

Matematica

Antonio Marro

Liceo Scientifico

Problema 1

Punto 1. Studio della funzione

$$f(x) = 2x - 3x^3 \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

La funzione assegnata è algebrica, razionale, intera. Precisamente è una cubica. Passa per l'origine ed è simmetrica rispetto a tale punto. Dunque O è un punto di flesso. Ma andiamo con ordine, si ha:

Dominio di f: $\mathbb{R}$.

$$\text{Zeri: } 2x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x(2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}; x_2 = 0; \quad x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Segno di f: } x(2 - 3x^2) > 0 \Rightarrow$$

$$f(x) > 0 \text{ in } \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right);$$

$$f(x) < 0 \text{ in } \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right).$$

$$\text{Derivate: } f'(x) = 2 - 9x^2 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}; f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \pm \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

LA TRACCIA MINISTERIALE

Tema di Matematica

CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

Problema 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$.

1. Disegnate il grafico G di f .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G . Precisamente: R delimitata dall'asse y , da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

Problema 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC .

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC .
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ metri, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K .

4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K .

Questionario

1. Trovate due numeri reali a e b , $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.
4. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.
5. Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4.$$

Trovate una espressione di $g(x)$.

6. Verificate che le due funzioni $f(x) = 3 \log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a , b e δ . Quale è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?
8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?
9. Calcolate:

$$\int_0^1 \arcsen x dx.$$

10. Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B ?

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2 - 9x^2 > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$m\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right), M\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$$

$$f''(x) = 18x \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f''(x) > 0 \Rightarrow x < 0; f''(x) < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow O(0;0)$ è punto di flesso. Il grafico G della funzione è riportato in Fig. 1.

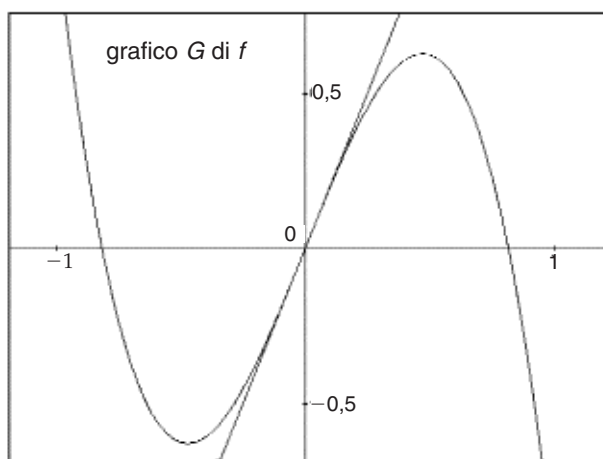


Fig. 1

Punto 2. Lo svolgimento del punto 2 consiste semplicemente nella costruzione del grafico in Fig. 2 in cui è stata isolata la parte del grafico G appartenente al primo quadrante e sono state individuate le regioni finite di piano R ed S descritte nel testo. La retta orizzontale $y = c$, con $0 < c < \frac{4\sqrt{2}}{9}$, incontra la curva G nei punti A e B le cui ascisse sono indicate rispettivamente con a e b .

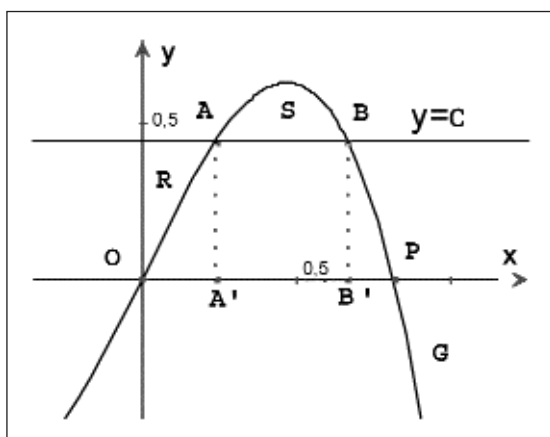


Fig. 2

Punto 3. Le aree delle regioni finite di piano R ed S si calcolano eseguendo rispettivamente i seguenti integrali definiti:

