

Matematica

Mario Marchi - Antonio Marro

Piano Nazionale Informatica

N

Nello svolgimento dei problemi e dei quesiti tanto del corso PNI quanto del corso di ordinamento cercheremo di non perdere di vista le seguenti idee guida che sono alla base degli obiettivi che l'articolo si propone. Prima di tutto terremo pre-

sente che i primi destinatari sono certamente i docenti della Scuola superiore, in particolare del Liceo Scientifico, ma senza dimenticare che i destinatari finali, anche se indiretti, sono gli studenti con i loro bisogni ai fini di un apprendimento migliore della disciplina matematica e dei saperi ad essa più direttamente connessi. Si intende pertanto fornire ai docenti un modesto contributo, alcune idee e qualche suggerimento semplicemente orientato al miglioramento del loro lavoro didattico.

LA TRACCIA MINISTERIALE

Tema di Matematica

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r d'equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \text{ e } r : 4y = x + 6.$$

1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r .
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s , simmetrica di r rispetto all'asse x .
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x .
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

Problema 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n , l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C , dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \rightarrow +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Questionario

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$.
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$.

4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
6. Le rette r e s d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O . Si determini σ .
7. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate $(3, 4)$.
9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Pertanto, laddove il caso lo richieda e sia didatticamente possibile, dell'esercizio sarà proposta la soluzione in più modi sottolineando per ognuno di essi pregi e difetti, caratteristiche positive e negative, difficoltà, convenienza e opportunità, sempre di ordine didattico, che la scelta potrà comportare.

Si tratta di consigli (utili, si spera), frutto di lunga esperienza didattica e di conoscenza della Scuola e dei suoi problemi, senza alcuna dotta pretesa di carattere prescrittivo, nella ferma convinzione che, solitamente, in ogni processo di insegnamento/apprendimento, se si tiene in debito conto il fatto che c'è anche il discente, il cui ruolo non è meno importante di quello del docente, nulla può darsi per scontato e nessuno può atteggiarsi a depositario della ricetta infallibile. La scelta finale quindi della via e del metodo più opportuno e funzionale alle proprie necessità didattiche sarà, come appare giusto, sempre e comunque appannaggio del docente.

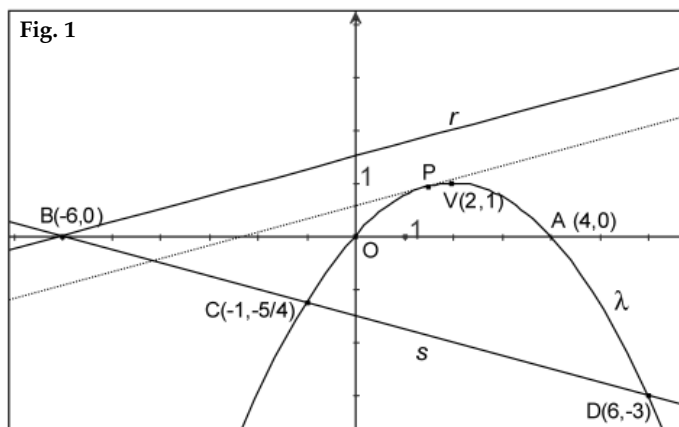
Anche il linguaggio usato sarà il più possibile sobrio e lineare puntando alla chiarezza piuttosto che alla presunta eleganza espressiva.

Problema 1

Le curve date λ ed r di equazioni

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \text{ e } r : 4y = x + 6$$

sono rispettivamente una parabola ed una retta. La parabola, con asse parallelo all'asse y , volge la concavità verso il basso, ha vertice $V(2,1)$ e interseca gli assi cartesiani in $O(0,0)$ e in $A(4,0)$. La retta r incontra invece gli stessi assi nei punti $B(-6,0)$ ed $E(0,3/2)$. (v. Fig. 1)



Punto 1 - Per provare che λ ed r non hanno punti in comune basta verificare che il sistema

$$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) \\ 4y = x + 6 \end{cases}$$

non ammette soluzioni reali. Infatti, posto $x + 6$ al posto di $4y$ nella prima equazione, si ottiene l'equazione

$$x^2 - 3x + 6 = 0$$

che non ha soluzioni reali perchè il suo discriminante $\Delta = 9 - 24$ è evidentemente negativo.

Punto 2 - Sia $P(t, -\frac{1}{4}t^2 + t)$ il punto generico della parabola λ e calcoliamo la sua distanza dalla retta r in funzione del parametro t che indicheremo $d(t)$. Si ha:

$$d(t) = \frac{\left| t - 4\left(-\frac{1}{4}t^2 + t\right) + 6 \right|}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{t^2 - 3t + 6}{\sqrt{17}}.$$

Osserviamo che l'espressione finale della distanza $d(t)$ non presenta il segno di modulo perchè il trinomio $t^2 - 3t + 6$ è positivo per ogni valore di t .

Per il calcolo del minimo di $d(t)$ si può evitare il ricorso allo studio del segno della derivata osservando che

$$d(t) = \frac{1}{\sqrt{17}}(t^2 - 3t + 6)$$

rappresenta a sua volta, nel piano (t, d) , una parabola concava verso l'alto e, pertanto, essa presenta il suo valore minimo nel vertice e, cioè, per $t = 3/2$.

Dunque il punto cercato è $P(3/2, 15/16)$.

Il quesito si poteva risolvere anche mediante considerazioni geometriche osservando che il punto della parabola λ «più vicino» ad r è il punto P (unico) di λ in cui la tangente è parallela ad r . Sulla base di questa osservazione, per individuare P è possibile seguire due vie: la via algebrica, ricercando nel fascio di rette parallele ad r quella che è tangente alla parabola, e la via, più rapida e diretta, dell'uso del calcolo differenziale determinando il punto di λ in cui il valore della derivata è uguale al coefficiente angolare di r .

Nel primo caso si risolve il sistema

$$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) & (\text{parabola } \lambda) \\ 4y = x + q & (\text{fascio di rette parallele a } r) \end{cases}$$

e si impone che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvente

$$\begin{aligned} x^2 &= 4x - (x + q) \Rightarrow x^2 - 3x + q = 0 \\ \Delta &= 9 - 4q = 0 \Rightarrow q = \frac{9}{4} \\ \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} &= 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{16}\right). \end{aligned}$$

Per la seconda via si ha, invece,

$$\begin{aligned}\lambda: y &= -\frac{1}{4}x^2 + x \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ -\frac{1}{2}x + 1 &= \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

con le stesse conclusioni.

Punto 3 - La retta s simmetrica di r rispetto all'asse x passa per $B(-6, 0)$ e ha coefficiente angolare $-\frac{1}{4}$, opposto a quello di r . La sua equazione, ridotta a forma intera sarà $-4y = x + 6$.

Le intersezioni C e D di s con λ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) \\ -4y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

da cui si ottengono i punti $C(-1, -5/4)$ e $D(6, -3)$.

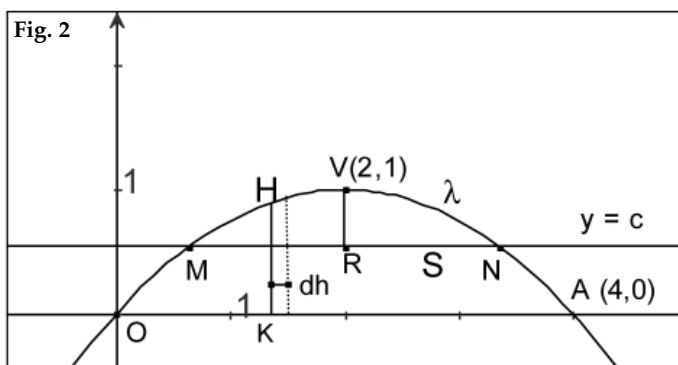
Per il calcolo dell'area della regione finita compresa tra la parabola λ e la retta s si calcola l'integrale definito

$$\begin{aligned}\int_{-1}^6 \left(-\frac{x^2}{4} + x + \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \right) dx &= \int_{-1}^6 \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{4} + \frac{3}{2} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{5x^2}{8} + \frac{3x}{2} \right]_{-1}^6 = \frac{343}{24}.\end{aligned}$$

Per lo stesso calcolo poteva essere utilizzato il teorema di Archimede applicato alla parabola ottenuta facendo la differenza tra le ordinate di λ e quelle di s che non è altro che la funzione integranda dell'integrale calcolato sopra

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Punto 4 - Intersechiamo la parabola λ con la retta $y = c$ ($0 \leq c \leq 1$) e calcoliamo l'area, in funzione di c , del nuovo settore parabolico ottenuto. (Fig. 2).



Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = c \\ x^2 = 4(x - y) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x + 4c = 0$$

si ottiene, indicati con M, N, R i punti come segnato figura,

$$\overline{MN} = x_N - x_M = 4\sqrt{1-c} \text{ e } \overline{RV} = 1 - c.$$

Applicando il teorema di Archimede calcoliamo l'area σ_1 e σ_2 dei settori parabolici rispettivamente di base OA ed MN e imponiamo che siano il primo doppio del secondo. Si ha:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \overline{OA} \cdot y_v = \frac{2}{3} 4 = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3} \overline{MN} \cdot \overline{RV} = \frac{2}{3} 4\sqrt{1-c}(1-c)$$

e, imponendo che risulti $\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1$, si ottiene l'equazione risolutiva:

$$\frac{8}{3} \sqrt{1-c}(1-c) = \frac{4}{3} \Rightarrow 2(\sqrt{1-c})^3 = 1 \Rightarrow \sqrt{1-c} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow c = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Punto 5 - Il volume del solido richiesto si può calcolare mediante il seguente ragionamento: il generico piano ortogonale all'asse x , di equazione $x = h$ ($0 \leq h \leq 4$), taglia l'asse x nel punto $K(h, 0)$, la parabola λ nel punto $H(h, -\frac{1}{4}h^2 + h)$ e taglia il solido secondo la sezione quadrata di area

$$\overline{KH}^2 = \left(\frac{1}{4}h^2 + h \right)^2$$

e l'elemento di volume del solido sarà

$$dV = \left(-\frac{1}{4}h^2 + h \right)^2 dh.$$

Pertanto il volume cercato si otterrà calcolando l'integrale definito

$$\begin{aligned}V &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}h^2 + h \right)^2 dh = \int_0^4 \left(-\frac{1}{16}h^4 - \frac{1}{2}h^3 + h^2 \right) dh = \\ &= \left[-\frac{1}{80}h^5 - \frac{1}{8}h^4 + \frac{1}{3}h^3 \right]_0^4 = \frac{32}{15}.\end{aligned}$$

Problema 2

La funzione considerata

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \text{ se } x > 0 \end{cases} \quad [0, +\infty[$$

è una funzione trascendente definita per $x \geq 0$. Essa è continua per $x > 0$ perchè è espressa dal prodotto di due funzioni continue sommato con una costante.

Punto 1 - Per stabilire se è continua anche per $x = 0$ osserviamo che, affinché una funzione sia continua in un punto x_0 del suo insieme di definizione D , occorre e basta che siano verificate le condizioni:

1) x_0 sia punto di accumulazione per D ;

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nel nostro caso, essendo $x = 0$ l'estremo sinistro dell'intervallo di definizione D , si può parlare solo di «continuità a destra» in $x = 0$.

Le condizioni 1) e 2) sono certamente verificate dal momento che l'intervallo D è chiuso a sinistra (il che assicura che $x = 0$ è punto di accumulazione) e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \log x) + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2 \log x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x = 1 = f(0).$$

Si osservi che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Anche per la derivabilità di $f(x)$ in $x = 0$ si tratterà di «derivabilità a destra»: la f è «derivabile a destra» in $x = 0$ perchè esiste finito il limite destro del rapporto incrementale. Infatti

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} h (3 - \log h) = 0.$$

Si osservi comunque che la dimostrazione della derivabilità rende non indispensabile la dimostrazione precedente della continuità in quanto la derivabilità implica la continuità.

Punto 2 - L'equazione

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

quando è $x \neq 0$, è equivalente all'equazione

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{x^2} = \log x \quad (2)$$

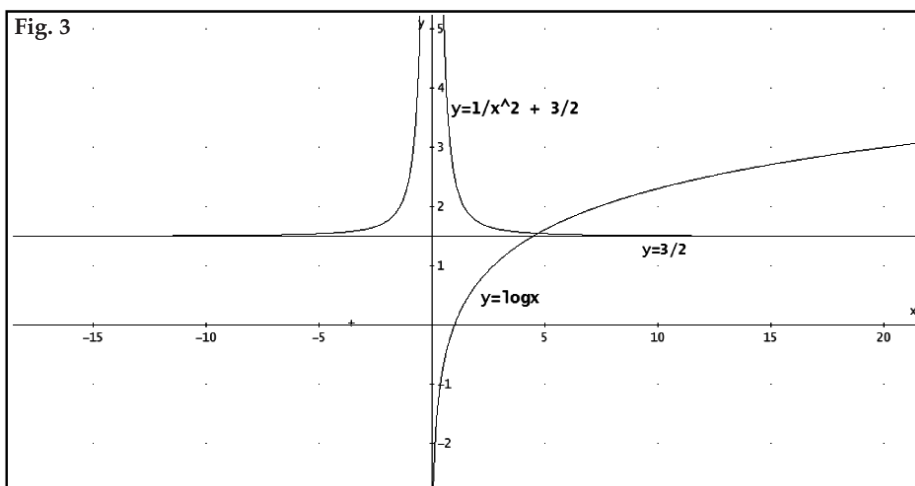
che si può risolvere per via grafica cercando le intersezioni delle due curve

$$c_1) y_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad c_2) y_2 = \log x.$$

Delle due curve in questione, la c_1 si rappresenta facilmente osservando che:

- è sempre positiva
 - l'asse y è asintoto verticale
 - la retta $y = 3/2$ è asintoto orizzontale
 - è monotona crescente per $x < 0$ ($y_1' = -\frac{2}{x^3}$)
 - è monotona decrescente per $x > 0$
- e la c_2) è la ben nota curva logaritmica.

Il grafico sommario delle due curve è riportato nella Fig. 3.



Dal confronto dei due grafici per $x > 0$ si rileva che effettivamente esse hanno un solo punto di intersezione e che pertanto l'equazione (1) ha un'unica radice reale sull'intervallo $[0; +\infty[$.

L'esistenza e unicità della radice dell'equazione (1) si può provare anche osservando che la funzione $f(x)$ è tale che:

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

e quindi, per il teorema di esistenza degli zeri, l'equazione in questione ammette almeno una radice reale nell'intervallo $[0, +\infty[$. Resta da dimostrare che la radice è unica.

La derivata della funzione, per ciò che è stato detto circa la derivabilità in $x = 0$, sarà

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(x) = 2x(1 - \log x) \quad \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Dunque la derivata si annulla, oltre che per $x = 0$, anche per $x = e$ con $f(e) = 1/2e^2 + 1$.

Studiando il segno della derivata si conclude che la funzione è crescente per $0 < x < e$ ed è decrescente per $e < x < +\infty$ e pertanto essa presenta un minimo e un massimo relativo rispettivamente nei punti

$$B(0, 1) \quad \text{e} \quad M(e, 1/2e^2 + 1).$$

Osservando infine che $f(x)$ è monotona crescente nell'inter-

1. Il teorema degli zeri si estende anche agli intervalli aperti o non limitati quando esiste finito o infinito il limite della funzione nell'estremo in cui l'intervallo è aperto o non limitato.

vallo $(0, e)$ mentre è monotona decrescente nell'intervallo $(e, +\infty)$ si può concludere, richiamando ancora il teorema degli zeri, che l'equazione (1):

- non ammette radici nell'intervallo $(0, e)$
- ha una sola radice nell'intervallo $(e, +\infty)$.

Il che dimostra l'unicità della radice dell'equazione in tutto l'intervallo $[0, +\infty[$.

Per il calcolo del suo valore approssimato richiesto osserviamo intanto che, indicato con α detto valore, risulta, per quanto osservato sopra, $\alpha > e$.

Il calcolo effettivo, con il grado di precisione voluta, può effettuarsi in diversi modi. Il più semplice e più comune è il metodo della bisezione degli intervalli partendo da un intervallo iniziale nel quale siamo sicuri che sia contenuta l'unica² radice cercata. Questo metodo fornisce però valori grossolani della radice perchè esso, in generale, converge lentamente.

Una buona precisione richiede perciò un notevole numero di iterazioni. Il processo, in compenso, può essere facilmente automatizzato con uno strumento di calcolo, che però lo studente non può utilizzare in questa sede. Nella tabella che segue (Tab. 1), come si può notare, per il calcolo del valore della radice con l'approssimazione richiesta, $\alpha \cong 4,69$, si sono rese necessarie oltre 12 iterazioni.

Tab. 1

iterazioni	a	b	$\frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$b-a$
1	4,0000	5,0000	4,5000	2,8193	-1,7359	0,9174	1,0000
2	4,5000	5,0000	4,7500	0,9174	-1,7359	-0,3119	0,5000
3	4,5000	4,7500	4,6250	0,9174	-0,3119	0,3267	0,2500
4	4,6250	4,7500	4,6875	0,3267	-0,3119	0,0134	0,1250
5	4,6875	4,7500	4,7188	0,0134	-0,3119	-0,1477	0,06250
6	4,6875	4,7188	4,7031	0,0134	-0,1477	-0,0668	0,0313
7	4,6875	4,7031	4,6953	0,0134	-0,0668	-0,0266	0,0156
8	4,6875	4,6953	4,6914	0,0134	-0,0266	-0,0065	0,0078
9	4,6875	4,6914	4,6895	0,0134	-0,0065	0,0035	0,0039
10	4,6895	4,6914	4,6904	0,0035	-0,0065	-0,0015	0,0020
11	4,6895	4,6904	4,6899	0,0035	-0,0015	0,0010	0,0010
12	4,6899	4,6904	4,6902	0,0010	-0,0015	-0,0003	0,0005
13	4,6899	4,6902	4,6901	0,0010	0,0003	0,0003	0,0002
14	4,6901	4,6902	4,6901	0,0003	0,0003	0,0000	0,0001

Notevolmente ridotto è il numero delle iterazioni se utilizziamo il metodo delle tangenti o quello delle corde o entrambi contemporaneamente³. La formula ricorrente del metodo delle tangenti è

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{f(\alpha_{n-1})}{f'(\alpha_{n-1})} \text{ con } \alpha_0 = 5 \quad (n = 1)$$

e i valori ottenuti sono approssimati, in questo caso, per eccesso. La formula ricorrente del metodo delle corde

$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1}f(b) - bf(\beta_{n-1})}{f(b) - f(\beta_{n-1})}$$

dove $\beta_0 = 4$ ($n = 1$) e $b = 5$

che fornisce, invece in questo caso, approssimazioni per difetto.

