

Matematica

Liceo Scientifico

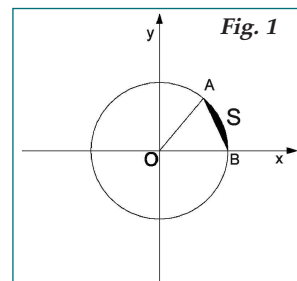
Fausto Minelli

Problema 1

1. L'area richiesta, nel caso riportato nella Fig. 1, è data differenza tra l'area del settore circolare AOB e quella del triangolo

AOB. L'area del settore circolare è pari a $\frac{1}{2}r^2x$. Il triangolo di vertici AOB ha base di lunghezza r e altezza pari a $r|\sin x|$ e quindi la sua area è $\frac{1}{2}r^2|\sin x|$.

Nell'intervallo $[0, \pi]$, dove $\sin x \geq 0$, le aree vanno sottratte mentre in



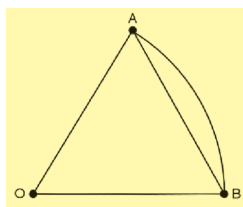
LA TRACCIA MINISTERIALE

MATEMATICA CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).



1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x , da $S(x) = (x - \sin x)$ con $x \in [0, 2\pi]$.

2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r=1$).

3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2 . Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

4. Sia $r=2$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W .

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione

$$f(x) = \log x \quad (\text{logaritmo naturale})$$

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P . Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x . Si dimostri che, qualsiasi sia P , il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?

2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45^\circ$?

E per quale valore di a è $\delta = 135^\circ$?

3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y=1$. Si calcoli l'area di D .

4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x=-1$.

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\sin x$ e il cui grafico passa per il punto $(0, 2)$.

2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

4. "Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

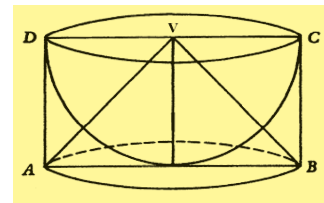
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8. Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

9. Nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.



Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

ESAMI CONCLUSIVI

quello $[\pi, 2\pi]$, dove $\sin x \leq 0$ vanno sommate.

Vale quindi:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot r^2 (x - \text{segno}(\sin x) |\sin x|) = \frac{1}{2} \cdot r^2 (x - \sin x)$$

2. La funzione da studiare è la seguente:

$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x).$$

a) Dominio della funzione: come da richiesta, lo studio va effettuato solamente nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

b) Zeri: per costruzione è $S(x) \geq 0$ e $S(x) = 0$ solo per $x = 0$.

c) Intersezione con asse delle ascisse in $(0,0)$.

d) Positività: funzione positiva in tutto il dominio.

e) Asintoti: non esistono nel dominio in cui è richiesto lo studio di funzione.

f) Crescenza e decrescenza della funzione. La derivata di $S(x)$ è:

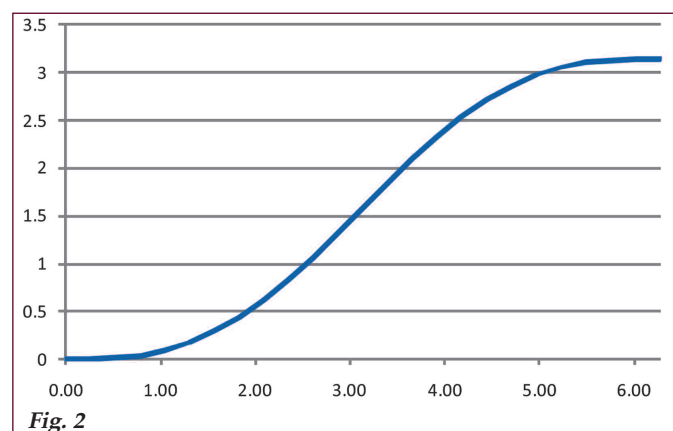
$$S'(x) = \frac{1}{2} r^2 (1 - \cos x)$$

e $S'(x)=0$ solo quando $\cos x=1$ ossia per $x=0$ e per $x=2\pi$. Per $x=2\pi$ la funzione presenta un massimo. Quindi la funzione è crescente nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e ha in $(0,0)$ un punto a tangente orizzontale (minimo assoluto) e in $(2\pi, \pi)$ un massimo assoluto.