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^a (c - 2x + 3x^3) dx$$

$$\mathcal{A}(S) = \int_a^b (2x - 3x^3 - c) dx.$$

Effettuando i calcoli:

$$\mathcal{A}(R) = \left[cx - x^2 + \frac{3}{4}x^4 \right]_0^a = ca - a^2 + \frac{3}{4}a^4$$

$$\mathcal{A}(S) = \left[x^2 - \frac{3}{4}x^4 - cx \right]_a^b = b^2 - \frac{3}{4}b^4 - cb - a^2 + \frac{3}{4}a^4 + ca$$

e, imponendo la condizione

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(S)$$

si ottiene l'equazione:

$$ca - a^2 + \frac{3}{4}a^4 = b^2 - \frac{3}{4}b^4 - cb - a^2 + \frac{3}{4}a^4 + ca. \quad (2)$$

Eliminando i termini opposti, la (2) diventa

$$b^2 - \frac{3}{4}b^4 - cb = 0. \quad (3)$$

La (3) contiene due incognite. Ma, ricordando che $c = f(b) = 2b - 3b^3$ (il punto B appartiene alla curva G), riducendo i termini simili, l'equazione (3) diventa

$$\frac{9}{4}b^4 - b^2 = 0 \quad (4)$$

le cui soluzioni sono: $b = 0$ e $b = \pm \frac{2}{3}$. Non essendo accettabili, tra le soluzioni della (4), $b = 0$ e $b = -\frac{2}{3}$, il valore dell'ascissa di B cercato è $b = \frac{2}{3}$. Il corrispondente valore di c è:

$$c = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} - 3 \cdot \frac{8}{27} = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} = \frac{4}{9}.$$

Per determinare l'ascissa del punto A occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{4}{9} \\ y = 2x - 3x^3 \end{cases} \Rightarrow 27x^3 - 18x + 4 = 0. \text{ Ma sappiamo che}$$

una delle soluzioni di questa equazione è l'ascissa di B , $x = \frac{2}{3}$, e pertanto dall'equazione residua $9x^2 - 6x - 2 = 0$ si ricavano le soluzioni $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$. La soluzione negativa non è accettabile, perciò l'ascissa di A cercata è $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{3}$.

Ci sembra utile osservare che i valori negativi delle ascisse di A e B scartate sono le soluzioni del problema analogo che si ottiene per simmetria rispetto ad O .

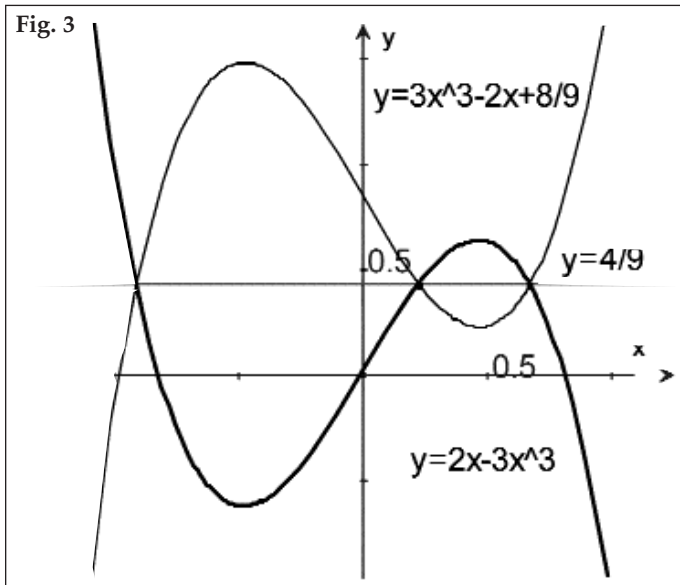
Punto 4. Le equazioni della simmetria assiale di asse orizzontale $y = c$ si possono ricavare con il seguente ragionamento. Se $P(x,y)$ e $P'(x',y')$ sono due punti simmetrici rispetto a $y = c$, il punto medio del segmento PP' avrà per ascissa quella comune a P e P' e per ordinata c . Quindi:

$$\begin{cases} x' = x \\ \frac{y' + y}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2c \end{cases} \text{ e poiché } c = \frac{4}{9}, \text{ le equazioni}$$

$$\text{della nostra simmetria risultano } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + \frac{8}{9} \end{cases} \quad (\sigma).$$

Applicando la sostituzione $\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y + \frac{8}{9} \end{cases}$ associata alla tra-

