Matematica
Liceo scientifico

Enrico Gregorio

La trattazione del testo di esame che presento è rivolta agli insegnanti più che agli studenti; per esempio, negli studi di funzione eviterò l'usuale schematismo limitandomi agli aspetti essenziali, non fornirò alcuna figura e tralascerò i passaggi algebrici elementari. Un aspetto didattico sul quale però intendo far porre attenzione è la possibilità di semplificare i calcoli: quando si ha a che fare con un problema di massimo o minimo, le costanti additive o moltiplicative possono essere tralasciate; in altri casi è possibile fare opportune posizioni per facilitare i calcoli.

Problema 1

a) Se poniamo $4\mu = \lambda$ e denotiamo con $\mu - x$ e $\mu + x$ le lunghezze di base e altezza del rettangolo, l'area è espressa dalla quantità

$$A(x) = (\mu - x)(\mu + x) = \mu^2 - x^2$$

definita per $0 \le x \le \mu$ e che ha un massimo in 0.

b)-*c*) Se indichiamo con $2\pi x$ la lunghezza della circonferenza, il perimetro del quadrato sarà $\lambda - 2\pi x$. Con queste nota-

LA TRACCIA MINISTERIALE

Matematica

CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Problema 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\dfrac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Questionario

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 *g*, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 *cm* e margini laterali di 2 *cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo [0,1]? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$
8. La funzione $f(x) = tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. La funzione $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \dfrac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$.
Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

zioni, la funzione da rendere minima o massima è

$$S(x) = \pi x^2 + \left(\frac{\lambda - 2\pi x}{4}\right)^2.$$

Visto che ci sono denominatori, è conveniente considerare $f(x) = 16 \cdot S(x)$. Con facili passaggi algebrici si ha

$$f(x) = 16\pi x^2 + \lambda^2 - 4\lambda\pi x + 4\pi^2 x^2 = 4\pi(4+\pi)x^2 - 4\lambda\pi x + \lambda^2,$$

di nuovo il ramo di una parabola definito dalla condizione $0 \leq 2\pi x \leq \lambda$, cioè $0 \leq x \leq \lambda/(2\pi)$. L'asse di questa parabola ha equazione

$$x = \frac{\lambda}{2(4+\pi)} \qquad \left(\frac{\lambda}{2(4+\pi)} < \frac{\lambda}{2\pi}\right),$$

quindi il minimo si ottiene in corrispondenza del vertice, cioè quando la circonferenza ha lunghezza

$$\frac{\lambda\pi}{(4+\pi)}.$$

Dal momento che la funzione non ha altri punti di estremo interni all'intervallo di definizione, assume il massimo alla frontiera dell'intervallo; dunque calcoliamo

$$f(0) = \lambda^2, \quad f\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = \frac{4}{\pi}\lambda^2.$$

Poiché $4/\pi > 1$, il massimo è assunto quando $x = \lambda/(2\pi)$, cioè quando il filo è usato solo per delimitare la circonferenza.
Se infine indichiamo con x, y e z le dimensioni del parallelepipedo originale, le dimensioni del parallelepipedo più grande sono $11x/10$, $11y/10$ e $11z/10$. Il volume del parallelepipedo sarà perciò $11^3 xyz/1000 = 1331xyz/1000$ che quindi vede un aumento di $331/1000$ rispetto al volume originale, cioè del 33,1%.

Problema 2

Studiamo direttamente la funzione h, visto che gli zeri daranno le soluzioni del punto 1. Il dominio di h è l'insieme dei reali positivi. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = \begin{cases} -\infty, \text{ se } a>0, \\ +\infty, \text{ se } a\leq 0 \end{cases}$$

LA TRACCIA MINISTERIALE

Matematica

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.
a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?
Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:
b) la somma delle due aree sia minima?
c) la somma delle due aree sia massima?
Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Problema 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.
1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $x\,\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Questionario

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.
4. Si dimostri che l'equazione sen $x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. *Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: «*che cos'è la probabilità?*» era solito rispondere: «*la probabilità non esiste!*». Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?
8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Il secondo limite si calcola tenendo conto che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{ax^2}=0,$$

per $a\neq 0$. La funzione h è ovunque derivabile, con derivata

$$h'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}.$$

Nel caso di $a = 0$ la funzione è l'usuale funzione logaritmica che non ha asintoti obliqui.

Non ne esistono nemmeno per $a\neq 0$, perché

$$\lim_{x\to+\infty}|h'(x)|=+\infty.$$

Per $a\leq 0$ la derivata è ovunque positiva, dunque la funzione è crescente e incontra l'asse delle ascisse in un unico punto, soluzione dell'equazione $\log x = ax^2$.

Per $a>0$, la derivata assume valori positivi nell'intervallo $(0;1/\sqrt{2a})$ e negativi nell'intervallo $(1/\sqrt{2a};+\infty)$. Perciò ha un massimo in $1/\sqrt{2a}$ e

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=-\frac{1}{2}\log(2a)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(\log(2a)+1)=-\frac{1}{2}\log(2ae).$$

Se $\log(2ae) > 0$, cioè $a > 1/(2e)$, la funzione non assume valori positivi. Se $0 < a < 1/(2e)$ la funzione assume valori positivi e si annulla in due punti. Infine, se $a = 1/(2e)$, il massimo della funzione vale 0 ed è questo il caso in cui i grafici di f e g sono tangenti.