Nelle seguenti tabelle (Tab. 2 e Tab. 3) sono riportati i valori ottenuti ponendo successivamente $n = 1, 2, 3$ e operando con i due metodi e le corrispondenti maggiorazioni dell'errore.

Tab. 2 (metodo delle tangenti)

n	$f(\alpha_{n-1})$	$f'(\alpha_{n-1})$	α_n
1	- 1,7359	- 6,0944	4,7152
2	- 0,1290	- 5,1940	4,6903
3	- 0,0010	- 5,1171	4,6901

Tab. 3 (metodo delle corde)

n	$f(\beta_{n-1})$	β_n	$\epsilon_i = \alpha_i - \beta_i$
1	2,8193	4,6189	0,0962
2	0,3566	4,6839	0,0065
3	0,0321	4,6896	0,0005

Si noti che con questo metodo, c.d. «combinato» dei metodi delle tangenti e delle corde, già al terzo passaggio abbiamo il valore cercato $\alpha \cong 4,690$ ma anche una maggiorazione dell'errore dalla quale si evince che anche la terza cifra decimale è esatta.

Punto 3 - Per tracciare l'andamento del grafico di C ricordiamo che:

- il dominio è $[0, +\infty[$;
- interseca l'asse y in $(0;1)$ e l'asse x nel punto di ascissa $\alpha \cong 4,69$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e non ha asintoti;
- ha un minimo relativo in $B(0;1)$;
- ha il massimo assoluto nel punto $M(e, 1/2e^2+1)$.

Inoltre, essendo $f''(x) = -2\log x$, si trova facilmente che la curva C:

- presenta un flesso discendente in $F(1; 5/2)$;
- la tangente nel punto di flesso F ha equazione

$$y = 2x + \frac{1}{2},$$

essendo $f'(1) = -2$.

Alla luce delle precedenti considerazioni l'andamento del grafico della curva C risulta quello riportato in Fig. 4.

2. Se l'equazione ha più radici occorre trovare, per ognuna di esse, un intervallo in cui sia contenuta da sola.

3. I due metodi infatti forniscono per una stessa radice valori approssimati sempre di segno opposto (cioè uno per eccesso e l'altro per difetto o viceversa) così che si ottiene contestualmente ad ogni passaggio iterativo una maggiorazione migliore dell'errore commesso.

Punto 5 - Il limite richiesto si calcola facilmente osservando che $\log n$ è infinito di ordine inferiore a n^3 per $n \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - \frac{11}{18n^3} - \frac{\log n}{3n^3} \right) = \frac{1}{9}.$$

Mentre il valore, in funzione di n , di A_n esprime l'area tratteggiata nella Fig. 5, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{9}$$

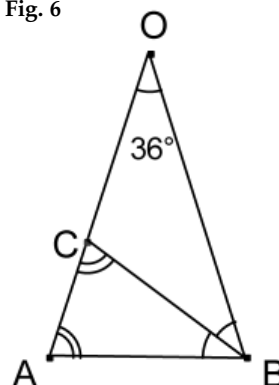
è la misura dell'area tratteggiata in Fig. 4. Il procedimento adottato si usa chiamare «integrazione impropria» e pertanto il numero $1/9$ ottenuto viene inteso come misura «impropria» dell'area tratteggiata nella Fig. 4.

Questionario

Quesito 1. Il lato AB (Fig. 6) del decagono regolare inscritto in un cerchio di centro O è il terzo lato di un triangolo isoscele il cui angolo al vertice, come decima parte di 360° , è di 36° . Gli angoli alla base di tale triangolo isoscele sono quindi di 72° . Si ha, cioè:

$$\widehat{AOB} = 36^\circ; \quad \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 72^\circ.$$

Fig. 6



Conducendo la bisettrice BC dell'angolo $\widehat{ABO}$ si ottengono altri due triangoli isosceli, ABC e OCB, rispettivamente sulle basi AC e OB, essendo

$$\widehat{ABC} = \widehat{CBO} = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ \text{ e } \widehat{BCA} = \widehat{BAC} = 72^\circ.$$

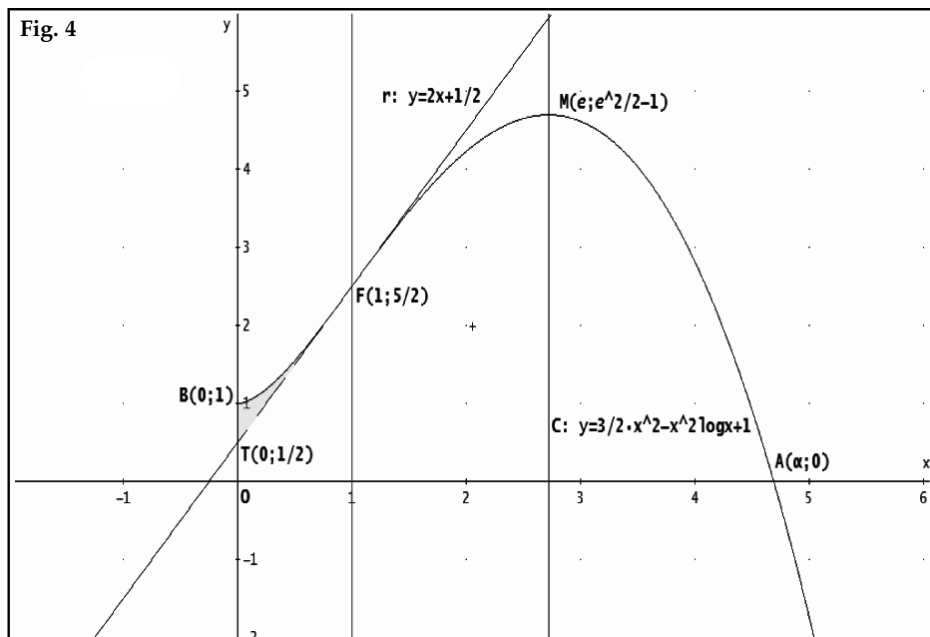
Ne segue: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CO}$.

Essendo i triangoli AOB e ABC simili, perchè hanno i tre angoli uguali, sussiste la proporzione

$$\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC},$$

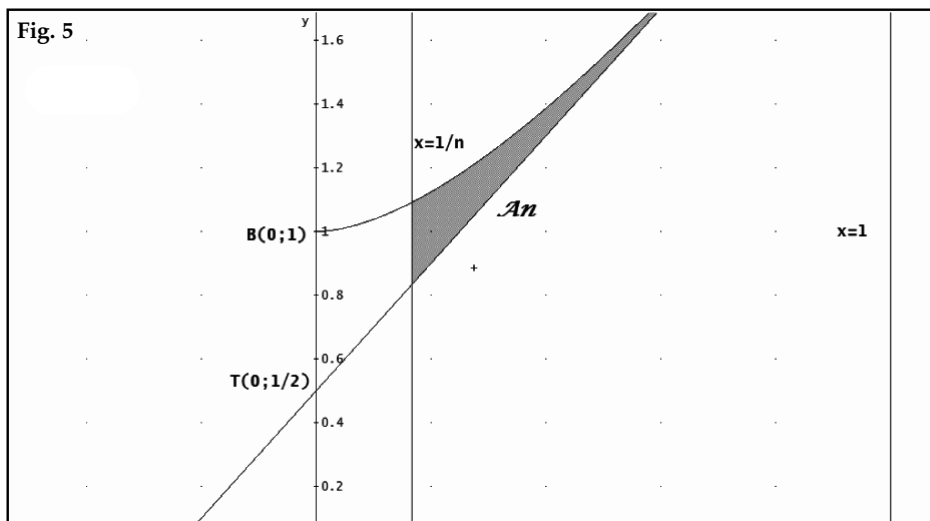
che, in quanto è $\overline{AB} = \overline{CO}$, si può scrivere

$$\overline{AO} : \overline{CO} = \overline{CO} : \overline{AC}.$$



Punto 4 - L'area A_n del dominio piano delimitato da C e dalle rette r , $x = 1/n$ e $x = 1$, si esprime, in funzione di n mediante l'integrale (Fig. 5)

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{1/n}^1 \left[\frac{1}{2}x^2(3 - 2 \log x) + 1 - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx = \\ &= \int_{1/n}^1 \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \log x \right] dx. \end{aligned}$$



Calcolando preventivamente, per parti, l'integrale

$$\int x^2 \log x dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} A_n &= \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \log x + \frac{x^3}{9} \right]_{1/n}^1 = \\ &= \left[\frac{11x^3}{18} - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \log x \right]_{1/n}^1 = \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - \frac{11}{18n^3} - \frac{\log n}{3n^3}. \end{aligned}$$

Quest'ultima proporzione dimostra che OC (e quindi AB) è uguale alla sezione aurea del raggio OA.