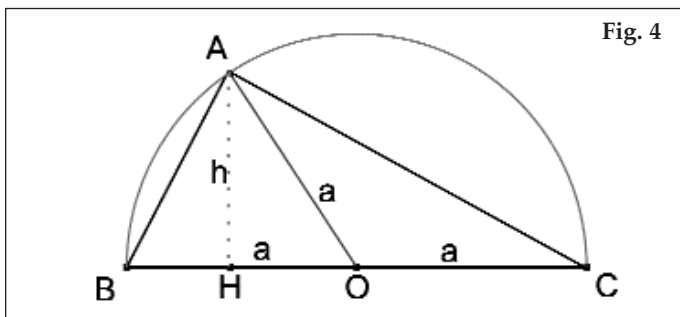
sformazione (σ), l'equazione $y = 2x - 3x^3$ diventa $y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$, che è l'equazione della curva simmetrica cercata. I grafici delle due curve sono riportati in Fig. 3.



Problema 2

Punto 1. Si sa dalla geometria piana che ogni triangolo rettangolo è inscrittibile in una semicirconferenza il cui diametro è l'ipotenusa. Il punto medio O dell'ipotenusa BC è pertanto il centro della semicirconferenza. La mediana AO , essendo uguale al raggio, è, dunque, metà di BC .

Punto 2. Osservando la Fig. 4 si ha:



$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{a^2 - h^2} \\ \overline{BH} &= \overline{BO} - \overline{OH} = a - \sqrt{a^2 - h^2} \\ \overline{HC} &= \overline{OC} + \overline{OH} = a + \sqrt{a^2 - h^2}.\end{aligned}$$

Per il I teorema di Euclide inoltre:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BH}} = \sqrt{2a(a - \sqrt{a^2 - h^2})} = \\ &= \sqrt{2a^2 - \sqrt{4a^4 - 4a^2h^2}}\end{aligned}$$

e, applicando la formula dello sdoppiamento dei radicali doppi,

$$\overline{AB} = \sqrt{2a^2 - \sqrt{4a^4 - 4a^2h^2}} = \sqrt{a^2 + ah} - \sqrt{a^2 - ah}.$$

In modo del tutto analogo:

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{HC}} = \sqrt{2a(a + \sqrt{a^2 - h^2})} = \\ &= \sqrt{2a^2 + \sqrt{4a^4 - 4a^2h^2}} = \sqrt{a^2 + ah} + \sqrt{a^2 - ah}.\end{aligned}$$

Punto 3.

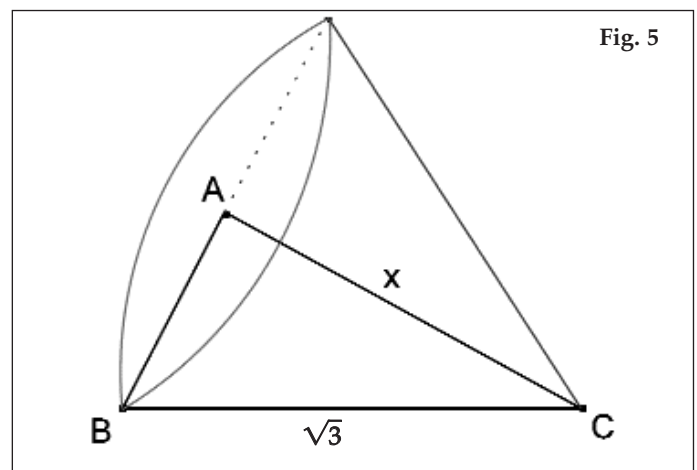
Sapendo che $\overline{BC} = \sqrt{3}$ metri, sia $\overline{AC} = x$ con $0 < x < \sqrt{3}$. Sarà $\overline{AB} = \sqrt{3 - x^2}$. Per il volume del cono (Fig. 5) ottenuto ruotando il triangolo rettangolo attorno al cateto AC avremo:

$V = \frac{1}{3}\pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3}\pi(3 - x^2)x$. Quindi, trascurando la costante moltiplicativa $\frac{1}{3}\pi$, la funzione da rendere massima è, $f(x) = (3 - x^2)x$. Non è difficile, annullando la derivata prima e studiandone il segno, ritrovare che la funzione ha un massimo relativo in $x = 1$.

