

MATEMATICA

LICEO SCIENTIFICO

Alfredo Marzocchi

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1. La funzione f è una cubica passante per l'origine e per i punti di coordinate $(\pm 2, 0)$. Pertanto essa è sempre definita, positiva per $-2 \leq x \leq 0$ e per $x \geq 1$, non ammette asintoti,

ammette un punto di massimo relativo e un punto di minimo relativo, che si trovano facilmente annullando la derivata prima

$$f'(x) = 3x^2 - 4.$$

Essi risultano essere $M(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9})$ e $m(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{9})$.

Si constata anche facilmente che f è dispari, ossia $f(-x) = -f(x)$ per ogni x . L'unico punto di flesso è l'origine.

LA TRACCIA MINISTERIALE

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy , si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R .
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme R dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1) + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy .
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ , dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

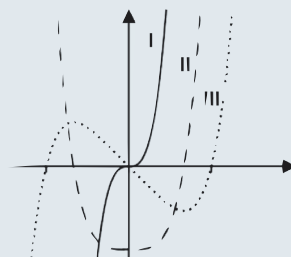
Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,72	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i , oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

QUESTIONARIO

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.
3. Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ radianti.
6. Si calcoli $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\lg x - \lg a}{x - a}$.
7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .
8. In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

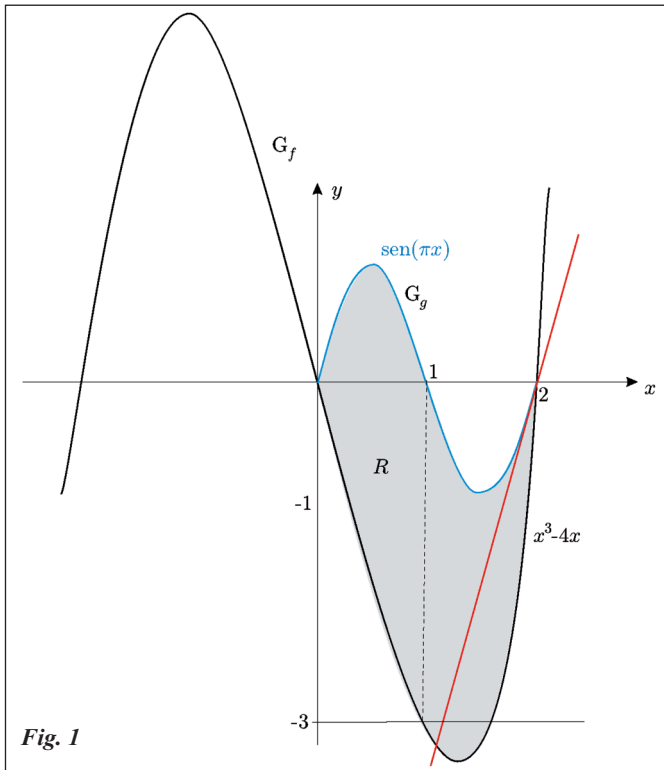


Si motivi la risposta.

La funzione g è invece una sinusoidale di periodo 2, infatti si ha per ogni x

$$g(x+2) = \sin \pi(x+2) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin \pi x = g(x).$$

I rispettivi grafici sono mostrati in Fig. 1.



2. Per trovare l'intersezione del grafico di f con $y = -3$, si ottiene l'equazione

$$x^3 - 4x + 3 = 0,$$

che si vede facilmente ammettere la soluzione $x = 1$ e quindi, usando il criterio di scomposizione di Ruffini, anche le soluzioni

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Per trovare i punti del grafico di g a tangente orizzontale, basta annullare la derivata

$$g'(x) = \pi \cos \pi x$$

nell'intervallo $[-6, 6]$. Poiché tutte le soluzioni dell'equazione $\cos \pi x = 0$ sono della forma

$$\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ossia

$$x = \frac{1}{2} + k = \frac{2k+1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

si trovano le soluzioni per k intero da -6 a 5 compresi, e precisamente

$$x = -\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}.$$

Siccome in questi punti $\cos \pi x$ è zero, i rispettivi valori di $\sin \pi x$ sono alternatamente 1 e -1 al crescere di k , cominciando con 1 in corrispondenza di $k = -6$ e terminando con 1 per $k = 5$.