Se $\overline{OA} = r$, il valore numerico x della sezione aurea del raggio e quindi del lato del decagono regolare si ricava risolvendo l'equazione

$$r : x = x : (r - x)$$

ovvero

$$x^2 = r(r - x)$$

cioè

$$x^2 + rx - r^2 = 0 \text{ con } 0 < x < r$$

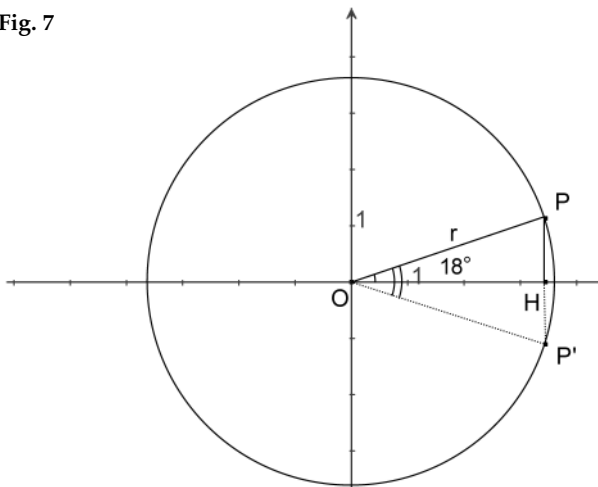
che ammette le due soluzioni $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} r$, delle quali è accettabile la sola $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} r$, essendo l'altra negativa.

Per calcolare $\sin 18^\circ$ ricordiamo che, per definizione, si ha (Fig. 7)

$$\sin 18^\circ = \frac{\overline{HP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{HP}}{r}.$$

Consideriamo il segmento OP' simmetrico di OP rispetto all'asse delle ascisse. L'angolo $P'OP$ sarà di 36° e quindi il segmento $P'P$ sarà

Fig. 7



uguale al lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r e, pertanto, si avrà:

$$\sin 18^\circ = \frac{\overline{HP}}{r} = \frac{\frac{1}{2} \overline{PP'}}{r} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}-1}{2} r}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Essendo richiesto anche il calcolo di $\sin 36^\circ$, calcoliamo preventivamente

$$\begin{aligned} \cos 18^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ &= 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \\ &= 2 \frac{\sqrt{5}-1}{4} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}. \end{aligned}$$

Quesito 2. Una definizione classica di tangente è la seguente: si dice tangente nel punto P_0 ad una curva c , la posizione limite, se esiste, della retta congiungente P_0 con un altro punto P della curva, allorché il punto P tende comunque a P_0 , muovendosi sempre sulla curva c . Si dimostra che, se c è derivabile, il coefficiente angolare della retta tangente è uguale al valore della derivata della curva nel punto P_0 .

La curva data, $y = x \sin x$, è derivabile in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e, inoltre nei punti in cui si ha $\sin x = 1$ (cioè nei punti $x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)), la curva c e la retta $y = x$ hanno la stessa ordinata e la stessa derivata e pertanto sono tangenti. Infatti:

$$\begin{aligned} y &= x \sin x \Rightarrow y(\pi/2 + 2k\pi) = \pi/2 + 2k\pi \\ y' &= \sin x + x \cos x \Rightarrow y'(\pi/2 + 2k\pi) = 1 \\ y &= x \Rightarrow y' = 1. \end{aligned}$$

Lo stesso discorso vale per i punti in cui

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\pi/2 + 2k\pi$$

nei quali la curva c è tangente alla retta $y = -x$.

Quesito 3. Il prodotto di due simmetrie assiali σ e φ con assi tra loro paralleli è una traslazione il cui vettore è perpendicolare alla direzione degli assi di σ e φ . Poiché il vettore della traslazione assegnata è $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, gli assi di σ e φ saranno paralleli alla retta $y = x$ e le equazioni delle due trasformazioni saranno del tipo

$$\begin{cases} x' = y - n \\ y' = x + n. \end{cases}$$

Siano quindi⁴

$$\varphi: \begin{cases} x' = y - n_1 \\ y' = x + n_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma: \begin{cases} x'' = y' - n_2 \\ y'' = x' + n_2 \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} P(x,y) &\xrightarrow{\varphi} P'(x',y') \\ P'(x',y') &\xrightarrow{\sigma} P''(x'',y'') \\ P(x,y) &\xrightarrow{\sigma \circ \varphi} P''(x'',y''). \end{aligned}$$

cioè $\sigma \circ \varphi$:

$$\begin{aligned} (x,y) &\xrightarrow{\varphi} (x' = y - n_1; y' = x + n_1) \xrightarrow{\sigma} \\ &\xrightarrow{\sigma} (x'' = x + n_1 - n_2; y'' = y - n_1 + n_2) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} x'' = x + n_1 - n_2 \\ y'' = y - (n_1 - n_2). \end{cases}$$

⁴ Sono state usate notazioni diverse per le due simmetrie per facilitarne la composizione.

Questa traslazione coincide con la traslazione assegnata quando

$$n_1 - n_2 = \sqrt{5} \Rightarrow n_1 = n_2 + \sqrt{5}.$$

Come si vede il problema ha ∞^1 soluzioni, cioè esistono ∞^1 coppie di simmetrie σ e φ il cui prodotto è la traslazione di vettore $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

Ponendo $n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = \sqrt{5}$ e avremo:

$$\sigma: \begin{cases} x'' = y' \\ y'' = x' \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi: \begin{cases} x' = y - \sqrt{5} \\ y' = x + \sqrt{5} \end{cases}.$$

Per facilitare la composizione in ordine inverso scriviamo σ e φ nel seguente modo più opportuno:

$$\sigma: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi: \begin{cases} x'' = y' - \sqrt{5} \\ y'' = x' + \sqrt{5} \end{cases}.$$

Si ha:

$$\varphi \circ \sigma : (x, y) \xrightarrow{\sigma} (x' = y; y' = x) \xrightarrow{\varphi} (x'' = x - \sqrt{5}; y'' = y + \sqrt{5})$$

cioè

$$\begin{cases} x'' = x - \sqrt{5} \\ y'' = y + \sqrt{5} \end{cases}.$$

Dunque componendo σ e φ in ordine inverso si ha la traslazione di vettore opposto $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Quesito 4. Il volume $V = 0,4$ litri della lattina, equivale a 400 cm^3 . Indicato con x il raggio del cerchio di base, ricaviamo l'altezza h del cilindro in funzione di x :

$$x = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{400}{\pi x^2}.$$

La superficie totale sarà la funzione di x

$$f(x) = 2\pi x h + 2\pi x^2 = 2\pi x \left(\frac{400}{\pi x^2} + x \right) = \frac{800}{x} + 2\pi x^2.$$

Annullando la derivata

$$f'(x) = -\frac{800}{x^2} + 4\pi x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(\pi x^3 - 200)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \cong 3,99 \text{ cm}$$

$$\text{da cui } h = \frac{400}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{200}{\pi}\right)^2}} = \frac{20}{\sqrt[3]{5\pi}} \cong 7,99 \text{ cm}.$$

La verifica che si tratta effettivamente di un minimo si ottiene studiando il segno di $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{4\pi x^3 - 800}{x^2} > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}.$$

Dunque la lattina realizzata con la quantità minima di latta ha il raggio di base e l'altezza rispettivamente uguali a

$$x = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \cong 3,99 \text{ cm e } h = \frac{20}{\sqrt[3]{5\pi}} \cong 7,99 \text{ cm}.$$

Quesito 5. Il quesito è mal posto dal momento che la definizione del numero «e» non è unica.

Una delle definizioni più diffuse lo indica come limite di una successione. Precisamente:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (3)$$

Il numero e è irrazionale (trascendente), è compreso tra 2 e 3 e riveste grandissima importanza in matematica.

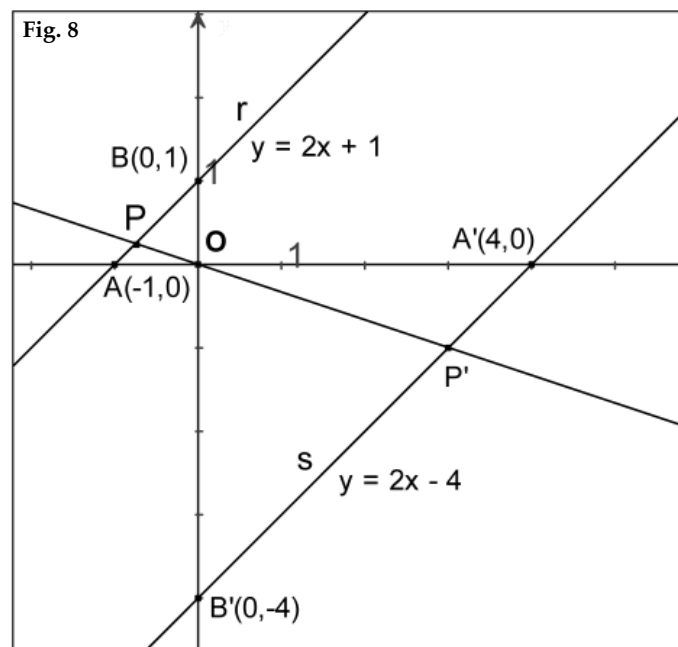
È la base del sistema dei logaritmi c.d. «naturali». La funzione $f(x) = e^x$ gode di una proprietà particolare: è la sola funzione che coincide con la propria derivata⁵.

La procedura che consente di calcolarlo con la precisione voluta è la stessa procedura che porta alla sua definizione. Infatti per dimostrare l'esistenza del limite (3) si osserva che

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = v_n$$

e si dimostra che le successioni di termine generale u_n e v_n convergono allo stesso limite. Assegnando opportunamente il valore di n e sviluppando l'espressione $(1 + 1/n)^n$ si ottiene il valore di e con l'approssimazione voluta in quanto l'errore (per lo stesso valore di n) è maggiorato da $v_n - u_n$.