Infatti la soluzione dell'equazione è $x = 1/\sqrt{2a} = \sqrt{e}$; le tangenti alle curve $y = \log x$ e $y = x^2/(2e)$ in questo punto hanno equazioni

$$y-\log\sqrt{e}=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e}),\qquad y-\frac{(\sqrt{e})^2}{2e}=\frac{2\sqrt{e}}{2e}(x-\sqrt{e})$$

che sono effettivamente le stesse. Non ci può essere tangenza in altri casi per come sono la concavità e convessità delle due curve.

Lo studio della derivata seconda è semplice, essendo

$$h''(x)=-\frac{1}{x^2}-2a=-\frac{1+2ax^2}{x^2}$$

che assume solo valori positivi per $a \geq 0$, mentre per $a < 0$ la funzione presenta un flesso in $x = 1/\sqrt{-2a}$, dove vale

$$-\frac{1}{2}\log(-2a)-1$$

che è positivo per $\log(-2a) <-2$, cioè $-2a < e^{-2}$, quindi per $a < -e^{-2}/2$.

Per $a = 1 > 1/(2e)$, si ha $f(1) = \log 1 = 0$, $g(1) = 1^2 = 1$ e $f(2) = \log 2$, $g(2) = 4$. L'area compresa fra le linee proposte dal problema si calcola come la differenza di due integrali:

$$A=\int_1^2 x^2\,dx-\int_1^2\log x\,dx.$$

Ricordando che una primitiva di $\log x$ è $x\log x - x$ e che una primitiva di x^2 è $x^3/3$, il teorema fondamentale del calcolo integrale porge

$$A=\left[\frac{x^3}{3}-x\log x+x\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}-2\log 2+2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\log 1+1\right)=$$

$$=\frac{10}{3}-2\log 2.$$

Nel problema per il PNI, occorre considerare i punti di intersezione delle due curve con le rette date: $f(x) = -1$ per $x = e^{-1}$, $f(x) = -2$ per $x = e^{-2}$; $g(x) = -1$ per $x = 1/e$, $g(x) = -2$ per $x = \sqrt{2}/e$. Nel punto di coordinate $(e^{-1}, -1)$ le due curve si incontrano.

Conviene ricorrere al calcolo dell'integrale lungo il contorno percorso in senso orario:

$$\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}\log x\,dx+\int_{1/e}^{\sqrt{2}/e}-e^2x^2\,dx+\int_{\sqrt{2}/e}^{e^{-2}}-2\,dx=$$

$$\Big[x\log x-x\Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}}+\left[\frac{-e^{-2}x^3}{3}\right]_{1/e}^{\sqrt{2}/e}+\Big[-2x\Big]_{\sqrt{2}/e}^{e^{-2}}=\frac{4\sqrt{2}-5}{3e}+\frac{1}{e^2}.$$

Questionario

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

È necessario valutare il numero di chicchi richiesti. Per $a \neq 1$ vale l'identità

$$1+a+\ldots+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$$

e quindi il numero di chicchi è $2^{64} - 1$. Poiché 1000 chicchi pesano 38g, basterà calcolare

$$P=\frac{2^{64}-1}{1000}\cdot 38\cdot 10^{-6}=\frac{(2^{64}-1)\cdot 38}{10^9}.$$

Il modo più semplice per valutare questa espressione, dovendo lavorare senza calcolatore, è di trovarne il logaritmo decimale. È evidente che possiamo prendere, come numero dei chicchi, 2^{64} e quindi

$$\log_{10}P=64\log_{10}2+\log_{10}38-9\approx$$
$$\approx 64\cdot 0{,}30103+1{,}57978-9=11{,}84570$$

che dà, approssimativamente, $P = 0{,}70097\cdot 10^{12}$ cioè circa settecento miliardi di tonnellate.

2. I poliedri regolari – noti anche come solidi platonici – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Il quesito richiede una dimostrazione tutt'altro che alla portata di uno studente liceale. La più semplice dimostrazione rigorosa di questo enunciato usa la formula di Euler per i poliedri convessi: se V è il numero dei vertici, L il numero degli spigoli e F il numero delle facce, allora

$$V-L+F=2.$$

Si può trovare la dimostrazione sull'aureo libro di Richard

Courant e Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Bollati-Boringhieri.

3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di $50\,\text{cm}^2$, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

Sia x la larghezza dell'area di stampa. L'altezza sarà allora $50/x$ e l'area del foglio sarà

$$(x+4)\left(\frac{50}{x}+8\right)=8x+\frac{200}{x}+82.$$

La funzione da rendere minima è dunque

$$f(x)=x+\frac{25}{x}$$

perché l'addendo 82 e il fattore 8 possono essere trascurati. Si ha allora

$$f'(x)=1-\frac{25}{x^2}$$

che dà immediatamente un minimo per $x = 5$. Le dimensioni del foglio sono dunque: larghezza 9 cm e altezza 18 cm.