Sostituendo tale valore di x nella formula del volume, si ottiene quanto vale il volume massimo:

$$V(1) = \left[\frac{1}{3}\pi(3 - x^2)x \right]_{x=1} = \frac{1}{3}\pi(3 - 1)(1^3) =$$

$$\frac{2}{3}\pi(1^3) \approx 2,09439(m^3) \approx 2094,4 \text{ dm}^3 = 2094,4 \text{ l.}$$



Punto 4.

Il settore circolare risultante dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K ha il raggio e l'arco uguali rispettivamente all'apotema e alla circonferenza di base del cono. Ricordiamo che la misura in radianti di un angolo è data dal rapporto tra la lunghezza di un qualsiasi arco avente il centro nel vertice dell'angolo e il suo raggio. Quindi, essendo $\overline{AB} = \sqrt{3 - x^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$, la misura in radianti dell'angolo del settore circolare in questione (Fig. 6) sarà:

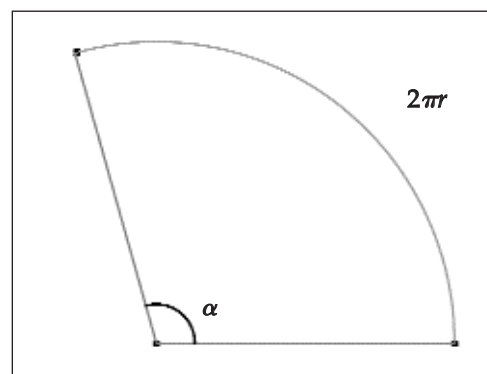


Fig. 6

$\alpha = \frac{2\pi r}{BC} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 5,13 \text{ rad}$. La misura in gradi sessagesimali si ottiene dalla formuletta di conversione che si richiama alla proporzionalità diretta esistente tra le misure in gradi e quelle in radianti degli stessi angoli:

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha \approx \frac{180^\circ}{\pi} 5,13 \approx 293,93^\circ \approx 293^\circ 56'.$$

Questionario

Quesito 1. Si tratta di un caso particolare del quesito, assai comune, trovare due numeri a e b di cui sono assegnati la somma s e il prodotto p . La soluzione si ottiene risolvendo il sistema simmetrico elementare:

$$\begin{cases} a + b = s \\ a \cdot b = p \end{cases} \text{ le cui soluzioni sono la coppia di radici dell'equazione}$$

$t^2 - st + p = 0$, $(t_1; t_2)$ e la sua simmetrica, $(t_2; t_1)$. Nel nostro caso si ha $s = p$ e $a \neq b$ per cui l'equazione risolvibile diventa $t^2 - pt + p = 0$ le cui soluzioni sono

$$a = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4p}}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4p}}{2}$$

(con $p < 0 \vee p > 4$, dovendo essere $a \neq b$) e la coppia simmetrica.

Quesito 2. Un cilindro si dice equilatero quando il diametro della sua base è uguale all'altezza. Se il raggio di base del cilindro è r , la sfera circoscritta ad esso avrà necessariamente il raggio $R = r\sqrt{2}$ (Nella Fig. 7 è rappresentata la sezione dei due solidi con un piano passante per il centro della sfera e parallelo alle generatrici del cilindro)

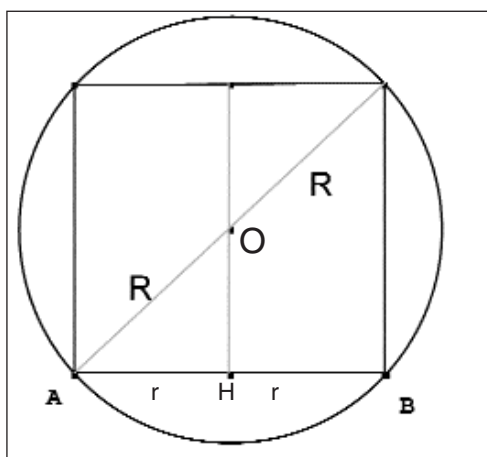


Fig. 7

Calcoliamo le superficie totali ST_c e ST_s del cilindro e della sfera rispettivamente:

$$ST_c = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

$$ST_s = 4\pi R^2 = 4\pi (r\sqrt{2})^2 = 8\pi r^2$$

$$\frac{ST_c}{ST_s} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}.$$

Quesito 3. Una funzione con le caratteristiche richieste può essere certamente una cubica di equazione