Quesito 6. Nell'omotetia σ di centro O in cui si corrispondono (Fig. 8) le rette r ed s , si corrispondono i punti A e A' , B e B' , P e P' ecc. e i segmenti OA e OA' , OB e OB' , ecc.



5. Vi sono autori che definiscono il numero «e» partendo proprio da questa proprietà.

E, poichè si ha

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = -\frac{1}{4},$$

σ è un'omotetia di centro O e rapporto -4 e pertanto le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y. \end{cases}$$

Quesito 7. Quanto osservato per il quesito 5 vale anche per questo quesito. La via per definire $n!$ non è unica e le risposte successive dipendono ovviamente dalla definizione adottata (Qualcuna delle risposte potrebbe essere implicita nella definizione!).

Si pone per definizione:

$$0! = 1; 1! = 1; 2! = 1 \cdot 2;$$

e, in generale, per $n > 1$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n$$

(il simbolo $n!$ si legge: n fattoriale o fattoriale di n).

Si dimostra che $n!$ è il numero delle permutazioni di n oggetti distinti e allineati su n posti. Se invece gli oggetti non sono tutti distinti ma risultano k_1 uguali fra loro, k_2 uguali fra loro e distinti dai precedenti, , k_m uguali fra loro e distinti dai precedenti (essendo $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = n$), il numero delle permutazioni distinte degli n oggetti è in questo caso

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_m}^* = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \dots k_m!}.$$

Nel caso particolare di $m = 2$ in cui $k_1 = k$ e $k_2 = n - k$ risulta, ovviamente,

$$P_{k, n-k}^* = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Questa espressione, che è un intero assoluto, si dice «coefficiente binomiale di grado n e di classe k » e si indica con il simbolo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!},$$

dove l'ultima espressione si ottiene dividendo numeratore e denominatore per $(n-k)!$.

Per $k = n$ si ha una sola permutazione e, ricordando che $0! = 1$, l'espressione risulta ancora valida.

Si dimostrano agevolmente le seguenti proprietà:

$$a) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

$$e, \text{ in particolare, } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{0}{0} = 1.$$

$$b) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Per esigenza di completezza si ricorda che il numero $\binom{n}{k}$ rappresenta anche il numero delle combinazioni semplici di

n oggetti a k a k e che, facendo variare k da 0 a n , si ottengono successivamente i coefficienti dello sviluppo della potenza ennesima del binomio, c.d. di Newton, $(a+b)^n$.

Quest'ultima osservazione rende ragione della denominazione di *coefficiente binomiale* attribuita al simbolo.

Quesito 8. Eliminando il parametro t tra le due equazioni parametriche assegnate si ottiene l'equazione cartesiana della curva.

$$\begin{cases} e^t = x - 2 \\ e^{-t} = y - 3. \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro abbiamo

$$(x-2)(y-3) = 1 \Rightarrow y = 3 + \frac{1}{x-2}$$

$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = -1.$$

L'equazione della tangente nel punto $(3; 4)$ è quindi

$$y - 4 = y'(3)(x - 3) \Rightarrow y = -x - 7.$$

Quesito 9. Lanciando due dadi l'evento E_1 che si ottenga una coppia di somma 10 si può verificare nei tre modi

$$(6; 4) (5; 5) (4; 6).$$

Essendo 36 le coppie di numeri ottenibili con i due dadi, la probabilità di E_1 è

$$p(E_1) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Sia E_2 l'evento che in 6 lanci l'evento E_1 si verifichi 2 volte. Il calcolo della probabilità di E_2 rientra nel classico «problema delle prove ripetute».

Per risolvere il quesito occorre distinguere se sia prefissato o meno l'ordine in cui i due eventi E_1 (di probabilità $1/12$) dovranno verificarsi.

Se supponiamo prefissato tale ordine (ad esempio vogliamo che la coppia di somma 10 compaia le prime due volte delle 6 prove), per il teorema della probabilità composta, la nostra probabilità (che per comodità indichiamo con p^*) sarà data dal prodotto di due fattori uguali a $1/12$ e quattro fattori uguali a $11/12$, sarà cioè

$$p^* = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4.$$

Evidentemente lo stesso valore si ottiene prefissando un qualunque altro ordine di successione dei due eventi E_1 .

Ma quanti sono gli ordini che si possono prefissare? Sono tanti quante sono le combinazioni di classe 2 di 6 oggetti.

Pertanto l'evento E_2 considerato dal quesito è totale dei $\binom{6}{2}$ eventi di probabilità p^* , cioè

$$p(E_2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4.$$

Generalizzando opportunamente questa formula possiamo facilmente ricavare anche le probabilità che l'evento E_1 (coppia di facce a somma 10) si verifichi 0, 1, 3, 4, 5, 6 volte nelle 6 prove. Basterà sostituire nella formula

$$p(x) = \binom{6}{x} \left(\frac{1}{12}\right)^x \left(\frac{11}{12}\right)^{6-x} \quad (4)$$

alla variabile x successivamente i valori 0, 1, 3, 4, 5 o 6.

Questa osservazione ci permetterà di rispondere più rapidamente alla terza parte del quesito.

Sia E_3 l'ultimo evento considerato dal quesito cioè che la coppia di somma 10 compaia *almeno* 2 volte in 6 lanci. La probabilità di questo evento è uguale alla probabilità contraria alla probabilità che E_1 si verifichi 0 volte oppure 1 volta. Quindi utilizzando la (4) avremo

$$\begin{aligned} p(0) &= \binom{6}{0} \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^6 & p(1) &= \binom{6}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5 \\ p(0) + p(1) &= \left[\binom{6}{0} + \binom{6}{1} \right] \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5 = \\ &= (1 + 6) \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5 = 7 \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5, \end{aligned}$$

da cui $p(E_3) = 1 - 7 \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5$.

Ovviamente saremmo pervenuti allo stesso risultato, ma con qualche conto in più, calcolando la somma delle probabilità $p(x)$ con $x = 2, 3, 4, 5, 6$, cioè

$$p(E_3) = \sum_{x=2}^6 \binom{6}{x} \left(\frac{1}{12}\right)^x \left(\frac{11}{12}\right)^{6-x}.$$

Quesito 10. La risposta al quesito può essere fornita mediante un ragionamento molto elementare. Supponiamo che l'intera popolazione consti soltanto di cinque individui. Con un'età media di 30 anni l'intera popolazione conta complessivamente 150 anni. Se il 40% delle cinque unità ha 60 anni significa che due individui hanno 60 anni e quindi 120 anni in due. Per le 3 unità rimanenti (di età inferiore a 60) restano soltanto 30 anni e pertanto essi non potranno avere che 10 anni ciascuno. Se poi i primi due individui sono «over 60», i rimanenti 3 avranno necessariamente meno di 10 anni. In questo secondo caso si ricava però che l'età degli «over 60» dev'essere inferiore a 75 anni altrimenti gli individui rimanenti avrebbero un'età nulla o negativa.

Si conclude che la risposta al quesito è, in ogni caso affermativa.

Il discorso non cambia molto, anche se è un po' meno intuitivo, se si ragiona in termini di medie ponderate. Anche qui consideriamo prima il caso limite in cui il 40% = $\frac{2}{5}$ della popolazione abbia esattamente un'età media di 60 anni. Indichiamo con X l'età media della restante parte della popolazione e calcoliamo la media aritmetica ponderata delle due età imponendo che sia uguale a 30:

$$\mu = \frac{2}{5} 60 + \frac{3}{5} X = 30.$$

Risolvendo l'equazione si ha

$$X = \frac{5}{3} \left(30 - \frac{2}{5} 60 \right) = 10.$$

Dunque ritroviamo che l'età media della popolazione di quel Paese può essere di 30 anni se il restante 60% della popolazione ha un'età media di 10 anni.

Nel caso in cui l'età media degli «over 60» (40% della popolazione) sia maggiore di 60, sia M tale media e sia ancora X l'età media degli «under 60» (60% della popolazione). Si avrà analogamente al caso precedente:

$$\mu = \frac{2}{5} M + \frac{3}{5} X = 30$$

con $M > 60$ e $0 < X < 60$.

Risolvendo l'equazione avremo:

$$2M + 3X = 150$$

$$X = \frac{150 - 2M}{3},$$

e, tenendo conto dei vincoli di M e X ,

$$60 < M < 75 \quad 0 < X < 10.$$

Si conclude che nelle condizioni poste dal quesito l'età media della popolazione può essere uguale a 30 anni a patto che l'età media M del 40% della popolazione che ha 60 anni o più soddisfi alla limitazione

$$60 \leq M < 75.$$

Commento alla prova

Il tema è conforme, per quanto concerne la struttura, a quanto stabilito dal MIUR nel 2001 per il Liceo Scientifico. Per ciò che si riferisce ai contenuti e alla formulazione delle questioni purtroppo vi è stato un notevole passo indietro rispetto agli anni scorsi.

I problemi - I due problemi lasciano un po' perplessi. Si tratta infatti di due problemi che insistono essenzialmente su argomenti analoghi. Il primo riguarda in sostanza lo studio di grafici di funzioni e il calcolo di integrali di aree e volumi; il

secondo problema riguarda ancora lo studio di grafici di funzioni e il calcolo di integrali e inoltre richiede la risoluzione numerica di una equazione.

Avendo a disposizione due problemi sarebbe stato più opportuno coprire meglio il vasto spettro di argomenti che costituiscono il programma di matematica anziché limitarsi alle domande standard riguardanti l'Analisi matematica.