4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

La diagonale del cubo è uguale al diametro della sfera, cioè un metro. Il lato del cubo si ottiene dividendo la diagonale per $\sqrt{3}$ e quindi il volume del cubo, in metri cubi, è $(1/\sqrt{3})^3 = 1/\sqrt{27}$. Poiché un litro equivale a un decimetro cubo, la capacità del serbatoio è di $1000/\sqrt{27}$ litri, approssimativamente 192,45 litri.

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

Non occorre ricordare la formula del binomio. Se scriviamo

$$(a+b)^n = c_0a^0b^n + c_1a^1b^{n-1} + \cdots + c_{n-1}a^{n-1}b^1 + c_na^nb^0,$$

si ottiene la somma dei coefficienti ponendo $a = b = 1$ e quindi

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1} + c_n = (1+1)^n = 2^n.$$

6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k+2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Scriviamo l'equazione come $k(5-\cos 2x) = 2$ e osserviamo che $5-\cos 2x > 0$ per ogni x.
Inoltre, $\pi/12 < x < \pi/4$ equivale a $\pi/6 < 2x < \pi/2$. Il coseno è decrescente nell'intervallo $[\pi/6,\pi/2]$ e quindi la funzione $f(x) = 2/(5-\cos 2x)$ è decrescente. Basta quindi calcolare

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{10-\sqrt{3}},\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{5}$$

per concludere che il problema ammette una e una sola soluzione per

$$\frac{2}{5}<k<\frac{4}{10-\sqrt{3}}.$$

7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo [0,1]? Se sì, trova il punto ξ che compare nella formula

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Una funzione derivabile in tutto l'asse reale soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in ogni intervallo chiuso. Poiché $f(1) = -1$ e $f(0) = 0$, occorre trovare un punto in [0,1] in cui $f'(x) = -1$, cioè $3x^2 - 4x = -1$. Le soluzioni di questa equazione sono 1 e 1/3, il punto richiesto è $\xi = 1/3$; l'altra soluzione non è ammissibile, perché il punto richiesto deve appartenere all'intervallo aperto (0,1).

8. La funzione $f(x) = \tan x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I=\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

Si ha $\tan(\pi/4) = 1$ e $\tan(3\pi/4) = -1$; inoltre $\tan x = 0$ solo per x multiplo intero di π e nessun multiplo di π appartiene all'intervallo dato.

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

No. Ciò che si sa del dominio D della funzione è che $0 \in D$. Se si sapesse anche che il dominio è un intervallo, potremmo ragionare in questo modo: calcoliamo la derivata della funzione $g(x) = e^{-x} f(x)$, anch'essa definita in D. Otteniamo

$$g'(x) = -e^{-x} f(x)+e^{-x} f'(x) = e^{-x}(-f(x) + f'(x)) = 0.$$

Per il teorema di Lagrange, una funzione definita su un intervallo, derivabile all'interno e con derivata nulla, è costante. Quindi sappiamo che $g(x) = e^0 f(0) = 1$ per ogni $x \in D$ e dunque che $f(x) = e^x$, per ogni $x \in D$.
Tuttavia la funzione così definita:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{per } x \in [-1,1],\\ ke^x, & \text{per } x \in [2,4],\end{cases}$$

soddisfa la richiesta del problema per ogni k reale e non nullo.

10. La funzione $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4}{3}\pi$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Poiché f è ovunque derivabile e il suo dominio è l'asse reale, in un punto di estremo relativo la sua derivata è nulla. Dunque le due condizioni sono

$$f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0, \qquad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

cioè, dopo aver eliminato i denominatori,

$$-a+\sqrt{3}b = 0, \qquad \sqrt{3}a - b = 2$$

con la soluzione $a = \sqrt{3}$, $b = 1$. Dunque la funzione è

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sin x+\cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

che ha come minimo periodo 2π.

Quesiti dal PNI

[3PNI]. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

Il modo più semplice di affrontare questo problema è di considerare il simmetrico B' di B rispetto alla retta r e considerare il segmento AB'. Sia D un punto qualunque sulla retta r diverso dall'intersezione C di AB' con r e si consideri il triangolo ADB': per esso avremo che $AD+DB' > AB'$, per la nota disuguaglianza triangolare. Ne segue che $AD+DB > AB' =$ $= AC+CB' >= AC+CB$. Dunque il percorso minimo è quello che passa per C.
Se chiamiamo a e b le distanze di A e B dalla retta r e c la distanza fra le proiezioni A_r e B_r di A e B su r , la semplice considerazione dei triangoli simili AA_rC e $B'B_rC$ fa dedurre che il punto C ha distanza $ac/(a + b)$ da A_r : infatti, chiamando x la distanza di C da A_r vale la proporzione $a/x = b/(c - x)$.