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a < 0.$$

Tenuto conto delle condizioni imposte, si ottiene il sistema simbolico (*) che, esplicitato, porta al sistema lineare (**) di 4 equazioni nelle 4 incognite a, b, c, d .

$$(*) \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(-1) = 2 \\ f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow (**) \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ -a + b - c + d = 2 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0. \end{cases}$$

La soluzione del sistema fornisce i seguenti valori delle incognite: $a = -\frac{1}{4}$; $b = 0$; $c = \frac{3}{4}$; $d = \frac{5}{2}$.

Quesito 4. L'asserto si può dimostrare in più modi. Quello che mi sembra più diretto e lineare è il seguente. La ricerca delle soluzioni reali dell'equazione trascendente $e^x + 3x = 0$ equivale alla ricerca degli zeri della funzione $f(x) = e^x + 3x$ (Fig. 8). Osserviamo che tale funzione è, in tutto $\mathbb{R}$, continua, monotona crescente e con estremi inferiore e superiore $-\infty$ e $+\infty$ rispettivamente. Pertanto essa interseca l'asse delle x in uno ed un sol punto di ascissa $x \approx -0,26$.

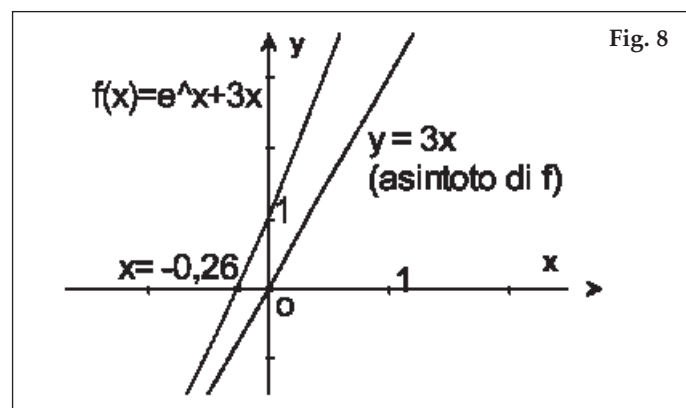


Fig. 8

Quesito 5. Le condizioni imposte presuppongono una funzione che presenta una discontinuità di terza specie in $x = 2$. Una funzione molto semplice che risponde alle caratteristiche richieste è

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 4 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

Infatti si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

Quesito 6. Date le funzioni

$$f(x) = 3\log x \quad \text{e} \quad g(x) = \log(2x)^3$$

$$\text{si ha: } f'(x) = \frac{3}{x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{(2x)^3} \cdot 3(2x)^2 \cdot 2 = \frac{3}{x}.$$

La giustificazione risiede nel fatto che le due funzioni differiscono per una costante. Infatti si ha:

$$g(x) = \log(2x)^3 = 3 \log(2x) = 3 \log x + 3 \log 2 = f(x) + 3 \log 2.$$

Attenzione, i discorsi fatti valgono solo per $x > 0$.

Quesito 7. L'area di un triangolo di lati a e b e angolo compreso δ è dato da $S(\delta) = \frac{1}{2}ab \sin \delta$ (se a e b sono costanti e δ è variabile, l'area del triangolo è funzione di δ). La funzione $S(\delta)$ assume valore massimo quando $\sin \delta = 1$ e quindi $\delta = \frac{\pi}{2}$.

Al quesito si può rispondere anche per via elementare. Se consideriamo (Fig. 9) i triangoli (VAB), (VAC) e (VAM) notiamo che essi hanno due lati uguali, la base a e il lato b . Ma il triangolo (VAM) ha l'area maggiore di quella degli altri due, avendo l'altezza h maggiore sia di KB che di HC, rispettivamente altezze di (VAB) e (VAC). E di tutti i triangoli di base $VA = a$ e aventi il terzo vertice sulla semicirconferenza PMQ , (VAM) ha l'area massima perché ha l'altezza massima.

