgimenti potrebbe penalizzare la mancanza dello studio se esplicitamente richiesto, o premiare questa mancanza se non è richiesta, non essendo funzionale ed economica al seguito.

Il secondo punto richiede le equazioni delle rette tangenti alle due funzioni nel punto di ascissa $1/3$. Si arriva facilmente alla determinazione di quella relativa alla funzione $g(x)$ senza l'utilizzo della derivazione perché, trattandosi di una senoide per l'origine di periodo $4/3$, il punto $x=1/3$ risulta essere un punto di massimo di una funzione derivabile ovunque, quindi la tangente esiste ed è orizzontale. Per il coefficiente angolare della tangente alla funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $1/3$ basta ottenere la derivata e calcolarla nel punto $1/3$. Apprezzare l'ampiezza dell'angolo formato dalle due rette tangenti è quasi immediato poiché una retta è orizzontale e l'altra ha coefficiente angolare 9: così l'angolo cercato avrà per tangente 9. Le difficoltà sono introdotte dalla richiesta di determinare l'angolo rispetto a specifiche unità di misura. Questo problema può avere una soluzione solo approssimata ottenibile con procedimenti

molto lunghi (oltre il tempo concesso), a meno di non ricorrere alla calcolatrice scientifica (concessa per la prova). Così questa parte della domanda si riduce a una verifica sull'uso della calcolatrice.

La terza richiesta è il calcolo dell'area di una porzione di piano. Qui c'è un'imprecisione linguistica nella formulazione del quesito poiché le regioni di piano delimitate dai grafici delle due funzioni sono almeno cinque: quella sopra entrambe le funzioni, quella sotto entrambe le funzioni, e tre comprese tra le due funzioni, e precisamente una sotto la funzione g e sopra la funzione f e due sotto la funzione f e sopra la g , delle quali una con punti di ascissa negativa e l'altra con punti di ascissa



positiva. È solo implicito che si richieda il calcolo dell'area finita omettendo la possibilità di considerare le altre quattro regioni di area infinita. Per definire univocamente qual è l'area

TRACCIA MINISTERIALE

Problema 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

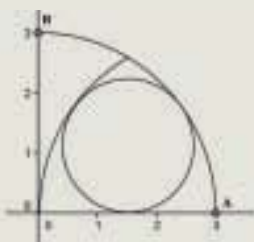
$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

- Qual è il periodo della funzione g ? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy .
- Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s ?
- Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g . Si calcoli l'area di R .
- La regione R , ruotando attorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

Problema 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi $A(3,0)$ e $B(0,3)$ e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9-6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $(0, 3/2)$.

- Sia r la retta tangente in A a L . Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB .
- La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W .
- Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x .
- Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x . Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



Questionario

- Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5\left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

- Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
- La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?
- Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?
- Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia coplanare)?

- Sia $f(x) = 5\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2}\sin 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

- È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .

- Qual è il valore medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

- Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B , situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

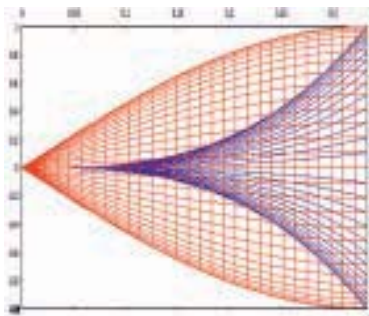
- Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

- A) $\cos(\sin(x^2 + 1))$ B) $\sin(\cos(x^2 + 1))$
 C) $\sin(\ln(x^2 + 1))$ D) $\cos(\ln(x^2 + 1))$

Si giustifichi la risposta.

richiesta si sarebbe dovuto esprimerla come l'area della regione di piano che è sia sotto il grafico della funzione $g(x)$ che sopra quello della funzione $f(x)$. In generale, non è vietato che un quesito sia formulato con una certa imprecisione per verificare quanto l'esaminando conosca della situazione e sappia completare le indicazioni mancanti, ma non è questo il caso: qui si tratta di pura sciatteria poco opportuna in una prova come quella che si sta considerando.

La quarta richiesta prevede l'utilizzo dell'integrazione per il calcolo



dei volumi, siano questi generati come rotazioni di regioni di piano attorno all'asse x o rotazioni attorno all'asse y .

Per calcolare il volume ottenuto dalla rotazione del grafico di una funzione h nella variabile x attorno all'asse x , l'idea è di considerarlo come

costruito a fette che sono sezioni del volume con superfici perpendicolari all'asse, cioè di sommare i volumi dei dischi di spessore infinitesimo dx e di raggio $h(x)$ ciascuno corrispondente al punto dell'asse di ascissa x . Nel caso specifico il solido da considerare è cavo, quindi occorre far la differenza tra il volume generato dalla rotazione della funzione $g(x)$ e quello generato da $f(x)$, oppure pensare il solido come somma di corone circolari di spessore infinitesimo. In ogni caso, visto che l'integrale della differenza di due funzioni è uguale alla differenza degli integrali delle singole funzioni, si dovrà calcolare: Per calcolare il volume ottenuto dalla rotazione di una

$$V_x = \pi \int_a^b g^2(x) dx - \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} |27x^3|^2 dx$$

funzione nella variabile x attorno all'asse y , l'idea è di vedere il solido costruito «a cipolla» cioè come somma di strati di spessore infinitesimo che sono le superfici laterali di cilindri di raggio di base x e di altezza h il cui valore è la differenza delle due funzioni calcolate in x .