[4PNI]. Si dimostri che l'equazione $\sin x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

Si consideri la funzione $f(x) = \sin x-(x-1) = 1-x+\sin x$. La sua derivata è $f'(x) = -1+\cos x$, quindi $f'(x) \leq 0$, per ogni x, e la funzione f è quindi decrescente. Siccome $f(\pi/2) =$ $= 2- \pi/2 > 0$ e $f(\pi) = 1-\pi < 0$, il teorema degli zeri garantisce l'esistenza di una soluzione α che quindi è unica.
Poiché $\alpha = 1+\sin\alpha$, un metodo di approssimazione è di iterare il calcolo di $1+\sin x$: si pone $a_0 = 2$ (perché $\pi/2 < 2 < \pi$), $a_1 = 1+\sin 2$ e, in generale, $a_{n+1} = 1+\sin a_n$. Con sei iterazioni si ottiene il valore esatto alla terza cifra decimale 1,934 e con dieci il valore esatto alla quinta cifra decimale 1,93456:

$a_0 = 2{,}000000$	$a_4 = 1{,}935671$	$a_8 = 1{,}934581$
$a_1 = 1{,}909297$	$a_5 = 1{,}934168$	$a_9 = 1{,}934557$
$a_2 = 1{,}943253$	$a_6 = 1{,}934704$	$a_{10} = 1{,}934565$
$a_3 = 1{,}931436$	$a_7 = 1{,}934513$	$a_{11} = 1{,}934562$.

[7PNI]. Bruno de Finetti (1906–1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: «Che cos'è la probabilità?» era solito rispondere: «La probabilità non esiste!». Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Il quesito non richiede né una verifica né una dimostrazione, si vedano i commenti più avanti. Riporto un paio di osservazioni al riguardo.
Scrive Robert F. Nau della Duke University: «La concezione di de Finetti è che la probabilità di un evento non è un dato oggettivo. La probabilità è soggettiva e va misurata con la quota (nel senso degli allibratori) rispetto alla quale l'osservatore sarebbe disposto a scommettere su un dato evento; questa quota può dipendere anche dalle convinzioni e dalle aspettative dell'osservatore». (R.F. Nau, *De Finetti was right: probability does not exist,* Theory and Decision 51 (2001), 89–124.)
Così invece Bruno de Finetti: «The numerous, different, opposed attempts to put forward particular points of view which, in the opinion of their supporters, would endow Probability Theory with a 'nobler' status, or a more 'scientific' character, or 'firmer' philosophical or logical foundations, have only served to generate confusion and obscurity, and to provide well-known polemics and disagreements, even between supporters of essentially the same framework». (B. de Finetti, *Theory of Probability,* New York 1974, p. xi.)

[8PNI]. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 99\%$ di colpirlo almeno una volta?

La probabilità che il tiratore non colpisca con un tiro il bersaglio è 0,7; quindi la probabilità che non colpisca mai il bersaglio in n tiri è $q_n = 0{,}7^n$. Perciò la probabilità che colpisca almeno una volta il bersaglio in n tiri è $1-q_n$. Siccome desideriamo che questa probabilità sia $\geq 0{,}99$, dovremo avere

$$1-0{,}7^n \geq 0{,}99, \text{ cioè } 0{,}7^n \leq 0{,}01,$$

e quindi $n \log 0{,}7 \leq \log 0{,}01$, cioè

$$n \geq \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}7} \approx 12{,}91$$

e quindi il numero di tiri richiesto è 13.

[10PNI]. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1},$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

L'uguaglianza discende dal fatto che arctan x è una primitiva di $1/(1+x^2)$; inoltre $\arctan 1 = \pi/4$ e $\arctan 0 = 0$.
Il calcolo tramite un metodo di integrazione numerica èmolto lungo: con una suddivisione in quattro parti uguali, il metodo dei rettangoli non fornisce nemmeno la parte intera esatta. Con la stessa suddivisione, il metodo dei trapezi dà la prima cifra decimale esatta.

Note ai quesiti

1. Usando un programma di calcolo più potente, si può calcolare il valore 'esatto' P = 700976274800,96296137. Non ha molto significato, visto che la precisione della stima di 38g per 1000 chicchi di grano non è conosciuta. I due risultati combaciano con una differenza di due milioni di tonnellate. Sembra molto, ma è un errore di meno dello 0,00029%, molto meno sicuramente della stima del peso dei chicchi.
Si può affrontare il problema con un'altra approssimazione: ricordando che $2^{10} = 1024$, avremo $2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 \approx 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18}$. Quindi possiamo approssimare

$$P \approx 16 \cdot 10^{18} \cdot 38 \cdot 10^{-9} = 608 \cdot 10^9.$$

Il risultato ha un errore di 100 miliardi di tonnellate che, in percentuale sul valore vero, è del 14%. Più che sufficiente nel caso si volesse solo far rilevare l'enormità della richiesta del leggendario inventore.

2. Sono apparse sui giornali molte 'soluzioni' di questo quesito con un ragionamento che procede in questo modo: si chiama n il numero dei lati di ogni faccia e k il numero di facce che si incontrano in un vertice, dove $n \geq 3$ e $k \geq 3$; gli angoli interni delle facce sono di ampiezza $(n-2)\pi/n$ e quindi si deve avere