3. Notiamo che il grafico di f e il grafico di g si intersecano nell'intervallo dato solo in $(0, 0)$ e in $(2, 0)$. Infatti il grafico di g nell'intervallo $[0, 2]$ sta tutto sopra la retta di equazione $y = \pi(x-2)$ (retta rossa in Fig. 1), mentre si ha

$$x^3 - 4x < \pi(x-2)$$

se

$$\sqrt{\pi+1} - 1 < x < 2 \approx 1.0351 < x < 2$$

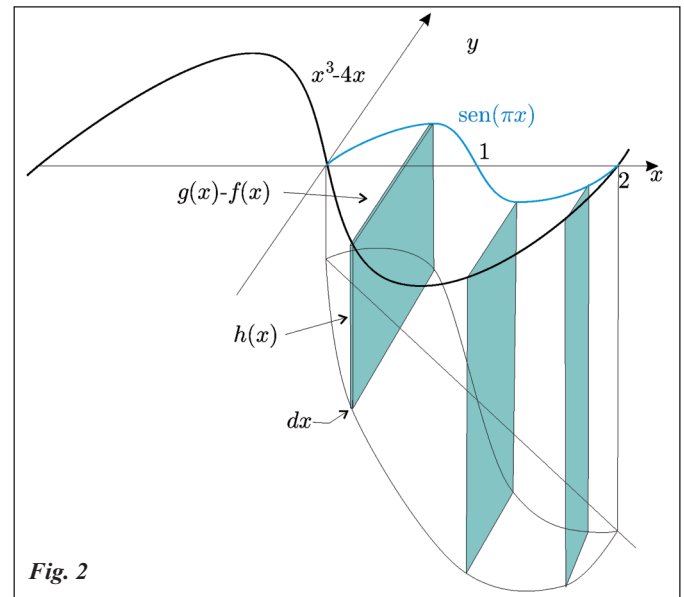
e quindi il grafico di f è sotto la retta $y = \pi(x-2)$ almeno in questo intervallo. Poiché poi $f(1) = -3$, il grafico G_f si trova anche sotto la retta $y = -3$ nell'intervallo $[1, (-1 + \sqrt{13})/2]$, mentre il grafico del seno è ovviamente superiore. Pertanto

$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni } 0 < x < 2.$$

L'area di R è dunque esprimibile con un integrale definito, e vale

$$\text{area}(R) = \int_0^2 (\sin \pi x - (x^3 - 4x)) dx = 4.$$

4. Poiché la profondità h della vasca non varia con y , il volume cercato si può visualizzare come un integrale di «parallelepipedi infinitesimi» di dimensioni $g(x) - f(x)$ e $h(x)$ e spessore dx (Fig. 2).



Siccome il volume di questi parallelepipedi è

$$dV = (g(x) - f(x))h(x) dx = (\sin \pi x - x^3 + 4x)(3-x) dx$$

il volume totale è quindi

$$V = \int_0^2 (\sin \pi x - x^3 + 4x)(3-x) dx$$

che risulta essere $2/\pi + \frac{116}{15} \approx 8,37$. Se le misure sono espresse in metri, questo volume è espresso in metri cubi e

quindi, poiché un metro cubo contiene 1000 litri, la vasca contiene circa 8370 litri di acqua.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1. Innanzitutto, dalla condizione $f(0) = 2$ segue, sostituendo,

$$b + 3 = 2$$

e quindi $b = -1$. Se poi ammette un massimo per $x = 4$, la derivata

$$f'(x) = a e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}(ax + b)e^{-\frac{x}{3}}$$

si deve annullare per $x = 4$. Questo porta all'equazione

$$a - \frac{4a + b}{3} = 0,$$

la quale, tenuto conto del fatto che $b = -1$, fornisce $a = 1$. Che il punto di ascissa $x = 4$ sia effettivamente di massimo verrà visto al punto successivo.

2. Per meglio rappresentare il grafico della funzione in esame, è più comodo studiare quello della funzione

$$h(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}}$$

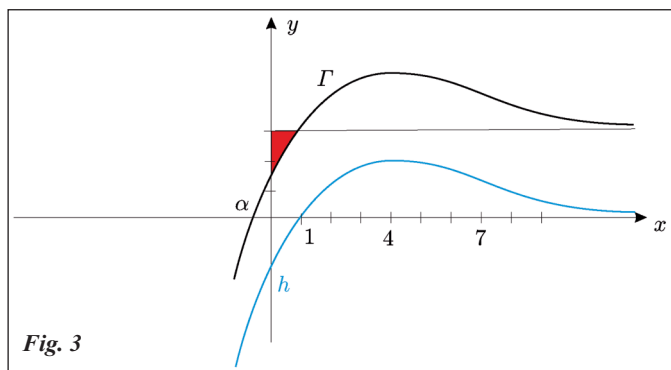
e poi traslare il grafico di 3 unità verso l'alto.

La funzione h è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$, e passa per $(1,0)$. Ammette massimo in $x = 4$, pari a $e^{-4/3}$, tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$ senza asintoti in questa direzione e ha un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \rightarrow +\infty$, come si verifica facilmente usando la regola di de l'Hôpital. Vi è infine un punto di flesso in $(7, 6e^{-7/3})$.