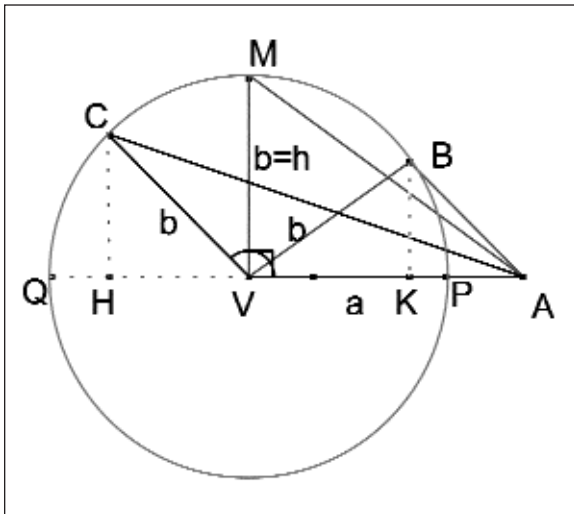


Fig. 9

Quesito 8. Il «grado sessagesimale» è la 360^a parte dell'angolo giro.

Riprendendo la definizione accennata al punto 4 del problema 2 del tema proviamo a chiarire ulteriormente il concetto. Un angolo individua su di una qualsiasi circonferenza con centro nel suo vertice un arco ben determinato. Il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il suo raggio si dice *misura in radianti dell'angolo*. Pertanto il «radiante» è l'angolo che «stacca» su di una qualsiasi circonferenza avente il centro nel vertice dell'angolo un arco di lunghezza uguale al raggio.

Il «grado centesimale» è la 400^a parte dell'angolo giro.

Quesito 9. L'integrale indefinito $\int \arcsen x \, dx$ si calcola per parti, assumendo come fattore finito $\arcsen x$ e come fattore differenziale dx . Si ha:

$$\begin{aligned} \int \arcsen x \, dx &= x \cdot \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsen x + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

Applicando la formula fondamentale del calcolo

integrale, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, essendo nel nostro caso $F(x) = x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2}$, avremo:

$$\int_0^1 \arcsen x \, dx = [x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2}]_0^1 = \arcsen 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Quesito 10. Ricordiamo che si dice applicazione (o funzione) dell'insieme A nell'insieme B ogni corrispondenza che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B. Nel caso degli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ il numero delle possibili applicazioni di A in B è uguale al numero delle disposizioni con ripetizione dei 3 elementi a, b, c sui quattro «posti» indicati dai numeri 1, 2, 3, 4. Cioè:

$$D'_{3,4} = 3^4 = 81.$$

Commento alla prova

Il tema rispetta la struttura della prova stabilita dal MIUR nel 2001 per il Liceo Scientifico, la quale prevede *due problemi (articolati al loro interno in almeno tre quesiti, possibilmente indipendenti tra loro) e un questionario consistente in altri quesiti (in numero da 6 a 10) riguardanti argomenti del programma*. Il candidato è tenuto a risolvere, a scelta, uno dei due problemi e circa la metà dei quesiti del questionario. I quesiti quest'anno sono 10 e viene richiesta la soluzione di cinque di essi.

Il primo problema è costituito da quattro punti che, in effetti, non sono altrettante questioni. Il punto 2 infatti è una «guida» sufficientemente chiara e precisa per individuare gli elementi utili per lo svolgimento del punto 3. Pertanto possiamo dire che i punti 2 e 3 costituiscono un'unica questione. I tre quesiti sono sostanzialmente indipendenti, nel senso che nessuna soluzione è propedeutica per le successive (proporre questioni indipendenti è sempre consigliabile). Si tratta di un problema «classico», assai frequente nella storia della prova scritta di matematica. Il candidato deve studiare una cubica passante per l'origine degli assi, che non presenta alcuna difficoltà. Il resto è fattibile senza eccessive complicazioni di calcolo. È il problema verso il quale si è orientata prevalentemente la scelta dei candidati. Nel secondo problema vi sono solo questioni di geometria piana e solida.