g) La derivata seconda è $S''(x) = \frac{1}{2} r^2 \sin x$ il cui segno è positivo nell'intervallo $(0, \pi)$, negativo nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$ e nullo per $x=0$ e $x=\pi$. La funzione è quindi convessa nell'intervallo $(0, \pi)$ e concava nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$ ed ha un punto di flesso in $x=\pi$, di coordinate $(\pi, \pi/2)$. La tangente nel punto di flesso ha equazione:

$$y = \frac{1}{2} \cdot r^2 (2x - \pi).$$

Si riporta nel seguito (v. Fig. 2) il grafico nel caso di $r=1$.



3. Detto $a = 100 \text{ m}^2$ il valore imposto dal testo per l'area del settore circolare, si ha $\frac{1}{2} r^2 x = a$. Il perimetro P del settore è composto da due raggi di lunghezza r e dall'arco di lunghezza rx e quindi $P = r(2 + x)$.

Ottenendo x in funzione di r dalla condizione sull'area si ha:

$$x = \frac{2a}{r^2}$$

$$P(r) = r \left(2 + \frac{2a}{r^2} \right) = 2r + \frac{2a}{r} = 2r + \frac{200}{r}.$$

Questa funzione ha asintoto verticale in $r=0$ e tende a $+\infty$ per $r \rightarrow 0+$ e $r \rightarrow +\infty$. La derivata prima della funzione P , (per $r>0$), è:

$$P'(r) = 2 - \frac{2a}{r^2}$$

il cui segno è negativo nell'intervallo $(0, \sqrt{a}=10)$, positivo nell'intervallo $(\sqrt{a}=10, +\infty)$ e nullo in $r=\sqrt{a}=10$. Essa ha quindi un unico minimo in $\bar{r}=\sqrt{a}=10\text{m}$, che è il valore cercato.

L'angolo corrispondente a tale valore di r si ottiene dalla condizione imposta sull'area, essendo

$$\bar{x} = \frac{2a}{\bar{r}^2} = 2$$

che in gradi è pari a $\bar{\theta} = \frac{360}{\pi} = 114.6^\circ$.

4. Siano $r=2$ e $x=\pi/3$. Supponiamo che il lato OB appartenga ad un asse generico s che, con y , costituisca un sistema di riferimento cartesiano con origine in O . Il punto B ha pertanto coordinate $(2,0)$ mentre l'altezza del triangolo AOB rispetto alla base OB ha piede H di coordinate

$$\left(2 \cos \frac{\pi}{3}, 0 \right) = (1, 0).$$

Indichiamo con $(s,0)$ un generico punto del segmento OB , per $0 \leq s \leq 2$. Utilizzando il principio di Cavalieri, per calcolare il volume V del solido, basterà determinare il valore dell'integrale:

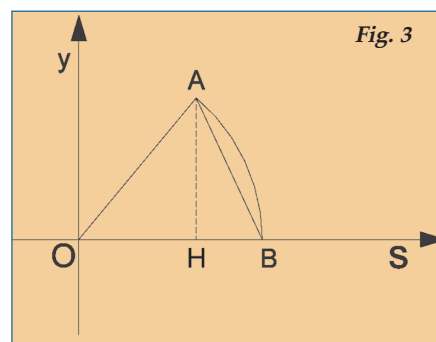
$$V = \int_0^2 \text{Area}(Q(s)) ds$$

dove $Q(s)$ è la sezione quadrata del solido ortogonale al lato OB , passante per il punto di coordinate $(s, 0)$, appartenente ad OB . Il lato di tale quadrato ha due espressioni distinte se $0 \leq s \leq 1$ o $1 \leq s \leq 2$. Il segmento OA è infatti parte della retta di equazione

$$y = \tan \frac{\pi}{3} s = \sqrt{3} \cdot s$$

quindi per $0 \leq s \leq 1$ il lato del quadrato $Q(s)$ è $\sqrt{3} \cdot s$.

L'arco di cerchio AB (Fig. 3) sta nella circonferenza di equazione $s^2 + y^2 = 4$ e quindi per $1 \leq s \leq 2$ il lato di $Q(s)$ è $\sqrt{4-s^2}$.