Ne segue, per quanto riguarda il grafico di f , che esso presenta un massimo in $(4, e^{-4/3} + 3)$, un flesso in $(7, 6e^{-7/3} + 3)$ e ha un asintoto orizzontale $y = 3$ a $+\infty$. Per quanto riguarda la positività, si vede facilmente dalla figura che deve esistere $\alpha < 0$ tale che $f(\alpha) = 0$ e tale che f sia negativa per $x < \alpha$ e positiva per $x > \alpha$.

3. L'area è illustrata in rosso nella Fig. 3. Il punto di intersezione della funzione con l'asintoto è $(1,3)$ e quindi il valore cercato è dato dall'integrale definito

$$I = 3 - \int_0^1 f(x) dx = 9e^{-1/3} - 6 \approx 0,45.$$



4. Si tratta di verificare che, per ognuno degli x_i assegnati, la funzione f ha un valore che differisce in valore assoluto per

x_i	$f(x_i)$	y_i	modulo della differenza
0	0	1,97	0,03
1	3	3,02	0,02
2	3,51	3,49	0,02
3	3,74	3,71	0,03
4	3,79	3,80	0,01
5	3,76	3,76	0,00
6	3,68	3,65	0,03

meno di 0.1 dai corrispondenti valori y_i assegnati. Siccome si ha l'affermazione data nel testo è corretta.

Siccome la funzione è sempre maggiore di 3 per $x \geq 6$, si ha che il fenomeno in futuro non potrà portare a profitti inferiori a 3 milioni di euro.

SOLUZIONE DEL QUESTIONARIO

1) Siano r il raggio della sfera e $2x$ l'altezza del cilindro, col che il raggio di base sarà $\sqrt{r^2 - x^2}$ e dunque il volume diventa

$$V = 2\pi x(r^2 - x^2),$$

che è massimo se $x = r/\sqrt{3}$. Il volume massimo vale

$$V_M = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}r^3,$$

e quindi, se $r = 60$ cm, si ottiene un volume di 522 374 cm³. Siccome un litro è pari a 1000 cm³, la risposta è circa 522 litri.

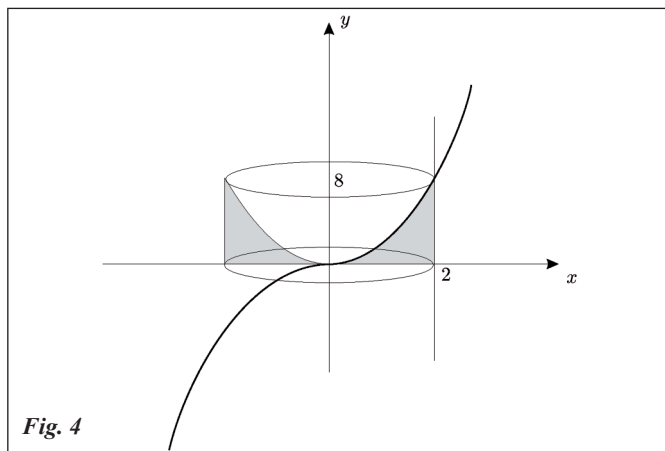
2) Per risolvere si può minimizzare il quadrato della distanza di $(4,0)$ dal generico punto $(t, \sqrt{t})$ ($t \geq 0$) e trovare la funzione, definita per $t \geq 0$,

$$f(t) = (t - 4)^2 + t = t^2 - 7t + 16.$$

Si tratta di una funzione di secondo grado, il suo grafico è quello di una parabola e il punto di minimo si ha per $t = 7/2$. Il punto richiesto è pertanto $(7/2, \sqrt{15/2})$.

3) Siccome la rotazione avviene attorno all'asse y , il volume cercato è dato dal volume del cilindro di raggio 2 e altezza 8, pari a 32π (v. Fig. 4), meno il volume del solido di rotazione dato dall'integrale

$$V = \pi \int_{y_0}^{y_1} f^2(y) dy,$$



dove f è la funzione ottenuta ricavando x in funzione di y sulla curva data, nel primo quadrante. Avendosi $y = x^3$, risulta $f(y) = y^{1/3}$ e gli estremi sono chiaramente $y = 0$ e $y = 8$, ottenuti da $x = 0$ e $x = 2$. Pertanto l'integrale vale

$$V = \pi \int_0^8 y^{2/3} dx = \frac{96}{5} \pi$$

e il volume cercato risulta $(64/5)\pi$.

4) La condizione richiesta si può scrivere

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Conviene tuttavia ricordare che le combinazioni di n oggetti a gruppi di k si possono anche calcolare con la formula

$$C_{n,k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!}$$

e quindi la condizione richiesta si scrive

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Siccome $n \geq k$, possiamo supporre $n \geq 3$ e quindi semplificare il termine $n(n-1)(n-2)$, ottenendo $n-3 = 4$ da cui $n = 7$, che è intero e che quindi è la soluzione cercata.