Anche in questo caso otteniamo un solido cavo e, come detto



precedentemente, ci sono due forme equivalenti per determinarlo. Il volume sarà dato dalla formula:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx - 2\pi \int_a^b x g(x) dx = 2\pi \int_a^b [x f(x) - x g(x)] dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} x |27x^3| dx - 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} x \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx$$

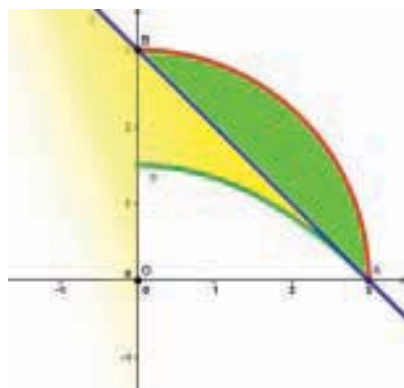
Si sono utilizzati due metodi diversi per risolvere i due problemi sui volumi generati dalla rotazione attorno all'asse x e attorno all'asse y di funzioni nella variabile x , utilizzando rispettivamente l'idea della somma di «fette» e l'idea della somma di strati «a cipolla»: sono approcci alternativi basati su idee diverse, entrambe arricchenti, in modi indipendenti, la cultura matematica. Si potrebbe anche decidere di utilizzare uno solo dei due metodi proposti riconducendo un caso all'altro, a patto che, si sappiano calcolare e adoperare correttamente le funzioni inverse. Allora sarebbe sufficiente conoscere un solo metodo. Ma si sa bene che non tutte le funzioni sono invertibili (devono essere infatti iniettive) e, a volte, l'inversione comporta calcoli molto laboriosi. Nel caso poi di funzioni non invertibili ma invertibili a tratti, bisognerà anzitutto suddividere ciascuna funzione nei singoli intervalli d'invertibilità e poi sviluppare tutte le considerazioni conseguenti. Così conoscere entrambe le formulazioni è molto utile per semplificare notevolmente lo svolgimento e anche per non perdere uno dei significativi punti di vista prima notati. Alcuni potrebbero obiettare che il calcolo di volumi di solidi di rotazione è nei programmi e nelle indicazioni ministeriali assieme a uno solo dei metodi qui ricordati. Di fatto la competenza matematica dei docenti dovrebbe permettere di notare che la sola inclusione del calcolo dei volumi di solidi di rotazione comporta già che vengano anche presentati i metodi per realizzarlo, e che il menzionarne uno solo deve essere visto come indicazione non escludente l'altro. D'altra parte programmi e indicazioni sono solo linee generali di capitoli che devono essere trattati, mentre cosa inserire nelle attività d'insegnamento sotto il cappello dei vari titoli, e come svolgerle dipende dalla competenza matematica dei singoli docenti, dalla loro visione di matematica. È la loro comprensione dell'importanza dei singoli capitoli della matematica che dovrebbe indurli a svolgerli con la dovuta profondità e precisione, al di là delle indicazioni ufficiali, ma per il semplice motivo che si vuole comunicare e trasmettere una matematica essenziale alla vita odierna di ciascuna persona a un certo livello di cultura.

Il secondo problema

Il secondo problema considera due curve limitatamente al primo quadrante: la prima è un arco di parabola di equazione $x^2 = 9-6y$ con vertice nel punto $(0,3)$, passante per il punto $(3,0)$,

e concavità verso il basso; l'altra è un arco di circonferenza con centro nell'origine e raggio 3. Dapprima si chiede di determinare la retta tangente alla parabola nel suo punto A di coordinate (3,0).

Questo compito non dovrebbe presentare particolari difficoltà



perché ciascuno studente che affronta questo test dovrebbe saper determinare una retta tangente a una semplice funzione (parabola) in un suo punto dove è derivabile. Viene poi chiesto il calcolo di due aree. Una volta

notato che la tangente ottenuta passa per il punto (0,3) e ivi interseca la circonferenza, la prima area è ben definita e delimitata, superiormente, dall'arco di circonferenza e, inferiormente, dalla tangente della parabola nel punto (3;0). Essa può essere calcolata senza ricorrere all'integrazione ma considerando solo una differenza di aree note dalla geometria elementare (un quarto di area del cerchio meno l'area del triangolo rettangolo isoscele di lato lungo 3 unità). Chiaramente nell'intenzione dell'estensore della domanda la seconda area doveva essere delimitata superiormente dalla retta tangente, inferiormente dalla parabola, lateralmente a sinistra da un tratto dell'asse verticale y (a destra non servono delimitazioni perché gli archi di cerchio e di parabola chiudono la regione intersecandosi nel punto A di ascissa 3). Tuttavia il testo non menziona il limite laterale sinistro dell'area considerata e ciò provoca una seria imprecisione che può portare alla non comprensione dell'area intesa. È ben vero che all'inizio del problema si era affermato che le curve erano considerate nel primo quadrante, ma non è stato mai detto che questa limitazione si riferisce a tutta la trattazione e non alle sole due curve date inizialmente. Anche in questo caso si pretende l'interpretazione dello student e nell'indovinare le intenzioni dell'estensore. Il calcolo di quest'area sottointesa richiede una facile integrazione.