Una seconda ragione di perplessità proviene dalla natura delle domande che compaiono in ciascun problema. Tali domande non sembrano seguire un ordine logico ma si ha invece l'impressione che siano elencate in maniera piuttosto casuale, avendo come unico obiettivo quello di verificare in modo sporadico abilità algoritmiche che, in assenza di un collegamento logico tra i quesiti, appaiono necessariamente fine a se stesse. L'immagine della matematica che risulta da questi problemi è quindi purtroppo la solita: una disciplina certamente difficile, più che altro, noiosa e sostanzialmente inutile.

Con questi precedenti è inutile piangere sulla cattiva figura che la nostra Scuola fa non solo nelle indagini valutative internazionali, come la famosa Indagine P.I.S.A., ma anche in quelle nazionali come l'indagine di valutazione di sistema svolta dall'INVALSI.

Occorre inoltre fare una osservazione di lessico. Nel problema 2 si dice che «la curva C è rappresentativa della funzione assegnata» e si chiede quindi di «disegnare C ». Sarebbe stato più opportuno, e più preciso, dire che C è il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano l'equazione che rappresenta la funzione assegnata e, inoltre, dire che ciò che si richiede è tracciare l'andamento della curva C .

Il Questionario - Nel quesito 1 la definizione di «sezione aurea» è senza dubbio interessante nell'ambito della storia della matematica e ha un posto importante tra gli strumenti matematici elementari utili per la descrizione di diversi aspetti della realtà. Tale nozione non sembra tuttavia così centrale da poter ritenere con certezza che sia necessariamente nota ad ogni studente. Per tale ragione nell'enunciare il quesito sarebbe stato certamente più opportuno ricordare la nozione di sezione aurea. Quanto poi alla dimostrazione richiesta, questa è senza dubbio elementare ma richiede una certa dose di ingegnoseria e inventiva che non è forse la cosa più probabile da richiedere in sede d'esame. Qualora poi uno studente risulti così colto e così ingegnoso da rispondere alla prima parte del quesito, ci sembra veramente riduttivo e privo di senso impegnarlo in un calcolo acrobatico, privo di qualunque significato intellettuale, come quello richiesto.

Il quesito 2, come poi i quesiti 5 e 7, iniziano con la richiesta di «dare una definizione di ...». Una domanda di questo tipo è molto pericolosa per almeno due ordini di considerazioni. La prima è di natura disciplinare ed è una conseguenza della struttura stessa della matematica. Infatti gli oggetti matematici non hanno normalmente un'unica possibile definizione, univocamente individuata, ma ogni loro possibile de-

finitione dipende dal contesto in cui l'oggetto stesso si intende collocato. Per rimanere nell'esempio del presente quesito, diversa è la definizione di tangente che può essere assegnata nell'ambito della geometria algebrica rispetto a quanto può essere detto nel contesto della geometria differenziale.

Il secondo ordine di considerazioni è di natura pedagogica e didattica. Chiedere, nei quesiti, enunciati di definizioni oppure ancora enunciati e dimostrazioni di teoremi porta inevitabilmente gli studenti ad «organizzarsi» mediante serie di «bigini» tascabili oppure dispositivi elettronici mascherati nella maniera più ingegnosa.

Alla luce di queste considerazioni è bene aver cura di precisare che ciò che viene richiesto è una delle possibili definizioni e, analogamente, «uno dei possibili significati o legami o collegamenti» con altri enti matematici eventualmente coinvolti.

Nei quesiti 3 e 4 per fornire la risposta occorre fare un complesso di calcoli che appaiono inutilmente complicati e per il loro svolgimento il contributo del ragionamento sembra secondario.

In definitiva questi quesiti sembrano valutare solamente il possesso di abilità algoritmiche nonché la conoscenza di qualche formula precostituita la cui applicazione acritica permette di ottenere più agevolmente il risultato richiesto.

Per il quesito 4 poi c'è una ulteriore osservazione da fare. Per un insegnamento efficace della matematica (si dice da più parti), occorre «partire dal mondo reale». Ma se il «mondo» di riferimento viene analizzato con superficialità e quindi risulta solo apparentemente «reale», lo studente va in confusione. Poiché gli studenti sanno benissimo che, normalmente, le lattine sono chiuse con sovrapposizioni di lembi di latta (o sulla parte laterale o sul fondo o su entrambe le parti) ci sembra grottesco suggerire che lo spessore della latta si può considerare trascurabile e ignorare del tutto la quantità di latta che entra in gioco nel processo tecnico di chiusura ermetica del contenitore.

Un'osservazione di lessico - Nel quesito 6 la richiesta «si determini» o è approssimativa e imprecisa o corrisponde alla usuale caratteristica del linguaggio comune di esprimere proposizioni e richieste basandosi maggiormente sulla ricchezza del contesto e sulla suggestione delle parole usate anziché sulla precisione di termini univocamente individuati. Nel caso presente, non ha senso chiedere di «determinare l'omotetia σ » perché essa è già univocamente individuata (o «determinata») mediante i dati assegnati dal quesito. Ciò che invece l'Estensore del quesito voleva probabilmente chiedere è di «determinare l'equazione (o le equazioni !) di σ ». Se questo è il caso, era bene dirlo chiaramente.

Corso di ordinamento

Problema 1

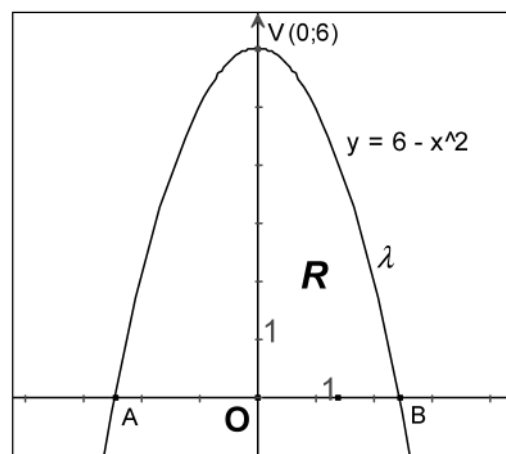
La parabola λ assegnata di equazione $y = 6 - x^2$ è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, volge la concavità verso il basso, ha vertice $V(0;6)$ e interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(-\sqrt{6};0)$ e $B(\sqrt{6};0)$.

Punto 1 – Il volume del solido generato dalla regione R (Fig. 1) nella rotazione completa attorno all'asse y si ottiene agevolmente calcolando l'integrale tipico dei solidi di rotazione:

$$V_y = \int_c^d g^2(y) dy$$

dove la figura del piano xy che genera il solido è delimitata dalla funzione $x = g(y)$, dall'asse y e dalle due rette parallele $y = c$ e $y = d$.

Fig. 1



Nel nostro caso la funzione $g(y) = \sqrt{6 - y}$, $c = 0$ e $d = 6$. Il volume V_R richiesto sarà quindi

$$V_R = \pi \int_0^6 g^2(y) dy = \pi \int_0^6 (\sqrt{6 - y})^2 dy =$$

LA TRACCIA MINISTERIALE

Tema di Matematica

CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

Problema 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy , ortogonale e monometrico, si consideri la regione R , finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y .
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R .
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t . Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

Problema 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n ,

l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C , dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.

5. Si calcoli il limite per $n \rightarrow +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Questionario

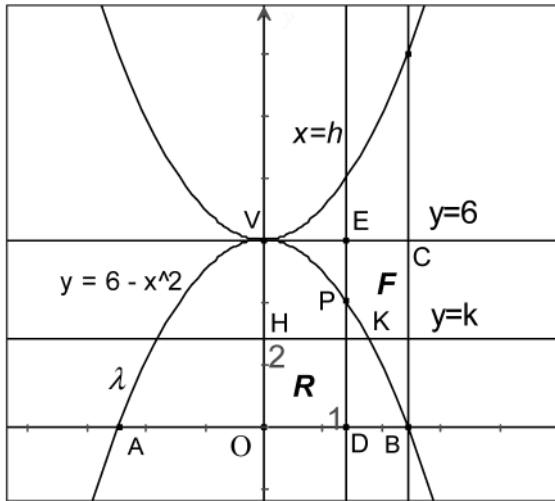
1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva $y = x \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
6. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
7. Se $f(k) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di: $\sin^2(35^\circ) + \sin^2(55^\circ)$ ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \arctg x - \arctg \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

$$= \pi \int_0^6 (6 - y) dy = \pi \left[6y - \frac{y^2}{2} \right]_0^6 = 18\pi.$$

Punto 2 – Il volume del solido generato da **R** nella rotazione attorno alla retta $y = 6$ si può ottenere per differenza tra il volume V_c del cilindro generato dal rettangolo OBCV nella rotazione attorno alla retta $y = 6$ e il volume V_F del solido generato nella stessa rotazione dalla figura **F** delimitata dalla parabola λ , dalla retta $y = 6$ e dal segmento BC (Fig. 2). Il volume del cilindro è

$$V_c = \pi \overline{OV}^2 \cdot \overline{OB} = \pi \cdot 36 \cdot \sqrt{6} = 36\pi\sqrt{6}.$$

Fig. 2



Il volume V_F si calcola con la formula

$$V_F = \pi \int_a^b [r - f(x)]^2 dx$$

dove $y = r$ è l'asse di rotazione, $y = f(x)$, $x = a$ e $x = b$ sono gli elementi che con l'asse di rotazione individuano la figura **F** che genera il solido. Nel nostro caso, essendo $r = 6$, $f(x) = 6 - x^2$, $a = 0$ e $b = \sqrt{6}$ si ha

$$\begin{aligned} V_F &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} [6 - (6 - x^2)]^2 dx = \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{36}{5} \pi \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Infine il volume cercato sarà:

$$V = V_c - V_F = 36\pi\sqrt{6} - \frac{36}{5} \pi \sqrt{6} = \frac{144}{5} \pi \sqrt{6}.$$

Ci pare utile sottolineare che allo stesso risultato si perviene in modo più diretto seguendo un ragionamento analogo a quello fatto per il calcolo del volume di cui al punto 5. del problema 1 del tema PNI (Si tratta comunque di una interpretazione diversa di uno stesso calcolo).