$$k\,\frac{(n-2)\pi}{n} < 2\pi$$

cioè

$$1-\frac{2}{n} < \frac{2}{k}.$$

Una condizione imposta da questo è che $1-2/n < 2/3$, perché quando k aumenta, $2/k$ diminuisce; ne otteniamo che $n < 6$.
Per $n = 3$ questo dà $2/k > 1/3$, cioè $k < 6$; quindi sono accettabili i valori $k = 3$, $k = 4$ e $k = 5$. Per $n = 4$ questo dà $2/k > 1/2$, cioè $k < 4$ che forza $k = 3$. Per $n = 5$ si deve avere $2/k > 3/5$, cioè $k < 10/3$ e quindi $k = 3$.
Otteniamo dunque solo cinque combinazioni possibili. Tuttavia c'è un'obiezione a questo modo di ragionare: abbiamo solo dimostrato che ci sono solo cinque tipi di angoloidi che danno origine a poliedri regolari. Nel caso di $n = 3$ e $k = 3$, l'intuizione spaziale è chiara e porta a concludere che siamo nel caso del tetraedro. Ma nei casi più complicati di $n = 3$ e $k = 5$ (che corrisponde all'icosaedro) oppure $n = 5$ e $k = 3$ (che corrisponde al dodecaedro), l'intuizione spaziale non è altrettanto chiara da permettere di concludere senza una dimostrazione rigorosa l'unicità del solido regolare con quegli angoloidi.

3. Una scelta sbagliata dell'incognita può complicare di molto la soluzione. Chiamando x la larghezza del foglio e y l'altezza, la relazione impone $(x - 4)(y - 8) = 50$, da cui si ricava $y = (8x + 18)/(x - 4)$ e la funzione da minimizzare diventa

$$f(x) = x\,\frac{8x+18}{x-4}$$

definita per $x > 4$. Il procedimento con la derivata porta ovviamente a $x = 9$ come ascissa del punto di minimo, da cui si deduce $y = 18$.

4. Il volume della sfera circoscritta al cubo è $4\pi r^3/3$ con $r = 1/2$, cioè $\pi/6$ metri cubi che, espresso in litri, è circa 523,6. Una differenza che potrebbe lasciare perplessi.

5. Come osservato nella soluzione, non occorre conoscere la formula del binomio di Newton, ma solo aver chiaro che la somma dei coefficienti di un polinomio in un numero qualunque di variabili si ottiene assegnando alle variabili il valore 1.

6. Saper valutare in casi semplici la crescenza e la decrescenza permette di semplificarsi la vita. Siccome il coseno è decrescente nell'intervallo dato e positivo, la funzione $5-\cos 2x$ è crescente, quindi la funzione $2/(5-\cos 2x)$ è decrescente.

7. Sarebbe scorretto indicare come soluzione anche $\xi = 1$, perché $1 \notin [0,1]$. Il teorema di Lagrange garantisce l'esistenza del punto nell'intervallo aperto (0, 1).

8. Sarebbe scorretto dire che il teorema degli zeri non è applicabile perché la funzione $\tan x$ è discontinua nell'intervallo dato. Infatti non è nemmeno definita su quell'intervallo.

9. Notiamo che l'ipotesi che la derivata sia non nulla in tutti i punti del dominio è del tutto superflua. Ma va rimarcato che le condizioni, così come sono, non garantiscono la conoscenza della funzione f. La funzione infatti è data a priori con un certo dominio non specificato e il fatto che esistano soluzioni dell'equazione differenziale definite sull'intero asse reale non ha alcuna rilevanza.

10. Andrebbe sempre specificato *minimo periodo* negli enunciati di questo tipo.

Commenti generali

Va sottolineata la scarsa accuratezza grammaticale, lessicale e tipografica del testo d'esame; in questo articolo sono stati corretti solo gli errori ortografici.
Grammatica: 'quale è' e 'una aiuola' denotano la poca sicurezza ortografica riguardo al problema dell'apostrofo, confermata da un 'd'equazione'; è errore l'affermazione 'sì' senza accento.

Lessico e stile: l'aiuola probabilmente sarà colma di *terra* o forse di *terriccio;* il brutto verbo *utilizzare* compare alcune volte di troppo; un'equazione trascendente ha 'soluzioni' e non 'radici'. Il questionario si 'articola' in quesiti che non necessariamente vanno 'risolti': il secondo quesito non ammette certo una 'soluzione'. Altrimenti diamo ragione a quegli studenti che 'risolvono' i limiti. Le virgole sono eccessive e spesso mal posizionate, i due punti sono abusati. Il quesito numero 6 comincia con un participio che sa molto di antiquato e ha una punteggiatura discutibile. Trovo anche scorretto che in alcuni dei quesiti si adotti la familiarità del *tu.*

Tipografia: una *'k'* saltella dalla forma corsiva a quella diritta nel quesito 6; chiunque avrebbe il diritto di considerare la misteriosa funzione $f(x) = tgx$ nel quesito 8 come il prodotto di x per i parametri t e g. Esistono software di dominio pubblico che permettono di produrre testi matematici della massima qualità; il Ministero invece si arrabatta con un *word processor* che dà risultati veramente scadenti.

Un discorso a parte riguarda il rigore nei quesiti. Molto spesso ci si dimentica che la matematica pone anche convenzioni che non sono universalmente adottate: nell'affrontare un problema in un compito in classe sono tacitamente assunte le convenzioni poste dall'insegnante; nella prova dell'esame di stato andrebbe tenuto conto di questo aspetto, evitando qualunque tipo di ambiguità.