Il secondo punto propone il calcolo del volume di un solido che ha per base la regione di piano precedentemente descritta e per sezione una data funzione area. Il solido che viene a crearsi non è raffigurabile in quanto la conoscenza dell'area delle sezioni non determina la forma. Che senso ha chiedere il volume di un solido che non si può rappresentare?

Così si richiede di conoscere che le aree si ottengono con una integrazione pur senza alcun riferimento al significato geometrico dell'integrazione indipendentemente dal contesto. Per svolgere l'integrazione indipendentemente dal contesto si deve conoscere il comportamento della funzione esponenziale e l'integrazione per sostituzione in una situazione immediata.

La terza richiesta domanda di determinare il volume di un solido di rotazione generato dalla superficie studiata al primo punto. Come visto già nell'altro problema assegnato, si tratta di somma di volumi di dischi con la particolarità di esprimere la porzione di circonferenza come funzione: tale operazione risulta possibile in quanto si sta considerando solo il primo quadrante. Un altro modo può essere quello di vedere la rotazione attorno all'asse x del quarto di circonferenza, il quale genera una semisfera, e sottraendo a esso il volume del solido di rotazione attorno all'asse x generato dall'arco di parabola.

La quarta richiesta consiste in una dimostrazione non banale: si richiede di attivare un procedimento originale che utilizza in modo significativo conoscenze matematiche specifiche. Anzitutto va ricordato che due circonferenze tangenti (in questo caso internamente) hanno i rispettivi centri e il punto di tangenza allineati.

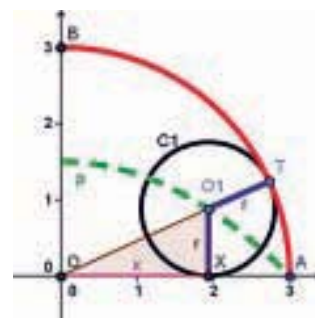
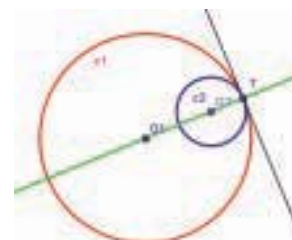
Una circonferenza C_1 tangente in X all'asse x e in T all'arco di circonferenza $\widehat{AB}$ dato (avente centro O nell'origine degli assi e raggio di lunghezza 3), avrà centro O_1 sul raggio $\overline{OT}$ e il raggio $\overline{O_1X}$ perpendicolare all'asse x essendo tangente a esso. Indichiamo con r la lunghezza del raggio della circonferenza C_1 , così $\overline{O_1T} = \overline{O_1X} = r$.

Tale costruzione mette in evidenza il triangolo rettangolo $\triangle XO_1O$ la cui ipotenusa $\overline{OO_1}$ si può calcolare in due modi: o $3 - r$ o utilizzando il teorema di Pitagora. Si ottiene così l'equazione

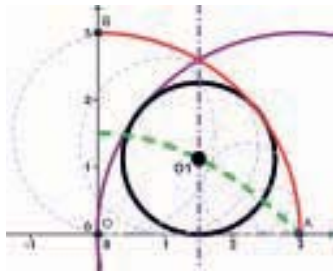
$$\sqrt{x^2 + r^2} = 3 - r$$

Sviluppandola si arriva alla parabola di partenza, come richiesto.

Infine si richiede l'equazione della circonferenza tangente, oltre



all'arco di circonferenza dato e all'asse delle x , anche alla circonferenza di centro $(3;0)$ e raggio 3. La figura formata dai due archi di circonferenza dati è simmetrica rispetto alla retta verticale di equazione $x=3/2$, e quindi anche la circonferenza cercata sarà simmetrica rispetto a questa retta verticale, sicché il suo centro giacerà sull'asse di simmetria. Determinata così l'ascissa del centro $(3/2)$, la sua ordinata, che è anche la lunghezza del raggio, può essere determinata utilizzando l'equazione della parabola prima ottenuta su cui devono giacere i



centri della circonferenze che si stanno considerando. Così l'ordinata y del centro sarà tale che $6y = 9 - (3/2)^2$, cioè $y = 9/8$. Con questi dati si ricava l'equazione della circonferenza richiesta.

Confronto fra i problemi

Prima di passare in rassegna i dieci quesiti confrontiamo i due problemi cercando di evidenziarne in modo critico differenze, eventuali limiti e potenzialità.

I problemi sono strutturati in varie parti tra loro coordinate. Ciò permette di apprezzare la capacità di correlare nozioni diverse al fine di risolvere un problema. Il pericolo di una tale organizzazione può risiedere nel fatto che un errore iniziale possa compromettere l'intero sviluppo rendendo difficoltosa la valutazione. Tuttavia, nella situazione in esame, la possibilità di rispondere a un quesito successivo indipendentemente dall'esatta soluzione dei precedenti supera la difficoltà evidenziata. In questo senso i problemi sono ben bilanciati: le conoscenze richieste nei primi punti sono basilari e quasi ogni parte può essere affrontata anche se le precedenti non sono sviluppate correttamente.