5) Siccome $2 > \pi/2$, bisogna spezzare l'integrale in due parti: l'area richiesta è data dall'integrale

$$\int_1^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^2 \cos x dx = 2 - (\sin 1 + \sin 2).$$

6) Avendosi, per $a \neq \pi/2 + k\pi$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 a},$$

applicando la regola di de l'Hôpital risulta

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

7) Innanzitutto, posto $f(x) = x^{2011} + 2011x + 12$, si ha $f(0) = 12 > 0$ e $f(-1) = -2000 < 0$, ed essendo f continua esiste almeno uno zero dell'equazione data, per il teorema degli zeri. La derivata

$$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011 = 2011(x^{2010} + 1)$$

è poi strettamente positiva nell'intervallo $[-1, 0]$, per cui è ivi strettamente crescente e dunque non può ammettere più di una intersezione con l'asse x .

8) Per questo punto è possibile consultare la corrispondente pagina web di Wikipedia, la quale, benché succinta, riassume bene i punti della questione

http://it.wikipedia.org/wiki/Quadratura_del_cerchio

9) *Versione analitica.* Non è restrittivo porre i tre vertici del triangolo sul piano $z = 0$, nei punti di coordinate rispettivamente $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ con $a, b > 0$.

Il generico punto sarà dunque (x, y, z) e i quadrati delle distanze dai tre vertici saranno

$$\begin{aligned} d_1^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ d_2^2 &= (x-a)^2 + y^2 + z^2 \\ d_3^2 &= x^2 + (y-b)^2 + z^2 \end{aligned}$$

cosicché uguagliando la prima equazione con le altre due risulta

$$\begin{cases} x^2 = (x-a)^2 \\ y^2 = (y-b)^2 \end{cases}$$

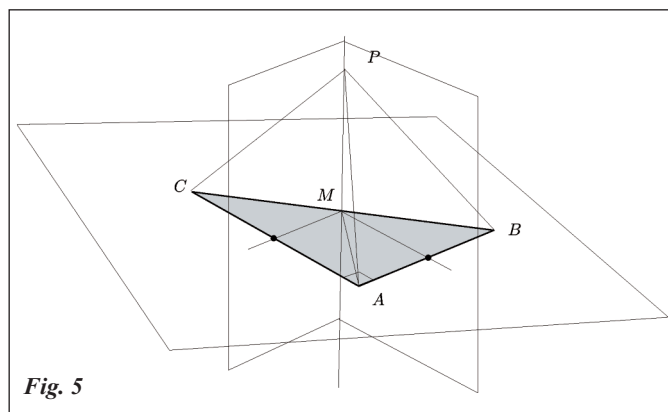
ossia

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}.$$

Siccome, sostituendo i valori trovati, la lettera z si elide, il sistema è indeterminato e z è qualunque. Tutti e soli i punti di ugual distanza sono quindi i punti $(a/2, b/2, z)$ con $z \in \mathbb{R}$ che rappresentano la retta perpendicolare al piano $z = 0$ passante per $(a/2, b/2)$ che è proprio il punto medio dell'ipotenusa.

Versione geometrica. Si veda la Fig. 5 per i dettagli. Siano A, B, C i vertici (A quello dell'angolo retto) e M il punto medio dell'ipotenusa. Sia P un punto sulla retta indicata nel testo.

Siccome, per le note proprietà del triangolo rettangolo, $\overline{AM} = \overline{BM}$, dal teorema di Pitagora discende $\overline{AP} = \overline{BP}$. Ragionando sulla seconda piramide, risulta $\overline{AP} = \overline{CP}$ e quindi le tre distanze sono uguali.



Viceversa, sia P un punto situato a uguale distanza dai tre vertici. Siccome è a uguale distanza da A e da B , esso deve stare sul piano passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB , ed essendo ad uguale distanza da A e da C , deve anche appartenere al piano passante per il punto medio di AC e perpendicolare ad AC . Questi piani non sono paralleli (perché AC e AB non sono paralleli) e si intersecano in una retta perpendicolare al piano dei due segmenti AB e BC , cioè al piano del triangolo. Siccome M è equidistante dai tre vertici, per le note proprietà del triangolo rettangolo, questa retta deve contenere M e quindi è quella indicata nel testo.

10) Non è la A) perché f è crescente, mentre f' risulta anche negativa. Per lo stesso motivo anche la risposta B) è falsa.

Non può essere la C), perché il grafico II ha la concavità dello stesso tipo mentre la sua derivata seconda cambierebbe segno. Non può essere la E) perché f ha un flesso nell'origine ma la derivata seconda non è ivi zero, dunque è la D).

COMMENTO ALLA PROVA

La prova di quest'anno conteneva, accanto ad alcuni elementi tradizionali, alcune difficoltà non trascurabili. Ma esaminiamo in dettaglio i vari esercizi.

Problema 1. Il problema è illustrato in modo puntuale e non contiene elementi tali da indurre in confusione lo studente, a parte la difficoltà contenuta nel punto 4 che vediamo fra un attimo.