Si può pertanto determinare il volume richiesto come:

$$V = \int_0^1 3s^2 ds + \int_1^2 (4-s^2) ds = 1 + \left(4 - \frac{7}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

Problema 2

In Fig. 4 è riportato il grafico della funzione:

$$f(x) = \log x.$$

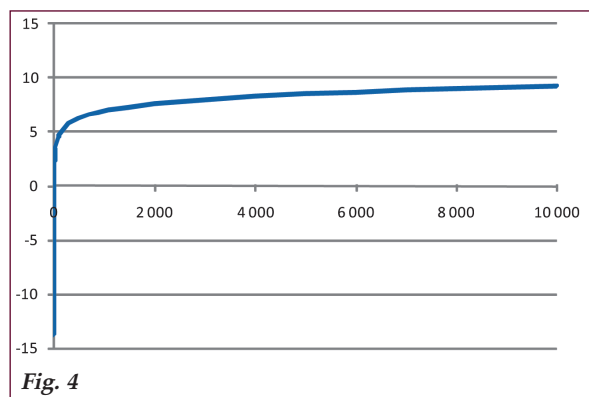


Fig. 4

1. La proprietà di costanza della lunghezza del tratto AB è valida per qualsiasi $a > 0$ e diverso da 1 e quindi in particolare anche per $a = e$. Infatti, la retta tangente alla funzione $\log_a x$ nel generico punto di ascissa x_0 ha equazione:

$$y = \log_a x_0 + \frac{\log_a e}{x_0} (x - x_0)$$

e quindi intercetta l'asse y nel punto $A = (0, \log_a x_0 - \log_a e)$. Il punto B ha coordinate $(0, \log_a x_0)$. La distanza fra i due punti è pari a

$$\overline{AB} = |(\log_a x_0 - \log_a e) - \log_a x_0| = |\log_a e|$$

che non dipende dal punto x_0 . In particolare per $a = e$ si ottiene $\overline{AB} = 1$.

Il grafico della funzione $y = \log_a x$ con $a > 1$ è rappresentato nella Fig. 5.

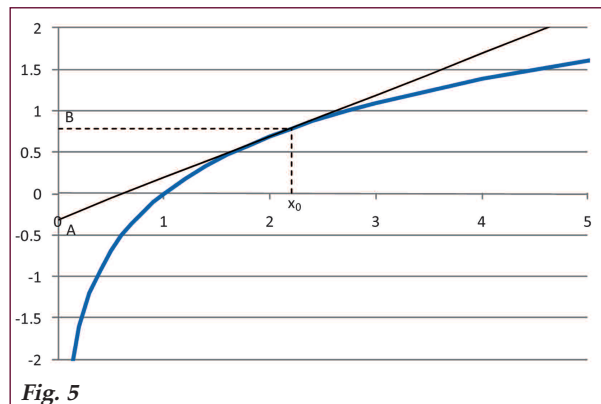


Fig. 5

2. Nel punto di ascissa 1 la retta tangente ha equazione $y = (x-1)\log_a e$.

La pendenza è a 45° quando il coefficiente angolare è $\tan 45^\circ = 1$ e quindi per

$$\log_a e = 1 \Leftrightarrow a = e.$$

La pendenza è 135° quando il coefficiente angolare è $\tan 135^\circ = -1$, e quindi per

$$\log_a e = -1 \Leftrightarrow a = 1/e.$$

3. Il grafico G_f ha equazione $y = \log x$ o, in modo equivalen-

te ma più idoneo ai fini del calcolo, $x = e^y$. Invertendo, infatti, gli assi coordinati l'area non cambia e quindi per il calcolo si può effettuare l'integrazione con y come variabile indipendente (v. Fig. 6). Essa è pari a:

$$Area = \int_0^1 e^y dy = e - 1.$$

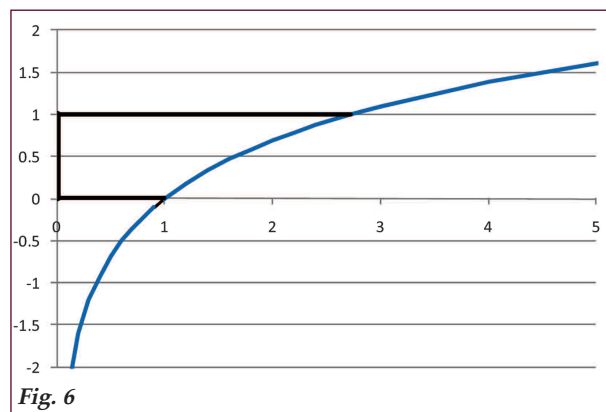


Fig. 6

4. Occorre calcolare l'area della corona circolare di raggio interno 1 e raggio esterno pari a $e^y + 1$.

Appare utile l'utilizzo della formula di Pappo per il volume dei solidi di rotazione. Trasliamo l'asse y a sinistra di una unità (lasciando quindi inalterato il volume), considerando la nuova variabile $s = x + 1$. L'equazione di G_f in queste variabili è

$$x = e^y \Leftrightarrow s = e^y + 1.$$

Detta S la regione del piano sy delimitata dalle rette $y = 1$, $y = 0$, e dal grafico delle due funzioni $f(y) = e^y + 1$ e $g(y) = 1$, il volume V ottenuto mediante la rotazione di S attorno all'asse $s = 0$ è pari a:

$$V = \int_0^1 \pi (f^2(y) - g^2(y)) \cdot dy = \pi \int_0^1 ((e^y + 1)^2 - 1) \cdot dy = \pi \left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{5}{2} \right).$$

Il volume cercato, in altri termini, è dato dalla differenza del solido ottenuto dalla rotazione della funzione $s(y)$ intorno al nuovo asse x ed il cilindro di raggio e altezza unitario.

Commenti al testo

I due problemi proposti sono semplici e coerenti con il programma. Gli stessi studenti li hanno trovati sufficientemente agevoli e in linea con le attese.

La parte analitica, soprattutto relativa allo studio di funzione, ancora una volta è predominante rispetto a quella dedicata al calcolo di integrali d'area o di volumi a partire dalla funzione studiata.

La parte geometrica spesso richiede, anche se non in

ESAMI CONCLUSIVI

maniera esplicita come in altre occasioni, una visualizzazione grafica che può costituire aiuto per lo studente meno intuitivo. Dal disegno dei volumi o delle aree da calcolare, lo studente infatti può acquisire la competenza e le tecniche di calcolo più adeguate e semplici per risolvere il problema.

Ancora una volta viene proposto un problema parametrico di minimo/massimo, in perfetta sintonia con una prassi ormai consolidata, purtroppo alquanto ripetitiva.

L'applicazione dei problemi di minimo e massimo è infatti ben più vasta e variegata di quanto proposto dalle tracce negli ultimi anni, che si limitano per l'appunto ad una procedura di calcolo ormai standard, a partire dalla funzione studiata, con l'inserimento di un parametro da discutere.

Come per la traccia dello scorso anno, non è possibile certamente affermare che trattasi di testi innovativi né tantomeno originali.

I due problemi sono altresì molto simili tra loro nello sviluppo e, soprattutto il secondo, non offre elementi da cui rilevare capacità critica e di calcolo dello studente.

La proposta di tracce in cui possa emergere la criticità dello studente, nel senso di proporre soluzioni di calcolo più efficaci e veloci, dovrebbe essere invece perseguita proprio per premiare l'abilità e l'intuizione dello studente.

Quesiti

1. Le funzioni la cui derivata è $\sin x$ sono tutte e sole le funzioni primitive della forma:

$$f(x) = \int_0^x \sin x dx + c = -\cos x + c$$

con c una costante arbitraria. Imponendo, come fornito nel testo, che $f(0)=2$ si ha che $-1+c=2$ e quindi $c=3$.

La funzione cercata è pertanto

$$f(x) = 3 - \cos x.$$

2. Tra le funzioni suriettive, la seguente $1 \rightarrow a$, $2 \rightarrow b$, $3 \rightarrow c$ e $4 \rightarrow c$, lo è. Non possono esistere funzioni iniettive da A a B perché questo implicherebbe che la cardinalità di B sia maggiore o uguale a quella di A. Avendo A quattro elementi mentre B solo tre, questo è impossibile (la cardinalità di A è 4 mentre quella di B è 3). Non esistono neanche funzioni biiettive da A a B in quanto in particolare esse sarebbero anche iniettive.