Confrontando i due problemi si nota che, pur essendo diversi, sondano conoscenze simili. Sono interessanti i punti in cui vengono richieste le equazioni delle rette tangenti, il calcolo delle aree e dei volumi perché lo studente, sviluppando il problema, dimostra di saper utilizzare e gestire lo strumento matematico dandogli significato.

Due importanti differenze di contenuto tra i due problemi stanno nel fatto che nel primo non viene richiesta nessuna conoscenza

di geometria sintetica e ben poco di geometria analitica e che nel secondo viene proposta una dimostrazione. Per dimostrare non basta la conoscenza delle sole formule, ma servono soprattutto i significati. Come si può notare dalla soluzione precedentemente proposta, sviluppare una dimostrazione richiede l'agilità matematica di cogliere e collegare nozioni studiate in ambiti e tempi diversi durante la carriera scolastica.

Entrambi i problemi presentano imprecisioni linguistiche che, come è stato notato, rendono i testi ambigui e che permettono interpretazioni, da parte degli studenti, che possono essere diverse da quella intesa dall'estensore.

I quesiti

Tra i dieci quesiti proposti quattro (1, 3, 4, 6) richiedono la conoscenza della derivazione. Tra questi notiamo che il quesito 6 è banale e meccanico¹, il 3 è la solita applicazione immediata della cinematica che si risolve con due derivazioni banali².

Il quesito 4 propone un problema di massimo: questo è un tema centrale in un programma di matematica, e richiede in particolare la capacità di esprimere in formule un problema espresso nel linguaggio ordinario. Una prima difficoltà consiste nella scelta del parametro che caratterizza un cono di apotema data in funzione del quale ottenere il suo volume. Tra i possibili parametri da considerare ci sono l'altezza del cono, il suo raggio, gli angoli al vertice e alla base. Le varie scelte comportano maggiori o minori difficoltà di calcolo nella successiva derivazione necessaria per determinare il valore massimo del volume. La più conveniente risulta essere l'altezza, perché, nel calcolare il volume, il raggio di base va considerato al quadrato e, d'altra parte, il legame tra raggio di base e altezza si esprime mediante una radice quadrata, così con la scelta proposta il volume in funzione dell'altezza si esprime mediante una funzione polinomiale. Naturalmente la soluzione del problema deve proseguire grazie alle conoscenze classiche sulle soluzioni di problemi di massimo e minimo. Il risultato che si ottiene esprime il volume in metri cubi, mentre lo si vuole in litri: si rivela che si è voluta valutare l'attenzione a questi dettagli. Per quanto riguarda il limite del rapporto incrementale (quesito 1) da un certo punto di vista è importante che si riconosca la definizione di derivata, d'altro canto questo non ne caratterizza il significato geometrico. Inoltre, nel caso specifico, il calcolo del limite poteva essere svolto sviluppando la potenza del binomio. Per evitare che il solutore imbocchi questa seconda via, si sarebbe dovuto proporre il pro-

1. La funzione da derivare è $f(x) = 5 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17$

2. $s(t) = 20 \left(2e^{-\frac{t}{4}} + t - 2 \right)$ $v(t) = s'(t) = 20 \left(-e^{-\frac{t}{4}} + 1 \right)$
 $a(t) = v'(t) = s''(t) = 10e^{-\frac{t}{4}}$ $a(4) = 10e^{-1}$

blema con un esponente molto più elevato, ad esempio 29, in modo da obbligare a riconoscere il concetto di derivata, impedendo così il solo calcolo meccanico. In nessun quesito è emerso l'aspetto geometrico della derivazione.

Tre quesiti riguardano elementi dello studio di funzione. Il *quesito 2* riguarda la conoscenza degli asintoti di una funzione: viene richiesto di illustrarne il significato e dare l'esempio di una funzione con particolari asintoti. Opportunamente questa formulazione richiede una comprensione della nozione di asintoto ben più approfondita della memorizzazione della definizione. Nel *quesito 8* viene richiesto di calcolare il valore medio di una funzione, non viene però definito cosa significhi «valore medio di $f(x)$ ». Ancora una volta il linguaggio è ambiguo. Si suppone che l'estensore intendesse fare riferimento implicito all'applicazione del teorema del valore medio³. D'altra parte ci possono essere varie nozioni di valore medio di una funzione in un intervallo, e quella indicata è solo una delle tante. Così è evidente l'imbarazzo del solutore della questione e ancor di più di coloro che dovranno valutare le risposte date. Se poi il quesito doveva essere inteso come si è supposto nella mente dell'estensore si nota che il calcolo della funzione primitiva è banale e richiede la sola applicazione della formula.