A voler essere pignoli, nel primo punto non è chiaro cosa si intenda con «conveniente sistema di riferimento cartesiano», in quanto se le funzioni sono date, esse sono sottoinsiemi di un ben preciso prodotto cartesiano (il termine «sistema di riferimento», a rigore, è più attinente a quantità fisiche). In ogni caso è evidente che lo studente avrebbe a questo punto scelto l'unico possibile e quindi non c'era rischio di confusione su questo punto. La scelta di indicare con due simboli diversi la funzione f e il suo grafico G_f risponde ad un'idea intuitiva di funzione come corrispondenza, anche se insiemisticamente la funzione è il suo grafico, a meno che non si voglia intendere per «grafico» il sottoinsieme dei punti del piano euclideo della Geometria. Anche questa scelta, in ogni caso, non comportava alcuna difficoltà. Il punto 2 richiedeva la soluzione di una equazione di terzo grado, che però ammetteva la soluzione facilmente visibile $x = 1$, e poi la consueta scomposizione con l'algoritmo di divisione dei polinomi tramite la regola di Ruffini. Il resto del punto era facile.

Il punto 3 conteneva una difficoltà, ma solo per uno studente molto pignolo. Sebbene dal grafico risulti evidente, non è affermato né dimostrato che effettivamente la regione R non risulti intrecciata, ossia che G_f e G_g non hanno altri punti di intersezione oltre a $(0,0)$ e $(2,0)$ nell'intervallo considerato $[0,2]$. Usando però la retta $y = -3$ del punto 2 come indicato sopra, anche questo punto era superabile con ragionamenti elementari.

Ben più difficile è la domanda contenuta nel punto 4, per risolvere il quale si doveva ricorrere ad un ragionamento di «decomposizione a fettine» molto usato in Fisica e nelle trattazioni un po' disinvolute del Calcolo integrale. Questa tecnica è di solito sconosciuta o sottaciuta nello svolgimento del programma della scuola secondaria, e si limita tutt'al più alla «dimostrazione» del volume del solido di rotazione ottenuto ruotando il grafico di una funzione positiva, e quindi presentando una decomposizione in dischi sottili anziché in fette a forma di «cracker» come in questo caso. Per una trattazione rigorosa si sarebbe addirittura dovuto richiamare il teorema di Fubini, trattato solitamente nei corsi universitari di Analisi.

Problema 2. Il problema 2, invece, a dispetto del quarto punto che poteva spaventare per la presenza della tabella, si presenta di media difficoltà e ben spiegato.

I primi tre punti sono assolutamente standard e non presentavano alcuna difficoltà ulteriore a quanto viene solitamente trattato nei corsi scolastici. Per quanto riguarda il punto 4, la sua spiegazione è lunga ma ineccepibile: meglio così che una vaga espressione del tipo «funzione approssimante a meno di 10^{-1} » che avrebbe causato notevoli difficoltà interpretative. Oltretutto questo punto ha il pregio di mostrare l'uso che si può fare di una funzione come «modello» per la spiegazione, con una funzione relativamente semplice, di un fenomeno sottostante che potrebbe essere assai complesso.

Questionario. Per quanto riguarda il questionario, i primi quattro quesiti sono semplici (il quarto richiedeva una minima conoscenza del Calcolo combinatorio).

L'esercizio 5 poteva indurre in errore dal momento che 2 è espresso in radianti e quindi corrisponde ad un angolo superiore a $\pi/2$; d'altro canto il corsivo era ben evidente e doveva attirare l'attenzione dello studente.

Simpatico e interessante il quesito 7, di stile «gare di matematica», che richiede un'applicazione intelligente dei teoremi del calcolo differenziale.

Il quesito 8 richiedeva la conoscenza del problema della quadratura del cerchio, solitamente trattato come «problema impossibile» della Matematica. È vero che molti lo conoscono, ma è anche vero che la dimostrazione dell'impossibilità di quadrare il cerchio è al di là della portata di qualunque studente di scuola secondaria (e spesso anche universitario). Anche lo studente più preparato non sarebbe quindi potuto andare oltre una generica enunciazione del fatto che solo nel 1882 si ebbe la dimostrazione definitiva. In ogni caso la domanda era chiara, in quanto chiedeva solo di enunciare il problema.

Un ultimo punto di difficoltà è il quesito 9, in quanto richiede l'analisi di una figura nello spazio non «proiettabile» sul piano (come ad esempio era il quesito 1). Non si tratta di una difficoltà insormontabile, ma certamente pochi studenti avranno avuto gli strumenti necessari per dimostrare l'asserto, almeno per quanto riguarda la versione analitica, più facile concettualmente. Infatti la dimostrazione geometrica, parlando di «luogo geometrico», deve mostrare che la retta data è l'insieme di tutti e soli i punti con la proprietà indicata.