Per fare un esempio concreto, il quesito numero 10 del questionario per il liceo scientifico di ordinamento è mal posto. Se infatti consideriamo la funzione f definita nell'intervallo $[4\pi/3, 2\pi/3]$, il problema è ovviamente indeterminato: una funzione di quel tipo e definita su un intervallo chiuso ha *sempre* un punto di massimo o minimo locale agli estremi dell'intervallo. Nel secondo problema sarebbe opportuno specificare che il dominio delle funzioni deve essere il massimo insieme di reali nei quali le formule hanno significato.

L'ambiguità maggiore è quella del quesito 9 con la conseguenza che, non essendo specificato il dominio, la risposta è contraria a quella probabilmente intesa dall'estensore. Altrettanto censurabile l'uso dello stesso simbolo cos per *due* distinte funzioni: nel quesito 6 e nel 10 si indica allo stesso modo la funzione coseno con argomento in gradi e con argomento in radianti. Giustamente si indica rispetto a quale base si considera il logaritmo nel secondo problema; perché non farlo allora anche per le funzioni goniometriche del decimo quesito?

I problemi

I problemi del 2006 non hanno particolari attrattive rispetto a quelli degli anni precedenti. Il primo ha almeno il pregio di una formulazione meno formale rispetto al comune esercizio da libro di testo, ispirata alla leggenda di Didone che ottenne come dono il territorio che avesse potuto delimitare con una pelle di bue e che viene narrata nell'*Eneide*.

Resta però il fatto che consiste di tre parti nettamente distinte. La prima, il problema degli isoperimetri per i rettangoli, è quasi banale, trattata ovunque come introduzione alle questioni di massimo e minimo e che si trovava già nel tema dello scorso anno. La seconda è meno usuale, ma si traduce anch'essa in un facile problema di secondo grado, complicato solo dai calcoli.

La terza parte, quella sull'aumento di volume di un parallelepipedo, non ha niente a che fare con le questioni precedenti; è una domanda appiccicata là, più da scuola media inferiore che da esame finale del liceo.

Il secondo problema appare decisamente più complesso del primo: lo studio di funzione applicato alla risoluzione di equazioni è un argomento che non sempre viene trattato. In questo caso abbiamo addirittura un parametro, che rende le cose più complicate. Nella prima domanda, il riferimento alla ricerca del valore del parametro per cui i grafici sono tangenti potrebbe essere stato incluso per indirizzare lo studente al modo di risoluzione, rischiando però di metterlo sulla cattiva strada: quando si ha a che fare con funzioni trascendenti, non è possibile parlare di 'radici coincidenti', come sembra adombrare il testo, se non si dà per scontata la teoria delle funzioni olomorfe.

Di fatto esiste un modo di studiare il numero di soluzioni diverso dalla soluzione proposta. Si può considerare infatti la funzione

$$k(x) = \frac{\log x}{x^2}, \ (x > 0),$$

con $\lim_{x\to 0^+} k(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} k(x) = 0$. La derivata è

$$k'(x) = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

ciò che dà immediatamente un punto di massimo per $x = \sqrt{e}$ con $k(\sqrt{e}) = 1/(2e)$. Il grafico di k è prontamente disegnato e fornisce la risposta alla prima domanda: una soluzione per $a \leq 0$, due soluzioni per $0 < a < 1/(2e)$, una soluzione per $a = 1/(2e)$ e nessuna soluzione per $a > 1/(2e)$.

Il risolutore che avesse seguito questa strada e avesse indicato come caso della tangenza quello delle 'radici coincidenti' avrebbe commesso un errore. Questo procedimento al massimo *suggerisce* che questo sia il caso, ma la tangenza va verificata trovando che effettivamente le curve, in quel punto, hanno la stessa tangente.

La seconda domanda richiede un minimo di calcolo integrale, il problema è in sé banale; qui c'è l'unica differenza fra i testi per il corso di ordinamento e per il PNI. La terza parte è un semplice studio di funzione. In definitiva, il problema era difficile solo in apparenza, anche se la prima domanda poteva dissuadere lo studente insicuro dall'affrontarlo.

I quesiti posti sono tre per ciascun problema, indipendenti l'uno dall'altro. Si sarebbe però potuto accennare, nel secondo, al fatto di poterne risolvere due con l'unico studio della funzione h. In entrambi c'è una domanda che poco ha a che fare con il resto del problema.