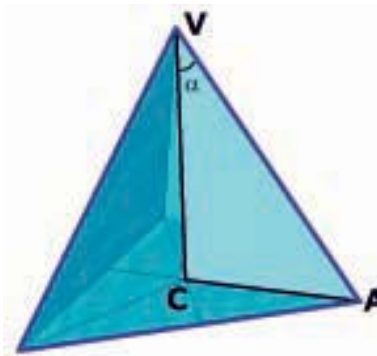
Il *quesito 10* richiede allo studente osservazioni opportune sul comportamento di dominio e codominio nella composizione di funzioni note quali seno, coseno e logaritmo. A prima vista queste funzioni non rispondono alla richiesta di essere positive per ogni numero reale; tuttavia, sfruttando il fatto che le funzioni trigonometriche a un dominio illimitato associano un codominio limitato e che funzioni non sempre positive lo sono ristrette ad opportuni insiemi, si arriva alla conclusione.

Due quesiti sono inerenti alla geometria. Il *quesito 7* è presentato molto male. Un tetraedro regolare ha sei spigoli di uguale lunghezza e quattro altezze ancora di uguale lunghezza. Così l'indicazione di spigolo l e di altezza h non è un dare un nome a particolari segmenti, ma indicare delle lunghezze in modo sovrabbondante (perché una è derivabile dall'altra) e inutile ai fini della domanda la cui risposta non dipende da nessuna di queste lunghezze. Peggio, fissata un'altezza, tre spigoli hanno un estremo in comune con l'altezza data, mentre tre non hanno alcun punto in comune con l'altezza data, sicché non ha neppure senso parlare dell'angolo tra due tali segmenti. Per esprimere correttamente il quesito, si sarebbe potuto dire: «Sia dato un tetraedro regolare. Determinare l'ampiezza del-

l'angolo α formato da uno spigolo e un'altezza che hanno un estremo in comune». Detto così il quesito diventa interessante perché richiede una buona visualizzazione spaziale di ciò che si sta considerando e la capacità di cogliere gli elementi essenziali per

una soluzione pressoché immediata. Per facilità espositiva supponiamo che il tetraedro sia disposto con una faccia orizzontale sotto il vertice V opposto a quella faccia; consideriamo l'altezza relativa a quella faccia, cioè il segmento dal baricentro C di quella faccia al vertice opposto V ; infine consideriamo uno spigolo per V e chiamiamo A l'altro estremo dello spigolo. L'angolo α cercato non è altro che l'angolo in V del triangolo CVA che è rettangolo in C . Inoltre essendo C il baricentro del triangolo equilatero che è una faccia del tetraedro, esso è il punto d'intersezione delle altezze del triangolo equilatero, e il segmento CA avrà lunghezza $2/3$ di un'altezza del triangolo equilatero che ha per lato uno spigolo, e questa, com'è noto, è $(\sqrt{3})/2$ dello spigolo. Così il segmento CA sarà lungo $(\sqrt{3})/3$ volte lo spigolo. Tornando al triangolo CVA che è rettangolo in C il rapporto tra lo spigolo VA e il segmento CA è proprio il seno dell'angolo α . Così $\sin \alpha = (\sqrt{3})/3$, e si è determinato l'angolo richiesto.

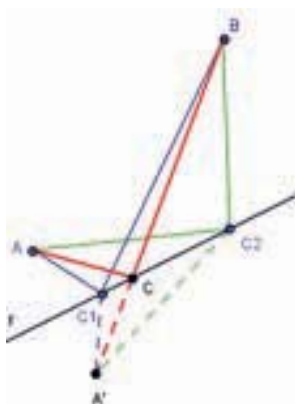
Il *quesito 9* riguarda la soluzione e la dimostrazione del problema di Erone. Anche qui lo studente, per risolvere correttamente il problema, deve dimostrare una buona visualizzazione della situazione e la fantasia di vedere il problema in modo diverso. Ovviamente per andare dal punto A al punto B toccando la retta in un punto C , per percorrere il cammino più breve, si andrà da A a C lungo una retta e da C a B lungo un'altra retta. Spostando il punto C lungo la retta data uno dei due segmenti AC e CB si allunga mentre l'altro si accorcia⁴, sicché si dovrà determinare il punto C sulla retta data tale che la somma delle lunghezze dei due segmenti sia minima. Sembra quasi che l'assunzione che i due punti A e B siano dalla stessa parte della retta sia ciò che rende difficoltosa la soluzione del problema: infatti, se i due punti dati, che ora indicheremo con K e B , fossero da parti opposte della retta il percorso più breve sarebbe banalmente il segmento che congiunge i due



3. $V_M = \frac{1}{x-1} \int_{-1}^x \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x-1}$

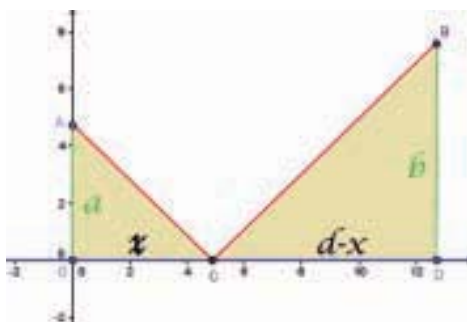
4. Considerando C compreso tra le proiezioni di A e B sulla retta r , altrimenti il percorso non sarà il più breve.