Il piano generico ortogonale all'asse x , di equazione $x = h$ ($0 \leq h \leq \sqrt{6}$), taglia il solido secondo la sezione (corona circolare) di area

$$\begin{aligned} S(h) &= \pi \overline{DE}^2 - \pi \overline{PE}^2 = \\ &= \pi \{36 - [6 - (6 - h^2)]^2\} = \pi (36 - h^4) \end{aligned}$$

e l'elemento di volume del solido sarà

$$dV = \pi (36 - h^4) dh.$$

Integrando nell'intervallo ($0 \leq h \leq \sqrt{6}$) si otterrà il volume richiesto

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{6}} (36 - h^4) dh = \pi \left\{ 36\sqrt{6} - \left[\frac{h^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} \right\} = \frac{144}{5} \pi \sqrt{6}.$$

Punto 3 – Calcoliamo preventivamente l'area S_R della regione **R** (metà di un settore parabolico) servendoci del teorema di Archimede.

$$S_R = \frac{2}{3} \overline{OB} \cdot \overline{OV} = \frac{2}{3} \sqrt{6} \cdot 6 = 4\sqrt{6}.$$

La retta $y = k$ ($0 \leq k \leq 6$) interseca la parabola λ nel punto $K(\sqrt{6 - k}; k)$ (Fig. 3) e divide la regione **R** in due parti delle quali quella delimitata dai segmenti HK e HV e dalla parabola λ è la metà di un altro settore parabolico. Sempre con il teorema di Archimede calcoliamo l'area $S(k)$ di questa parte e imponiamo che sia metà dell'area S_R della regione **R**:

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{2}{3} \overline{HV} \cdot \overline{HK} = \frac{2}{3} (6 - k) \sqrt{6 - k} \\ \frac{2}{3} \sqrt{(6 - k)^3} &= 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{(6 - k)^3} = 3\sqrt{6} \\ \Rightarrow (6 - k)^3 &= 54 \Rightarrow 6 - k = 3\sqrt[3]{2} \\ \Rightarrow k &= 6 - 3\sqrt[3]{2} = 3(2 - \sqrt[3]{2}). \end{aligned}$$

Punto 4 – Sia τ la retta tangente alla parabola λ in un suo punto generico T ($t; 6 - t^2$) con ($0 < t < \sqrt{6}$) (Fig. 3). Essendo $y'(x) = -2x$ la derivata di λ , l'equazione della tangente τ sarà

$$y + t^2 - 6 = -2t(x - t).$$

La tangente τ incontra gli assi nei punti

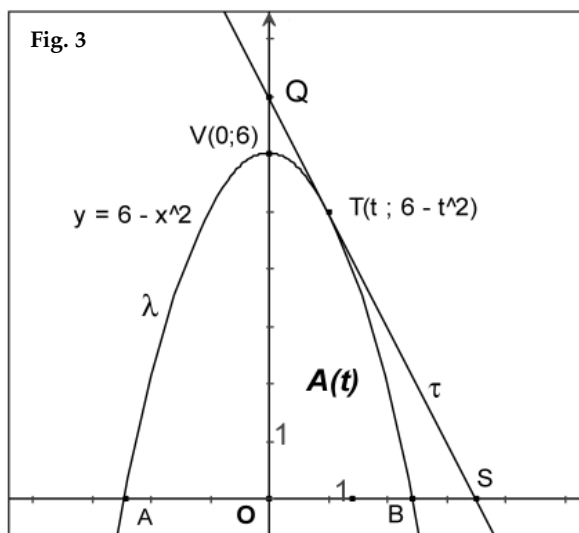
$$S\left(\frac{t^2 + 6}{2t}; 0\right) \text{ e } Q(0; 6 + t^2)$$

e il triangolo (OSQ) ha l'area

$$A(t) = \frac{1}{2} \overline{OS} \cdot \overline{OQ} = \frac{1}{2} \frac{t^2 + 6}{2t} (t^2 + 6) = \frac{(t^2 + 6)^2}{4t}$$

dalla quale si $A(1) = 49/4$.

1. $g(y)$ è la funzione inversa di $y = 6 - x^2$ limitata all'intervallo $(0, +\infty)$ perchè la parabola λ non è invertibile in tutto il suo dominio R .



Punto 5 – La funzione è $A(t) = \frac{(t^2 + 6)^2}{4t}$ è continua e derivabile nell'intervallo $(0 < t < \sqrt{6})$ e la sua derivata

$$A'(t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4t(t^2 + 6)t - (t^2 + 6)^2}{t^2} = \frac{3(t^2 + 6)(t^2 - 2)}{4t^2}.$$

$A'(t)$ si annulla per $t = \pm \sqrt{2}$ e nell'intervallo $(0 < t < \sqrt{6})$ risulta negativa per $0 < t < \sqrt{2}$ e positiva per $\sqrt{2} < t < \sqrt{6}$, quindi in $t = \sqrt{2}$ l'area $A(t)$ è minima. Tale valore dell'area è $8\sqrt{2}$.

Problema 2

Si veda la soluzione del problema 2 PNI.

Questionario

I quesiti 1; 2; 3 e 6 sono stati già svolti nel tema del corso PNI. Per le loro soluzioni si rimanda pertanto a tali svolgimenti.

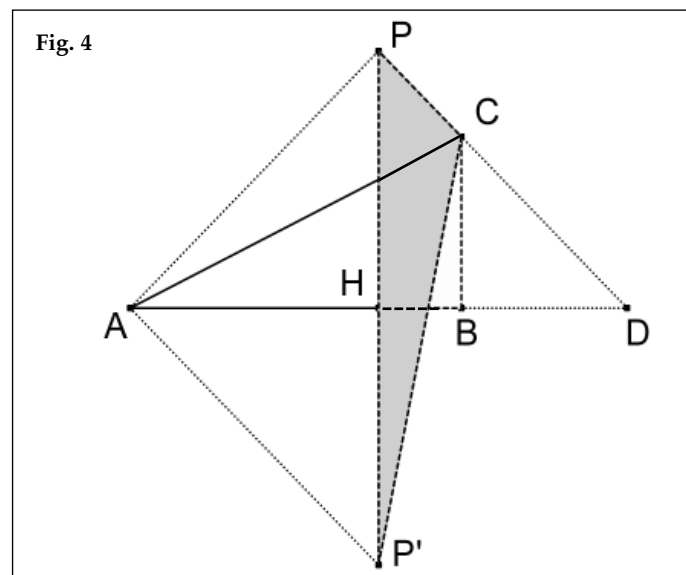
Quesito 4. La via algebrica è la più semplice e immediata. Si tratta di dimostrare che il prodotto di due numeri, la cui somma s è costante, è massimo quando i due numeri sono uguali. Se la somma è s siano x ed $s - x$ i due numeri. Si ha:

$$p(x) = x(s - x) = sx - x^2.$$

La funzione $p(x)$ rappresenta una parabola che volge la concavità verso il basso e pertanto il suo massimo si trova nel vertice, cioè per $x = s/2$.

Molto più interessante è la dimostrazione per via geometrica. Osserviamo che la proposizione è equivalente alla seguente: tra tutti i triangoli rettangoli di cui sia data la somma dei cateti, quello di area massima è il triangolo rettangolo isoscele.

Sia ABC un triangolo rettangolo in B (Fig. 4) e sia $AB > BC$. Si prolunghi AB con un segmento $BD = BC$, cosicché risulterà $AD = AB + BC$.



Si congiunga D con C e per il punto A si mandi la perpendicolare AP alla retta DC . Per il punto P si tracci PH parallelo a BC e sia P' il simmetrico di P rispetto alla retta AD . Il triangolo rettangolo isoscele AHP ha la stessa somma dei cateti del triangolo ABC . È facile verificare che l'area di AHP è maggiore dell'area di ABC . Infatti le due aree si possono pensare ottenute togliendo dal quadrangolo $ABCP$ rispettivamente il trapezio $HBCP$ e il triangolo ACP . Ma mentre il trapezio $HBCP$ è minore del triangolo $PP'C$ (hanno la stessa altezza HB ma la base PP' del triangolo è maggiore della somma delle basi del trapezio), il triangolo ACP è equivalente al triangolo $PP'C$. Si conclude che AHP ha l'area maggiore rispetto al triangolo ABC . Osserviamo da ultimo che la stessa dimostrazione rimane valida anche nel caso in cui l'angolo in B non sia retto e si generalizza la proposizione deducendo che il triangolo isoscele ha area massima rispetto a tutti i triangoli di cui sia data la somma di due lati e l'angolo compreso.