3. La curva rappresenta il grafico di un polinomio di terzo grado. Essendo la funzione differenziabile, basta determinare il numero di zeri della derivata, e quindi risolvere:

$$y' = 3x^2 + 2kx + 3 = 0.$$

Questa equazione di secondo grado ha una sola soluzione (due radici reali coincidenti) se e solo se il suo discriminante è nullo, e questo significa che:

$$4k^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3$$

che sono dunque i due unici valori cercati.

4. L'affermazione è falsa. Mostriamo che non esistono poliedri regolari le cui facce (identiche) siano esagoni.

Consideriamo un suo angolo diedro. In esso devono concorrere almeno tre facce. Tuttavia gli angoli di un esagono regolare sono tutti uguali a 120° e quindi la somma degli (almeno) tre angoli concorrenti in uno spigolo è 360° , cioè l'angolo giro. Questo significa che le tre facce giacciono su uno stesso piano e non possono quindi appartenere ad un poliedro convesso regolare.

Nel caso in cui l'affermazione sia equivalente a *Esiste ed è unico un poliedro regolare le cui facce sono esagoni* allora l'affermazione risulta falsa, in quanto non ne esiste alcuno.

5. L'unica espressione a cui è attribuibile un valore numerico è la seguente:

$$\frac{0}{1} = 0$$

Le altre espressioni sono scritte a cui è possibile di volta in volta attribuire significati arbitrari e convenzionali che dipendono dal contesto oppure da convenzioni di scrittura esplicitamente enunciate. Sono pertanto considerate forme indeterminate. In particolare, $0/0$ dovrebbe essere unicamente determinato dalla condizione $0 = x \cdot 0$ il che è chiaramente vero per ogni x , e quindi l'espressione è indeterminata. L'espressione $1/0$ invece è impossibile in quanto non esiste alcun numero reale x per cui $1 = x \cdot 0$. Infine 0^0 non è definita per le proprietà delle potenze (per $a > 0$), $a^0 = 1$ e $0^a = 0$ sarebbero in contraddizione. È tuttora oggetto di ampia discussione nel panorama della ricerca matematica.

6. Si ha, raccogliendo x nella radice e estraendolo dalla stessa:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1.$$

7. Basta applicare la definizione di coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{k+1}$$

essendo $(n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$ possiamo semplificare $n-k > 0$ nella seconda espressione. Si ottiene pertanto:

$$\binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(k+1)!(n-k-1)!}$$

ed essendo anche $k!(k+1) = (k+1)!$ Si ottiene l'espressione di

$$\binom{n}{k+1}.$$

8. Non potendo risolvere direttamente l'equazione, si deve procedere studiando la funzione. Si osserva che la funzione $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$ è continua e derivabile, assume il valore 1 per $x=0$ e -2009 per $x=-1$. Il teorema degli zeri assicura quindi l'esistenza di una soluzione.

Per mostrare l'unicità utilizziamo il teorema di Rolle. Se vi

ESAMI CONCLUSIVI

fossero due zeri interni all'intervallo $(-1,0)$ la derivata si annullerebbe. Tuttavia la derivata di f è sempre positiva: $f'(x) = 2009 x^{2008} + 2009 \geq 2009 > 0$ (essendo 2008 una potenza pari). La funzione f è strettamente crescente in tutta la retta reale.

9. Si faccia riferimento alla figura del testo. Si deve mostrare che per ogni piano orizzontale le sezioni delle due figure con il piano hanno medesima area. Sia dunque r il raggio della sfera e h un numero soddisfacente $0 \leq h \leq r$.