punti, e il punto C da determinare sarebbe l'intersezione di tale segmento con la retta data. È anche immediato notare che percorsi costituiti da coppie di segmenti che hanno un estremo nei punti dati e l'altro in un altro punto C_1 della retta r hanno lunghezza maggiore. Inoltre ci si accorge facilmente che il percorso costituito da un segmento da B a un punto qualsiasi C_2 della retta r e dal segmento da C_2 al simmetrico K' di K rispetto alla retta r ha la stessa lunghezza del percorso costituito dal segmento da B a C_2 e dal segmento da C_2 a K , poiché i segmenti da C_2 a K' e da C_2 a K sono congruenti, ancora qualsiasi sia il punto C_2 sulla retta r . Si osservi che ora B e K' sono dalla stessa parte della retta e che il percorso più breve da B a K con la determinazione del punto C nella posizione già individuata. Con queste osservazioni possiamo tornare al nostro



problema con il suggerimento di considerare il simmetrico A' del punto A rispetto alla retta r , poiché il simmetrico del simmetrico è il punto di partenza. La determinazione del punto C sulla retta che fornisce il percorso più breve da B ad A sarà lo stesso che fornisce il percorso più breve da B ad A' , cioè il punto in cui il segmento da B ad A' interseca la retta r .

Un'altra possibilità era quella di sviluppare il problema per via analitica. La soluzione poteva essere vista introducendo il piano cartesiano, facendo corrispondere la retta r con l'asse delle ascisse, il punto A di coordinate $(0;a)$ con $a>0$, il punto B di coordinate $(d;b)$ con $b>0, d>0$, e il punto C di coordinate $(x;0)$.



I parametri a, b e d sono fissi e determinati dai punti A e B dati, per cui l'unica incognita rimane x (per determinare C). La lunghezza della somma dei segmenti BC e CA si potrà calcolare utilizzando il Teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli AOC e CDB dove D è la proiezione di B sulla retta r (asse delle x) e risulterà:

$$l(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

La funzione $l(x)$ è continua e derivabile ovunque, perciò il problema di trovare un suo minimo assoluto diventa quello di trovare i punti dove la derivata della funzione è 0, poiché il minimo è tra i punti critici e non ci sono altri punti critici. Così bisogna anzitutto calcolare la sua derivata. Questo calcolo porta a

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-d}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (d-x)^2} + (x-d)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$l'(x)$ è 0 quando

$$\frac{x\sqrt{b^2 + (d-x)^2} + (x-d)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

Per risolvere l'equazione si osserva che il denominatore è sempre strettamente maggiore di 0 sicché è sufficiente cercare dove si annulla il numeratore, ottenendo:

$$x\sqrt{b^2 + (d-x)^2} = (d-x)\sqrt{a^2 + x^2}$$

Rimane la difficoltà rappresentata dalla presenza di radici. Per superarla si possono quadrare i termini, ricordando che, attraverso la quadratura, s'introducono soluzioni non volute che, per essere eliminate, richiedono la determinazione degli ambiti in cui si trovano le soluzioni cercate. Nel caso in esame, le condizioni da rispettare sono: $x>0$ e $d-x>0$, ossia $0<x<d$, oppure $x<0$ e $d-x<0$ ma questo secondo caso risulta non accettabile perché $d>0$ per ipotesi. Si noti che questi limiti imposti dal metodo di calcolo sono consoni con il problema che si sta cercando di risolvere, poiché dallo stesso grafico della situazione di si rende conto che non ci possono essere punti di minimo fuori dall'intervallo che si sta considerando.

Otteniamo così:

$$x^2[b^2 + (d-x)^2] = (d-x)^2(a^2 + x^2) \quad \text{con } 0 < x < d, a > 0 \text{ e } b > 0$$

$$x^2(b^2 - a^2) + 2a^2dx - a^2d^2 = 0 \quad \text{con } 0 < x < d, a > 0 \text{ e } b > 0$$

$$x_1 = \frac{ad}{b+a} \quad x_2 = \frac{ad}{a-b}$$

Occorre notare che il coefficiente di x^2 , ossia $(b^2 - a^2)$, non è sempre positivo e si presentano tre casi.

Se $b>a$, la concavità della parabola associata all'equazione è rivolta verso l'alto e, per rispettare le limitazioni introdotte quando si sono quadrati i termini, la soluzione x_2 , che è la più piccola, non è accettabile perché è minore di 0. Pertanto la funzione $l(x)$ avrà un minimo in x_1 , poiché lì la derivata passa da negativa a positiva e la funzione da decrescente a crescente e il minimo sarà assoluto essendo la sua ascissa l'unico zero della derivata.

Se, invece, $a > b$, la concavità della parabola associata all'equazione è rivolta verso il basso e, sempre per rispettare le limitazioni introdotte quando si sono quadrati i termini, la soluzione x_2 , che ora è la più grande, non è accettabile perché $a/(a-b)$ è maggiore di 1 rendendo x_2 maggiore di d , contro la condizione $0 < x < d$. Quindi la funzione $l(x)$ avrà un minimo in x_1 , poiché, ancora, lì la derivata passa da negativa a positiva e la funzione da decrescente a crescente e il minimo sarà assoluto essendo la sua ascissa l'unico zero della derivata.