Per mostrare che un punto equidistante dai vertici è sulla retta data nel testo, fa comodo sapere che il luogo dei punti equidistanti da due punti dati nello spazio è il piano passante per il punto medio del segmento congiungente i due punti e perpendicolare ad esso, e questa proprietà, ancorché molto semplice, difficilmente si tratta nei corsi.

Infine, il quesito 10 era abbastanza lungo perché è facile confondere i grafici, ma la sua enunciazione è perfettamente chiara, così come il disegno.

Nel complesso si tratta comunque di una prova alla portata di moltissimi studenti, visto che bastavano uno dei due problemi e 5 quesiti; un po' più difficile, per le difficoltà illustrate, consegnare un compito «perfetto» da 10.

SUGGERIMENTI

Con questa prova si conferma la tendenza in atto già da vari anni dell'abbandono, o del ridimensionamento, dei problemi di Geometria piana a favore della Geometria analitica e l'affermarsi della Geometria solida anche tramite gli strumenti del Calcolo integrale. Benché quest'anno fossero assenti domande relative al Calcolo delle Probabilità, la presenza del quesito sul Calcolo combinatorio deve continuare a suggerire di considerare questo argomento come molto attuale.

Un'altra tendenza in atto, a mio avviso, è quella di una riduzione della difficoltà dello studio delle funzioni: in genere le funzioni delle prove scritte risultano più facili di quelle che spesso si studiano in preparazione dell'esame, anche in considerazione del fatto che mai, negli ultimi anni, si sono avuti problemi nei quali si chiedeva esclusivamente lo studio di una funzione, e quindi, dovendo costruire degli elementi aggiuntivi, lo studio della funzione non può essere predominante.

Dall'altro lato è importante e giusto sottolineare il concetto di approssimazione nell'ambito del calcolo e in quello del grafico: anche se quest'anno non si chiedeva l'applicazione delle formule approssimate di integrali, è bene che l'insegnante non dimentichi concetti quali interpolazioni ed errori di interpolazione, e calcolo approssimato in generale. Inoltre, il quesito sulla quadratura del cerchio suggerisce di non trascurare l'aspetto storico dei problemi, e del valore dei cosiddetti «problemi impossibili», di grande importanza in Matematica.

Una riflessione finale scaturisce dall'esame comparato delle prove degli ultimi anni. È indubbio che la quantità di argomenti sui quali verte la prova di maturità di Matematica sia aumentata notevolmente; a fronte della difficoltà di abbracciare una così vasta gamma di argomenti, si riscontra una minore difficoltà nei vari quesiti. Ciò dovrebbe suggerire all'insegnante di non approfondire eccessivamente l'analisi delle varie tipologie di esercizi, specie se richiedono molti calcoli, ma di ampliare l'orizzonte concettuale con argomenti di tipo più vario. Le parti di teoria dei libri di testo quasi sempre contengono numerosi riferimenti ad argomenti collaterali (spesso concettualmente più interessanti di alcuni esercizi ripetitivi), ma altrettanto spesso vengono saltati a favore degli esercizi «standard». Se poi infine, come è stato annunciato dal Ministero, la terza prova sarà sostituita nei prossimi anni dalle prove INVALSI, la necessità di rivedere profondamente la preparazione di matematica per prova di maturità diventerà un obbligo ancora più pressante.

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del S. Cuore, Brescia

CONSIDERAZIONI CRITICHE SULLA PROVA: CORSO DI ORDINAMENTO

Antonio Marro

Nelle ultime due o tre tornate dell'Esame di Stato il tema di matematica del liceo scientifico non ha presentato per gli studenti eccessivi problemi, né sono seguite allo svolgimento delle prove lamenti di sorta nelle scuole o polemiche sulla stampa, come da tempo accadeva sistematicamente ogni anno. La verità è che, negli ultimi tempi, gli esperti incaricati della stesura dei temi per le prove d'esame sembra abbiano preso la buona abitudine di progettare problemi e quesiti pensando ai candidati, alla loro preparazione effettiva, agli argomenti irrinunciabili dei programmi svolti, alle competenze fondamentali da verificare e non ai problemi e ai questionari fine a se stessi. Ne sono scaturite questioni quasi sempre «fattibili», coerenti con la realtà delle nostre scuole e tali da verificare realmente la preparazione buona o scadente di tutti i candidati.

Le questioni poste quest'anno non sono fuoriuscite dal «corso» intrapreso negli ultimi anni e hanno mantenuto le caratteristiche sopraccitate, a mio avviso assolutamente positive. Sono stato invece colpito dalla formulazione testuale di diversi quesiti, nei quali sono comparse espressioni curiose o sconsigliabili omissioni e il fatto è accaduto con una tale frequenza da fugare i dubbi circa possibili refusi.