Il questionario

La domanda numero 1 è abbastanza interessante, perché chiede di valutare un'espressione numerica assai grande. Una soluzione trovata in rete, esprime il risultato come $(2^{64}-1)\cdot 38\cdot 10^{-9}$, che è ovviamente corretto ma non dice nulla della reale quantità. Come si sarebbe dovuto valutare una risposta come questa? Con il massimo, non c'è dubbio. Forse sarebbe stato meglio se il quesito avesse riportato esplicitamente la richiesta di un valore numerico della forma $x\cdot 10^y$ con $0\leq x<1$.
La domanda numero 2 probabilmente è quella che ha dato i maggiori grattacapi agli studenti. Si tratta di un argomento che pochissimi docenti discutono nel *curriculum;* probabilmente una buona parte degli studenti ignora perfino il concetto di angoloide, per non parlare di quello di poliedro regolare.
Le domande 3 e 4 sono molto facili. Unica complicazione per la questione del cubo inscritto in una sfera il fatto che non può essere ridotta sul piano disegnando un quadrato inscritto in una circonferenza.
La quinta domanda è molto interessante; come ho mostrato, la dimostrazione non richiede la conoscenza esplicita dei coefficienti binomiali, ma solo la capacità di analizzare i valori assunti da un polinomio per particolari valori delle variabili. L'estensore avrebbe potuto rendere meno ambiguo il testo chiedendo semplicemente la somma dei coefficienti del polinomio $(x+1)^n$, evitando equivoci su quali siano le variabili. In tutte le soluzioni che ho reperito, venivano scritti esplicitamente, e inutilmente, i coefficienti binomiali.
La domanda 6 è il solito esercizio facile ma reso complicato ad arte. Non è abilità matematica saper maneggiare frazioni e risolvere disequazioni fratte. Scrivere il problema nella forma $\cos x=k$, con $\pi/6<x<\pi/2$ sarebbe stato identico per quanto riguarda la valutazione della capacità di analisi. Perché mai si siano scritte le condizioni in gradi sessagesimali è un mistero.
Molti esercizi dei libri di testo chiedono di trovare il punto ξ interno all'intervallo di definizione $[a,b]$ di una funzione f tale che $(b-a)\,f'(\xi)=f(b)-f(a)$. Si tratta di esercizi che mascherano il reale significato del teorema di Lagrange; quindi possono essere svolti, ma occorre rimarcare che l'utilità del teorema è più teorica che pratica. Non va nascosto che la formulazione del quesito è piuttosto confusa: chi sono a e b?
Può forse sorprendere il lettore la risposta data al quesito numero 8 il quale è concettualmente sbagliato. È evidente che l'obiettivo era discutere il teorema degli zeri, tuttavia la funzione proposta non è definita nell'intervallo assegnato e quindi a essa non può essere applicato il teorema. Parlare di discontinuità per la funzione tangente è un grave errore didattico: la funzione tangente è *continua ovunque*. Ovunque sia definita, ovviamente, ma la continuità in un punto presuppone che la funzione sia definita in quel punto. Essendo stata assegnata *quella* funzione l'unica risposta sensata è quella che ho riportato. Una formulazione come «Della funzione f, definita sull'intervallo $[0,1]$ si sa che $f(0)=-1$, $f(1)=1$ e che $f(x)\neq 0$, per ogni $x\in[0,1]$; che cosa si può dire di f?» sarebbe stata corretta.
Nella parte di soluzioni ho già parlato del quesito numero 9. Alcune soluzioni proposte sui giornali e in rete asseriscono che la funzione è determinata dalle condizioni, poche dicono il contrario. Purtroppo il testo non dice affatto che la funzione sia definita in un intervallo. Si può assumere che il dominio sia localmente connesso, visto che l'usuale definizione di derivabilità in un punto richiede che la funzione sia definita in tutto un intorno del punto, ma non di più. La richiesta che la funzione non si annulli in alcun punto è, naturalmente, ridondante, se si ammette che il dominio sia un intervallo. Dal momento che nel *curriculum* di liceo scientifico è raramente trattato il concetto di equazione differenziale, sarebbe stato molto meglio aggiungere il suggerimento di considerare la funzione ausiliaria $g(x)=e^{-x}f(x)$ e di calcolarne la derivata.
Il metodo di risoluzione considerando l'integrale di $f'(x)/f(x)$, che il testo praticamente indica, richiede considerazioni sottili sui segni: si deve ricordare infatti che una primitiva di quella funzione è $\log|f(x)|$, da cui si ricava che $x+c=\log|f(x)|$ e quindi che $|f(x)|=e^{x+c}$. Ricordando il teorema degli zeri e il fatto che la funzione f non si annulla, possiamo allora dire che $f(x)=e^{x+c}$, per ogni x, oppure $f(x)=-e^{x+c}$, per ogni x. Siccome $f(0)=1$, la seconda eventualità è esclusa e dobbiamo anzi avere $c=0$. Una scrittura come $f(x)=\pm e^{x+c}$ va certamente evitata.
Il metodo con la funzione ausiliaria è certamente più economico; inoltre permetterebbe di valutare la prontezza dello studente nel ricavare, da $g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$, che g' è ovunque nulla. Di saper trattare le funzioni come enti a sé stanti, in definitiva, che è uno dei cardini delle competenze matematiche avanzate.
Occorre ricordare che anche nel questionario del 2005 c'era un errore analogo: si trattava di dimostrare l'asserzione falsa che la funzione $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$ è costante: infatti $f(x)=\pi/4$ per $x>-1$, mentre $f(x)=-3\pi/4$ per $x<-1$. Ancora una volta, ed era già accaduto in passato, non si tiene conto della non connessione del dominio.
Il quesito 10 è tristemente banale; non richiede nulla se non la capacità di ricordare che in un punto di estremo *interno* al dominio, la derivata si annulla. Solo leggermente più significativa è la richiesta del periodo, ma tutti dovrebbero sapere ormai che una combinazione lineare di seni e coseni è esprimibile come multiplo scalare di un seno o coseno 'sfasato': per ogni a e b, esistono c e φ tali che, per ogni x reale,