Il piano ad altezza h taglia il cono in un cerchio di raggio $r - h$ e quindi di area:

$$\pi (r - h)^2.$$

Lo stesso piano taglia la scodella in una corona circolare, il cui raggio esterno è r e di cui vogliamo calcolare il raggio interno r_1 . A questo scopo basta ridursi a un problema planare: il cerchio ottenuto sezionando con un piano verticale fornito di coordinate cartesiane xOy ha equazione:

$$x^2 + (r - y)^2 = r^2$$

e quindi il raggio interno r si ottiene risolvendo rispetto ad x l'equazione con $y = h$, ottenendo:

$$r_1 = \sqrt{r^2 - (r - h)^2}.$$

L'area della corona circolare è data dalla differenza $\pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r - h)^2$, ed è quindi uguale a quella della sezione ad altezza h del cono.

10. Il periodo di una funzione è definito come il minimo numero (se esiste) T per cui è verificato che

$$f(x) = f(x + T) \text{ per ogni } x \text{ reale.}$$

Poiché $\cos(5x) = \cos(5x + 2\pi) = \cos[5(x + 2\pi/5)]$ e quindi

$$f(x) = f(x + 2\pi/5),$$

si ha immediatamente che $T = 2\pi/5$.

Commento ai quesiti

I quesiti proposti nella prova d'esame sono abbastanza vari e articolati e, come più volte sottolineato, richiedono l'applicazione di conoscenze e abilità riguardanti argomenti svolti nell'intero ciclo quinquennale del liceo.

Vengono posti in modo chiaro e conciso.

I quesiti 1, 3, 6 e 10 sono molto semplici e risolvibili in pochi passaggi matematici. Sono di fatto funzionali alla verifica delle abilità minime dello studente.

Buona l'idea di proporre Galileo attraverso una delle sue innumerevoli dimostrazioni di applicazione pragmatica della matematica, con il quesito 9. Di fatto viene fornito un aiuto determinante, al fine della risoluzione, riferito al principio di Cavalieri.

Il quesito 7 potrebbe essere risultato ostico per molti studenti che non hanno affrontato nel corso di studi le proprietà dei coefficienti binomiali.

Il quesito 5 risulta semplice una volta richiamata la teoria dei limiti, anche se meno intuitive e più articolate possono essere le motivazioni da apportare a supporto del valore for-

nito, il che è aspetto squisitamente teorico che può mettere in luce abilità specifiche.

I quesiti 2 e 4 vanno a toccare conoscenze non dell'ultimo anno, anche se non risultano particolarmente ostici una volta noti i concetti di funzione suriettiva e di diedro.

Infine, il quesito 8 risulta agevole anche se va supportato da conoscenze teoriche di livello medio.

In prospettiva

Come già sottolineato in precedenza, l'esame di Stato così come organizzato risulta consolidato nella sua struttura, con richieste che spesso appiattiscono il livello culturale dello studente non rendendo individuabile il percorso diversificato degli studenti a livello di profondità e comprensione dei singoli argomenti.

Un testo più articolato, e soprattutto con richieste più differenziate che mettano in luce gli effettivi valori e livelli di preparazione degli studenti, sarebbe anche di stimolo per l'istituto scolastico, teso ad un approfondimento ed a un miglioramento dell'offerta didattica e formativa.

Per quel che concerne gli studenti, l'esperienza di questi ultimi anni consiglia una forte preparazione sugli studi di funzione, argomento principe dell'ultimo anno di didattica, con spesso calcolo di aree e volumi con l'utilizzo di integrali.

Lo studio di funzione va preparato in maniera dettagliata, analitica e scrupolosa, e si consiglia di eseguirlo per punti, occupandosi del dominio, delle intersezioni con gli assi, dei limiti, degli eventuali asintoti, del segno della funzione, dei massimi e minimi e dei punti di flesso. Tale studio non deve essere puramente astratto: spesso infatti le funzioni proposte sono piccole variazioni di curve fondamentali che lo studente deve saper riconoscere e disegnare in maniera immediata grazie al *background* di conoscenze acquisite durante il corso di studi. Lo studente brillante conosce quindi l'andamento qualitativo della funzione, nella maggioranza dei casi, prima ancora di ricorrere allo studio dettagliato della stessa.

Si consiglia pertanto allo studente di ipotizzare un andamento qualitativo, ove possibile e fattibile, in maniera da guidare lo studio analitico della funzione per ovviare ad errori macroscopici che spesso si verificano per disattenzione o banali errori di calcolo.

Fausto Minelli
Università degli Studi - Brescia