Se, infine, $a = b$, il polinomio di cui si cerca uno zero diventa $2a^2dx - a^2d^2$ che è lineare e si annulla solo in $d/2$, come ci si poteva aspettare per la simmetria che ora si è instaurata nel problema. Ancora si vede che questo è un punto di minimo, che è assoluto essendo unico.

Confrontando i due possibili modi di procedere esaminati si possono osservare due atteggiamenti differenti che il solutore può avere. Da una parte, con la geometria sintetica, si arriva alla soluzione grazie all'idea brillante della simmetria e poche altre osservazioni: il problema dato viene condotto ad un problema di cui si conosce già la soluzione (la distanza più breve tra due punti). Questa modalità di ricondurre un problema ad un altro già risolto risulta molto efficiente e viene utilizzata spesso in matematica.

D'altra parte, invece, lo studio analitico della funzione evidenzia l'applicazione di una procedura standardizzata ottenuta grazie a profondi risultati della matematica che permette di affrontare anche problemi in cui una soluzione sintetica non è disponibile. Proprio per questo motivo il metodo analitico non va declassato di fonte all'agilità di certe soluzioni sintetiche, ma va ugualmente studiato e apprezzato proprio per la generalità di problemi che riesce ad affrontare. Nel caso specifico in considerazione è evidentemente meno conveniente per arrivare alla soluzione. Ciononostante è stato esaminato ugualmente per il suo valore intrinseco, se non si riduce a una ricetta, e per mettere in risalto anche le difficoltà che comporta, inclusa la necessaria capacità di fare conti, che è una componente essenziale della matematica: la derivata da calcolare richiede l'utilizzo delle opportune regole di calcolo studiate, e per la determinazione degli zeri bisogna ricordare tecniche studiate precedentemente, ma che non vanno scordate. Osserviamo infine che la strategia analitica richiede tempi più lunghi e più ampie conoscenze rispetto al metodo geometrico visto prima che se la cava con una brillante intuizione.

Un solo quesito riguarda il calcolo combinatorio (quesito 5): dati n punti nello spazio, contare il numero di segmenti che congiungono i punti a due a due, il numero di triangoli che hanno per vertici questi punti (non allineati) e il numero di tetraedri (nessuna quaterna deve essere complanare). L'assun-

zione che nessuna terna sia allineata e nessuna quaterna complanare, implica che per contare segmenti, triangoli e tetraedri non servono considerazioni geometriche ma il calcolo combinatorio: infatti, si tratta di vedere in quanti modi si possono scegliere due o tre o quattro punti, tra loro diversi, tra n , cioè quelle che si chiamano combinazioni senza ripetizione di i elementi tra n , nel nostro caso con $i = 2, 3, 4$. Con queste affermazioni possiamo osservare palesemente una caratteristica fondamentale della matematica: il considerare solo gli aspetti rilevanti. Nel testo del problema vengono definiti segmenti, triangoli e tetraedri dati rispettivamente due, tre o quattro punti. La caratteristica rilevante degli oggetti di studio non è certo la figura geometrica, ma solo i 2, 3, 4 punti che la determinano. Con questa osservazione il problema si trasforma da geometrico a combinatorio e mette in luce un procedimento tipico della matematica: il saper cogliere solo gli aspetti essenziali, tralasciando i dati che non servono, per arrivare alla soluzione. Naturalmente ci saranno n modi per scegliere un primo elemento, $n-1$ per sceglierne un secondo, ..., $n-j+1$ per scegliere un j -esimo punto, con $j = 1, \dots, i$. Ma così si ottengono $n \times (n-1) \times \dots \times (n-i+1)$ i -uple ordinate, mentre nel nostro caso si richiedono le i -uple non ordinate (con $i = 2, 3, 4$), sicché bisogna determinare quante i -uple ordinate si possono costruire con una certa i -upla di punti e dividere il numero delle i -uple ordinate per questo numero. I possibili ordinamenti di i elementi si ottengono scegliendone un primo (in i modi possibili) e poi un secondo (in $i-1$ modi possibili) e così via fino alla scelta dell' i -esimo nel solo modo rimasto possibile, sicché i modi di ordinare i elementi sono esattamente $i!$. Così il numero delle combinazioni senza ripetizione ottenute scegliendo i elementi tra n sarà $[n \times (n-1) \times \dots \times (n-i+1)] / (i!)$. Notando che $n \times (n-1) \times \dots \times (n-i+1)$ è uguale a $n! / [(n-i)!]$, il numero cercato può essere espresso come $n! / [(n-i)! \times i!]$, che si usa indicare con $\binom{n}{i}$. Per $i = 2, 3, 4$, si otterranno i valori $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ e $\binom{n}{4}$ rispettivamente.

Alla fine di un percorso liceale, questi elementi dovrebbero essere conosciuti dagli studenti non tanto per rispondere alle domande del tema d'esame, ma per il fatto che sono conoscenze che si riscontrano nella gestione della quotidianità.

Riflessioni

Dall'analisi dell'intero tema d'esame emergono alcuni problemi e alcuni suggerimenti.