In questo scritto si propongono alcuni spunti critici, commenti e considerazioni sui singoli quesiti, specialmente su quelli apparsi più interessanti dal punto di vista didattico-culturale e si esprime un parere sulla loro adeguatezza ai fini dell'esame.

Problema 1. Il problema è ben concepito e ben strutturato, con la proposta di quattro questioni di difficoltà crescente e, come consigliano le indicazioni ministeriali, tra loro indipendenti. Esso appartiene alla tipologia di problemi, lineari nella proposta, non troppo facili né particolarmente difficili e che non richiedono calcoli eccessivi o astrusi. È un problema certamente adatto alla verifica di quelle competenze matematiche di livello medio che tutti i candidati con preparazione dignitosa hanno avuto la possibilità di dimostrare. La sola questione di cui al punto 4 richiedeva intuito, fantasia e capacità di ragionamento più elevate, qualità, queste ultime, che non sono diffuse in tutti i candidati. Le due funzioni,

$$f(x) = x^3 - 4x \text{ e } g(x) = \sin(\pi x),$$

che fanno da «spina dorsale» a tutto il problema, sono funzioni molto comuni (l'argomento πx al posto di x nella funzione $g(x)$ non costituisce per i più una complicazione di grossa entità!) e sono familiari a tutti gli studenti fin dal quarto anno del liceo.

È apparsa un po' curiosa, come accennavo in premessa, la formulazione della prima richiesta: «Fissato un conveniente

sistema di riferimento cartesiano Oxy , si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g ». Una tale formulazione presuppone infatti che il candidato abbia (o debba avere) dimestichezza con altri sistemi di coordinate cartesiane, il che non è affatto detto. La stragrande maggioranza dei candidati, probabilmente, non si sarà neppure posta il problema e non avrà mostrato dubbi sul sistema di riferimento cartesiano da considerare: quello di coordinate cartesiane ortogonali, strettamente e naturalmente connesso con l'equazione $g(x) = \sin(\pi x)$. L'aggettivo «conveniente» – al posto di «ortogonale» – nel contesto in questione – potrebbe essere stato fuorviante, specie per quei candidati più attenti nella lettura del testo dei quesiti. Pertanto, sarebbe stata «più conveniente» una formulazione meno pretenziosa, del tipo: «*Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g nello stesso sistema di riferimento cartesiano ortogonale*».

Un'ultima considerazione sul fatto. Assodato che l'equazione $g(x) = \sin(\pi x)$ rimanda ad un unico sistema di riferimento, quello cartesiano ortogonale, ci si domanda cosa intendesse l'estensore con il termine *conveniente* che, a sua volta, presuppone una scelta tra almeno due alternative. L'unica possibilità di scelta che rimane è quella tra il sistema cartesiano ortogonale *monometrico* e quello *dimetrico*. Ma dove sta la «convenienza»?

Problema 2. Anche questo problema presenta le caratteristiche positive del precedente. Non credo vi siano state per i candidati eccessive difficoltà nel risolverlo, né concettuali né di calcolo. Ovviamente mi riferisco a candidati dalla preparazione dignitosa, che abbiano sufficiente dimestichezza con il ragionamento matematico. La funzione esponenziale, anche se un po' manipolata, dovrebbe essere familiare alla gran parte degli studenti del quinto anno. La questione proposta al punto 4 si fa apprezzare per il riferimento non forzato, né posticcio ad un problema reale. Essa, all'inizio, potrebbe aver disorientato qualche candidato, per la novità e la scarsa consuetudine ad affrontare questioni del genere. Ma chi ha sacrificato qualche minuto per una lettura attenta avrà certamente constatato che le risposte al quesito non presupponevano conoscenze e competenze particolarmente elevate.

Detto degli aspetti positivi del problema, non posso esimermi dal sottolineare qualche aspetto negativo. Nella premessa alle domande si legge: «...dove a e b sono due reali che si chiede di determinare...». Mi domando: perché omettere il sostantivo «numeri» o «parametri» davanti all'aggettivo «reali»?

E ancora. Al punto 2 si legge «*Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy* ».

Di quale sistema di riferimento si sta parlando? La sigla Oxy , infatti, non è sufficiente per connotare un sistema di riferimento, di cui, d'altra parte, non vi è traccia in tutto il testo del problema. Desumo, di nuovo, che si volesse intendere un «sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy ». Può darsi che entrambe le circostanze siano semplici refusi: ma non sono un po' troppi per una traccia ministeriale di Esame di Stato?

Questionario

Quesito 1) È un quesito di media difficoltà, che un candidato mediamente preparato non dovrebbe aver incontrato difficoltà a risolvere.

Quesito 2) Anche questo quesito, piuttosto frequente negli eserciziari in uso, non presentava eccessive difficoltà.