$$a\sin x+b\cos x=c\sin(a+\varphi).$$

Il quesito 3 per le classi PNI, se affrontato analiticamente, ri-

chiede conti piuttosto complessi. Di fatto il problema è quello della riflessione da trattare con il principio del tempo minimo ed è sperabile che il docente di fisica l'abbia trattato parlando dell'ottica geometrica.
La dimostrazione dell'unicità della soluzione nel quesito 4 è facile. Più complicato eseguire i calcoli a mano con il metodo di Newton, mentre quello di bisezione è troppo lento per essere veramente di qualche utilità. Con il metodo iterativo si può usare una calcolatrice tascabile che permetta calcoli con angoli in radianti.
I quesiti 8 e 10 sono semplici applicazioni di formule note e non richiedono altri commenti. L'unico che sento di dover fare è rimarcare l'assurdità di far calcolare a mano integrali approssimati; trattandosi di PNI forse l'indicazione di un algoritmo per il calcolo sarebbe stato più significativo.
Tengo per ultimo il quesito 7, che è misterioso. Richiede che lo studente conosca la posizione di De Finetti sul problema della definizione della probabilità. Ciò che si domanda è un tema sulla questione o semplicemente spiattellare la definizione? Quanti docenti trattano le varie definizioni proposte nel corso dei secoli, a partire da Pascal-Fermat per arrivare a Kolmogorov e De Finetti?
Sono favorevole al fatto di chiedere allo studente di riflettere anche sulle questioni matematiche facendo considerazioni personali. Non dobbiamo far credere anche noi agli studenti che la matematica non è cultura: già molti altri lo dicono o lo fanno capire senza tanti veli.
Dubito però che la prova dell'esame di stato sia il posto migliore per una richiesta del genere. Facciamo un confronto con la prova di italiano, per la quale vengono fornite varie tracce, con grande dovizia di materiali su cui lavorare: è giusto che sia così, il vecchio 'tema' basato su un semplice titolo non è il modo corretto per valutare le capacità di analisi e sintesi. Tuttavia, se vogliamo andare su questa strada anche in matematica, e ritengo che ci si debba almeno provare, è necessario che si diano allo studente gli strumenti adeguati e, soprattutto, la consuetudine al tipo di prova richiesta.
Molti anni fa, uno studente si lamentò che gli avevo segnato in rosso un errore di ortografia dicendo «è matematica, non italiano». Aveva ragione, dal suo punto di vista: mai era stato abituato a trattare gli svolgimenti degli esercizi anche con una concatenazione di ragionamenti espressi a parole. Troppo spesso le prove di matematica sono una serie di formule connesse al più da una freccina.

Commenti finali

Non ha molto senso che i due problemi assegnati siano del tutto identici per i diversi programmi, ordinamento e PNI: l'unica differenza infatti è che il calcolo dell'area, nel secondo problema, è più complicato per gli studenti PNI. Si fatica a capire perché.
Le differenze sostanziali sono nei questionari, alle domande 3, 4, 7, 8 e 10. Come quasi sempre, però, si confonde l'informatica con il calcolo numerico: in nessuna domanda è previsto un approccio algoritmico a un problema, che potrebbe dimostrare le competenze informatiche dell'allievo. Nel questionario PNI c'è una domanda di probabilità dalla soluzione banale oltre al già trattato 'quesito' su de Finetti.

Quesiti e problemi hanno lo stesso «peso»? Perché devono essere valutati allo stesso modo?

Ancora una volta la prova d'esame ha il difetto di richiedere calcoli eccessivi invece di cercare di cavar fuori le idee e di far esibire la comprensione dei concetti. Lo studente potrebbe dimostrare quanto ha appreso 'raccontando' la successione dei suoi ragionamenti, ma certamente non ne ha il tempo se ogni esercizio è afflitto da calcoli complicati, fattorizzazioni interminabili, frazioni gigantesche e funzioni mostruose; non è il caso di questo tema d'esame, anche se molte complicazioni di calcolo potevano essere evitate. Il calcolo dell'area nel secondo problema (specialmente per il PNI) è un esempio eccellente di questa ricerca della difficoltà fine a sé stessa. Va poi rimarcato lo squilibrio fra i due problemi, uno semplicissimo, l'altro certamente più difficile; non è arduo fare la congettura che sia stato scelto maggiormente il primo, anche se non possiedo dati che lo confermino.
Domandiamoci infine se sia il caso di valutare allo stesso modo uno studente che abbia affrontato in modo adeguato i quesiti 2, 5, 6, 8 e 9 e uno che invece abbia trattato gli altri. Entrambi avrebbero rispettato le prescrizioni per ottenere il massimo dei voti, pur con evidente disparità di competenze dimostrate. Mi riferisco alle prove del liceo tradizionale, ma lo stesso vale per il PNI. Come si dovrebbe valutare uno che svolga l'intero testo? Cosa perfettamente ottenibile in sei ore, un allievo dotato è in grado di produrre un elaborato di alto livello in metà del tempo.
Sarebbe auspicabile che venissero fornite, insieme al testo, anche indicazioni che possano dare sia agli studenti che alle commissioni parametri obiettivi sulla valutazione. Non per negare la sufficienza agli studenti che si limitino a svolgere le parti più facili, ma per premiare quelli che si impegnino sulle domande più complesse.

Enrico Gregorio, Dipartimento di Informatica, Settore di matematica - Università di Verona