Una prima osservazione è inerente al programma che i docenti sviluppano durante l'anno scolastico per preparare gli studenti al compito di maturità (anche se non dovrebbero fare ciò, bensì prepararli alla matematica, e il compito di maturità dovrebbe verificare il raggiungimento di tale traguardo).

Infatti vari argomenti sembrano imposti dalle prove e gli insegnanti si sentono obbligati a riproporli. Così non si crea un percorso che possa appassionare e far capire la vera importanza della matematica e dei temi scelti. La programmazione dovrebbe dipendere dagli elementi indispensabili della matematica a dai concetti elaborati dalla disciplina che il vaglio del tempo ha dimostrato essere importanti. La scuola ha il compito di educare per il mondo attuale e quindi di tramandare tutto ciò che è stato acquisito vagliato e decantato in secoli di sperimentazioni, di studio e di ricerca.

Una seconda osservazione riguarda la possibilità di scelta da parte dello studente della metà degli esercizi proposti nel compito (viene richiesto di risolvere 1 problema su 2 e rispondere a 5 quesiti su 10). Ciò lascia trasparire l'idea che qualsiasi parte della matematica possa essere totalmente ignorata e quindi che nessun argomento sia essenziale. Nella prova i due problemi sondano elementi diversi (solo uno dei due problemi richiede una dimostrazione e solo uno tratta di geometria), i quesiti invece presentano contenuti differenti e questo potrebbe permettere allo studente di sapere solo una parte della matematica. Si ritiene importante che alcuni argomenti debbano essere conosciuti perché esprimono contenuti fondamentali (ad esempio definizione di derivata, definizione di asintoto, nozione di numero reale e di numero razionale, nozione di archimededità, metodo delle coordinate cartesiane, cardinalità, ...). Chiaramente, non si potranno fare domande su ciascuno degli argomenti ricordati, ma lo studente dovrà conoscerli tutti, sicché si dovrà esigere la risposta a una qualsiasi domanda su questi temi: su di essi non ci dovrà essere possibilità di scelta. Altri sviluppi della materia che non sono essenziali possono essere magari oggetto di scelte.

Le scelte, poi, possono rendere problematica la valutazione degli elaborati. Come confrontare risposte a quesiti diversi? La stessa scelta di rispondere a domande diverse potrebbe indicare che uno studente ha privilegiato solo esercizi di tipo mnemonico e un altro esercizi che richiedono comprensione, anche operativa. Supponendo che entrambi abbiano svolto correttamente il proprio percorso, sono da valutare allo stesso livello? Alcuni studenti possono aver risposto alla stessa domanda seguendo percorsi diversi. Una valutazione comparativa dovrà tener conto anche della convenienza di una soluzione rispetto ad un'altra. Quan-

do una soluzione è da considerarsi «brillante»? La risposta a questa domanda fa parte del bagaglio delle competenze dell'insegnante il quale deve conoscere difficoltà, pregi, difetti, limiti e potenzialità delle singole strategie utilizzate per risolvere i problemi. Per fare questo l'insegnante deve sapere di cosa si sta parlando, deve avere una conoscenza approfondita e puntuale della materia, solo così si potranno valutare le differenze e le difficoltà, si potranno capire gli esiti ed apprezzare come lo strumento matematico sia stato utilizzato in modo utile e corretto.

A volte, però, la scelta di un percorso piuttosto che di un altro può dipendere da come viene letta la richiesta, e ciò impone una grande precisione, anche linguistica, nella sua esposizione. Purtroppo, nella prova esaminata, non sempre si è riscontrata la dovuta precisione, sicché la valutazione può incontrare ulteriori difficoltà. Le domande presentate da questo esame di maturità fanno emergere cosa significhi studiare matematica? Fanno trasparire quale idea della matematica possono avere gli studenti? In molte occasioni si è evidenziato come sia sufficiente solo uno sforzo di conoscenza mnemonica di formule tralasciando un'elaborazione intelligente caratterizzata dalla vera comprensione del problema. In altri casi sono proposti esercizi di pura elaborazione sintattica in quanto gli elementi forniti non hanno significato concreto (esempio punto 2 del secondo problema): questi non possono fornire risposte alle precedenti domande.

Abbiamo apprezzato che il compito tocchi aspetti positivi ed essenziali della matematica come già notato nel corso della trattazione quali il saper cogliere i dati essenziali per arrivare alla soluzione del problema tralasciando quelli che non servono, saper trovare un risultato a partire da un problema più semplice, saper dimostrare e quindi argomentare il proprio ragionamento che porta alla soluzione richiesta, l'abilità nel fare i conti (le modalità di calcolo devono essere giustificate ma anche sapute).

La domanda forse più corretta per capire come dovrebbe essere un compito di maturità sta nel chiedersi prima a cosa serve. Il compito dovrebbe essere una prova del raggiungimento di conoscenze matematiche che rappresentano non soltanto un valore culturale, bensì un particolare approccio critico per risolvere problemi significativi sfruttando la sistemazione e i risultati ottenuti attraverso secoli di sviluppo della disciplina e che la storia ha vagliato e dimostrato essenziali per il vivere quotidiano.

*Marco Costanzi, Silvia Dirupo
Docenti di Matematica, Verona*