Quesito 5. È sostanzialmente lo stesso quesito di cui al n. 5 del questionario PNI e, come quello, risulta mal posto. Per la definizione del numero e si rimanda a quella già riportata nella soluzione del quesito 5 PNI. Per dimostrare invece che la derivata di e^x è e^x basta calcolare il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

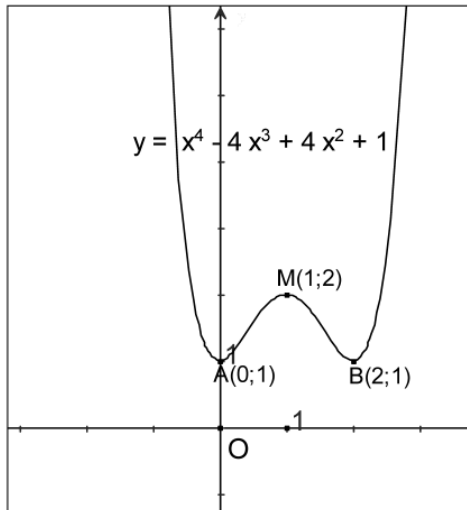
essendo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ (limite fondamentale).

Quesito 7. La funzione $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, ponendo $f(x) = 2$, si traduce nell'equazione

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

che non è risolubile algebricamente.

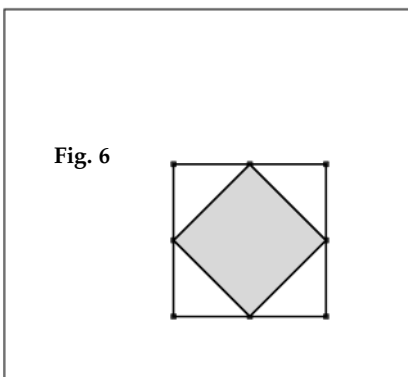
Fig. 5



Studiando sommariamente la funzione $f(x)$ (dominio, limiti agli estremi del dominio, derivata, ecc.) si riconosce (Fig. 5) che essa assume il valore 1 (minimo assoluto) nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = 2$. Pertanto $f(x)$ non può intersecare l'asse delle x e quindi l'equazione (1) non ammette soluzioni reali.

Quesito 8. L'ottaedro indicato nel quesito è regolare per ragioni di simmetria. Esso si compone di due piramidi rette a base quadrata comune di area di base uguale alla metà dell'area della faccia del cubo (Nella Figura 6 è riportata la sezione del cubo contenente la base delle piramidi).

Fig. 6



L'altezza delle due piramidi è uguale alla metà del lato del cubo. Se il lato del cubo è l , la base comune delle piramidi ha area $l^2/2$ e l'altezza relativa misura $l/2$. Pertanto il volume di ciascuna piramide è

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{12} l^3.$$

Si deduce che il rapporto tra il volume dell'ottaedro e quello del cubo è $1/6$.

Quesito 9. È un quesito molto facile (ai limiti della banalità!) che si risolve osservando che gli angoli di 35° e 55° sono complementari.

$$\begin{aligned} \sin^2(35^\circ) + \sin^2(55^\circ) &= \sin^2(35^\circ) + \sin^2(90^\circ - 35^\circ) = \\ &= \sin^2(35^\circ) + \cos^2(35^\circ) = 1. \end{aligned}$$

Quesito 10. - La funzione data,

$$f(x) = \arctg x - \arctg \frac{x-1}{x+1},$$

è definita in $\mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$, e la sua derivata è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(1+x^2)} = 0. \end{aligned}$$

Il valore nullo della derivata implica che $f(x)$ è costante.

Per calcolare il valore di tale costante possiamo valutare $f(x)$ in due punti (uno per ciascuno degli intervalli la cui unione costituisce l'insieme di definizione di f). Siano $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = 0$ le ascisse di tali punti (la scelta è suggerita per facilitare i calcoli); si ha:

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{3}) &= \arctg(-\sqrt{3}) - \arctg \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} = \\ &= -\frac{1}{3}\pi - \frac{5}{12}\pi = -\frac{3}{4}\pi \\ f(0) &= \arctg(0) - \arctg(-1) = \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

Il grafico della funzione è riportato nella figura 7.

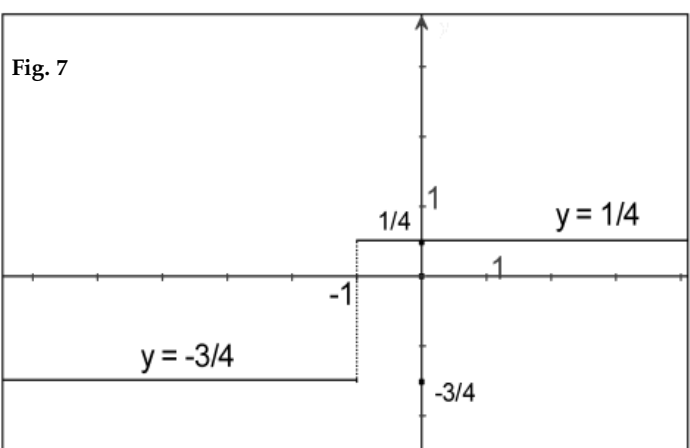


Fig. 7



Laura Fiorini - Massimo Greco
**PROPOSTE DIDATTICHE
 CON POWERPOINT**

1912 - pp. 128 + 32 di guida operativa - € 16,00

Caratteristiche di una presentazione multimediale - PowerPoint in classe - Prima della realizzazione delle diapositive - Presentare un argomento - Costruire sfondi per una drammatizzazione - Presentare dati in forma grafica - Costruire un ipertesto multimediale - Costruire un percorso autobiografico per raccontarsi - Un racconto multimediale - Costruire un archivio elettronico - Quiz con PowerPoint - Recitare una poesia utilizzando il computer - Disegnare all'interno di una diapositiva - Costruire un sito con PowerPoint - Effettuare una presentazione in pubblico.

Dianora Bardi
**DALLA MATITA ROSSA E BLU
 ALLA STRUTTURA DEI TESTI**
 Suggerimenti da XML

1740 - pp. 96 + 32 di guida operativa + CD - € 20,00

Prefazione (G. Degli Antoni) - Introduzione: Perché scegliere Calvino? - Individuazione degli elementi di struttura in brevi componimenti - Dalla combinazione di più file alla creazione di nuovi documenti - Individuazione di percorsi nel testo attraverso la selezione degli elementi di struttura: la favola, l'intreccio, il riassunto - Se una mattina a scuola l'insegnante...

Il CD-Rom contiene il Visual Editor di XML.



EDITRICE
LA SCUOLA

NSRF 48

Commento alla prova

Per i problemi si possono ripetere qui tutti i giudizi (critici!) già espressi a proposito dei due problemi assegnati per il Corso Sperimentale PNI, con una ulteriore aggravante. Precisamente, se si poteva in un qualche modo capire e giustificare l'insistenza sugli aspetti algoritmici, a danno di quelli concettuali, nei temi assegnati per il Corso PNI, questo fatto appare del tutto criticabile nel caso del Corso di Ordinamento. Bisogna invece rilevare che l'insistenza su calcoli ripetitivi e fine a se stessi è forse ancora maggiore nel problema 1 del Corso di Ordinamento di quanto non sia invece nel Corso Sperimentale. Il problema 2 è lo stesso in entrambi i Corsi, salvo una richiesta presente per il Corso PNI che non viene invece fatta per il Corso di Ordinamento.

Anche qui è opportuna una osservazione di lessico. Nel problema 1 si parla di «una regione R, 'finita', delimitata da ...»; poiché una «regione» di un piano (euclideo) non è altro che un insieme di punti opportunamente caratterizzato, è utile osservare che per «regione finita», cioè «insieme finito», non si può che intendere un insieme di punti di *cardinalità finita*, cioè costituito da un numero finito di punti.

Il contesto suggerisce che questa non era l'idea che l'Estensore del problema intendeva esprimere.

Per il questionario valgono le stesse osservazioni critiche fatte per la prova del Corso PNI (peraltro molti quesiti sono comuni e, casualmente, proprio quelli oggetto delle maggiori osservazioni critiche). Sugli altri quesiti non vi è nulla da dire se non che le questioni proposte rimangono circoscritte nell'ambito della disciplina. È sempre latitante, salvo in qualche sporadico caso, la trasversalità e il collegamento con gli altri saperi e con la realtà quotidiana.

Qualche considerazione conclusiva. Sarebbe necessario che gli incaricati della formulazione delle prove avessero ben presenti gli obiettivi della verifica, stabilissero a priori ciò che intendano verificare e proponessero prove e questioni funzionali alla verifica di tali obiettivi.

È necessario, opportuno e ragionevole verificare «contenuti e abilità essenziali», importanti e irrinunciabili nella realizzazione del «profilo» in uscita delineato dalla Riforma. La formazione matematica ipotizzata per tutti gli studenti della Scuola superiore, la c. d. «matematica del cittadino» è diffusamente condivisa, nella sostanza, a tutti i livelli. Sarebbe consigliabile evitare nella verifica curiosità storiche, ancorché importanti e invitanti sul piano squisitamente culturale, ma poco connesse con i problemi reali della società attuale e la realtà quotidiana. Tali questioni vanno affrontate in classe durante l'anno con l'intervento anche dei docenti delle altre discipline, non certo in sede di esami.

Per ulteriori considerazioni si rimanda ai commenti alla prova del 2004².

Mario Marchi - Università Cattolica - Brescia
 Antonio Marro - Dirigente Scolastico

2. A. Marro, «Liceo Scientifico, Esami conclusivi», *Nuova Secondaria*, XXII, n. 4, pp. 85-96.