Quesito 3) Il quesito è più difficile dei precedenti, in quanto l'asse di rotazione è quello delle ordinate (negli eserciziari, invece, è più consueta la rotazione rispetto all'asse delle ascisse). Il candidato che è riuscito a risolverlo ha dimostrato, dunque, di possedere buona dimestichezza con il problema dell'integrazione definita.

Quesito 4) Il quesito è piuttosto banale e pertanto avrebbe potuto (forse) essere evitato. Quesiti così facili, infatti, non danno informazioni significative sulla preparazione dei candidati. Essi servono tutt'al più a distinguere quelli che nella loro carriera scolastica si sono imbattuti nel *calcolo combinatorio* da chi ne ignora invece l'esistenza! Si sarebbe almeno potuto richiedere di illustrare, appunto, la proprietà $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ e, magari, di far vedere come e perché, sul piano formale, la notazione $\binom{n}{k}$ perde significato quando $k = 0$ e si è indotti quindi a porre per convenzione $\binom{n}{0} = 1$.

Quesito 5) Nell'intervallo di integrazione $[1, 2]$ la funzione $y = \cos x$ cambia segno. Scoperto il «trabocchetto», la soluzione è molto semplice e immediata. Il quesito è comunque funzionale per la verifica di competenze di livello minimo.

Quesiti 6) e 7) Sono quesiti di «ordinaria amministrazione», nel senso che nella loro risoluzione i candidati non dovrebbero aver avuto problemi. È presumibile, infatti, che nel corso dell'anno scolastico gli studenti effettuino molti esercizi simili. Si tratta di quesiti semplici, adatti alla verifica di conoscenze, abilità e competenze di livello minimo come il precedente.

Quesito 8) È un quesito proposto con chiarezza e adatto alla verifica nei candidati delle conoscenze di elementi di storia della matematica, che nelle ultime Indicazioni ministeriali non sono però previste.

Quesito 9) Si tratta di un buon quesito, soprattutto perché inerente la geometria sintetica dello spazio. È giustamente un quesito semplice: forse perché anche gli estensori del tema d'esame sono consapevoli che si tratta di argomenti generalmente trascurati dai docenti nello svolgimento dei programmi curricolari.

Quesito 10) Il quesito è originale, e si presta bene alla verifica della capacità da parte dei candidati di interpretare il grafico di una funzione f e delle sue derivate f' ed f'' e delle relazioni tra di esse. Desti qualche perplessità, però, la mancanza di rigore nella formulazione del quesito. Alla risposta corretta, infatti, si può pervenire solo per esclusione delle altre

ESAMI CONCLUSIVI

alternative, ma non dall'osservazione diretta della figura. Da essa, appunto, non si evince con certezza che le ascisse delle intersezioni con l'asse delle x del grafico II coincidono con le ascisse dei punti di massimo e di minimo del grafico III. È vero che il ragionamento matematico prevede anche la dimostrazione di una tesi con la verifica della falsità della congettura contraria. Ma, nella fattispecie, sembra fuorviante – e quindi scorretto verso il candidato – non fornirgli tutti i dati necessari per trovare la soluzione del problema senza andare per esclusione. Da questo punto di vista il quesito sembra più un quiz da settimana enigmistica piuttosto che un quesito da tema di un esame di Stato.

CI SONO DA SOTTOLINEARE DUE ASPETTI

Il primo. Sul piano dei contenuti e della struttura, il tema è senza dubbio ben costruito. Le questioni e i quesiti proposti spaziano su tutto il programma generalmente svolto, evitando – come talora non è successo in passato – proposte o richieste assurde. Il tema è equilibrato nelle difficoltà, non eccedendo, generalmente, né sul versante del «difficile» né su quello del «troppo semplice». Le funzioni che fanno da supporto e filo conduttore ai due problemi sono piuttosto comuni, e quindi alla portata di tutti. I quesiti del questionario sono ragionevoli nelle richieste e riferiti alle questioni essenziali del curriculum. Un tema così concepito consente di verificare la preparazione effettiva di tutti i candidati, dai più dotati ai meno bravi. Forse è mancato un riferimento più marcato a situazioni reali.

Il secondo aspetto è meno positivo. Come ho sottolineato in calce alle singole questioni, la formulazione del testo è apparsa talvolta imprecisa e ambigua. La matematica non si compone solo di formule, teoremi, algoritmi: ma soprattutto di ragionamento. Il buon ragionamento si avvale di argomentazioni logiche, di espressioni corrette e complete e di un lessico preciso. Propositioni come «...dove a e b sono due reali che si chiede di determinare...», oppure «Si studi ... la funzione $f(x)$... e se ne tracci il grafico G nel sistema di riferimento Oxy », non sono rigorose perché incomplete: possono quindi portare a interpretazioni controverse. Non si può richiedere il rigore agli alunni, se altrettanto non viene praticato da chi pretende di insegnarglielo.

Antonio Marro, Dirigente Scolastico