Dei quattro quesiti i primi tre sono indipendenti mentre il quarto dipende dal terzo. Interessante, ai fini dell'avvicinamento alla realtà dell'apprendimento matematico, è la richiesta della valutazione approssimata di un angolo e del calcolo non solo del volume del cono ma anche della sua capacità in litri. Al punto 2, per dare forma più semplice alle espressioni delle misure dei cateti del triangolo, è necessario ricordare la formula dello sdoppiamento dei radicali doppi, di solito poco familiare perché poco usata dagli studenti. In questa occasione non vi è stato problema solo perché al quesito si risponde, nella sostanza, anche fermandosi alle espressioni più grezze delle misure dei cateti.

Piano Nazionale Informatica

Problema 1

Punto 1. - Studio della curva γ di equazione

$$y = ke^{-\lambda x^2} \quad (k, \lambda) \in \mathcal{R}^+$$

Si tratta di una famiglia $G(k, \lambda)$ di curve «gaussiane». Osservazioni preliminari che si desumono «a vista» dall'equazione:

- *Dominio:* $\mathcal{R}$.
- *Segno:* $y > 0 \quad x \in \mathcal{R}$.
- *Simmetrie:* è una funzione pari (c'è simmetria rispetto all'asse delle ordinate).
- *Intersezioni con gli assi:* incontra l'asse y in $(0, k)$ che è anche punto estremante, non interseca l'asse x ma quest'ultimo è asintoto orizzontale per la funzione essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^+.$$

Il questionario si compone di quesiti molto vari, non banali né eccessivamente difficili. Il grado di difficoltà, come è inevitabile, non è omogeneo, ma la cosa a nostro avviso, non connota negativamente il questionario. Toccando argomenti diversi, i quesiti offrono uno spettro sufficientemente ampio per una verifica efficace della preparazione matematica dei candidati. Sono necessarie capacità di intuito e di argomentazione, ma anche una conoscenza non superficiale dei concetti e delle definizioni. I più dotati hanno certamente potuto mostrare la solidità della loro preparazione e la loro capacità creativa, anche perché alcune questioni, come i problemi di massimo e minimo, si potevano risolvere, oltre che con l'ausilio dell'analisi matematica, pure per via elementare. In conclusione ci sembra un buon tema, adeguato all'obiettivo e con richieste ragionevoli nel loro grado di difficoltà.

LA TRACCIA MINISTERIALE

Tema di Matematica

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

Problema 1

Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ ;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da Karl Friedrich Gauss, 1777-1855). Una *media* $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

Problema 2

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{2b} x + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b , esiste sempre un valore di x tale che

$$f(x) = \frac{a+b}{2}.$$

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne

fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

Questionario

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
4. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B ?
5. Dare un esempio di funzione g , non costante, tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

6. Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
8. Si trovino due numeri reali a e b , $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x\sqrt{3} - y \\ y &\rightarrow x + y\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Di quale trasformazione si tratta?

Derivate:

$$f'(x) = -2k\lambda x e^{-\lambda x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ per } x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ per } x < 0; f'(x) < 0 \text{ per } x > 0$$

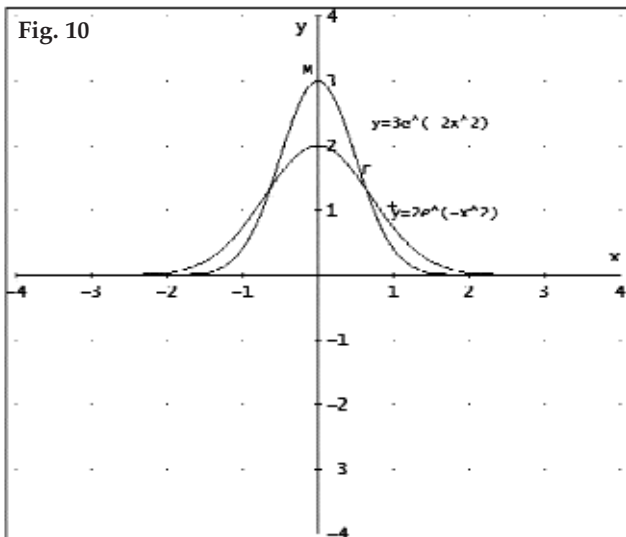
$\Rightarrow$ si conferma che $(0, k)$ è punto estremo e, precisamente è punto di massimo (assoluto).

$$f''(x) = -2k\lambda(e^{-\lambda x^2} - 2\lambda x^2 e^{-\lambda x^2}) = 2k\lambda e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1)$$

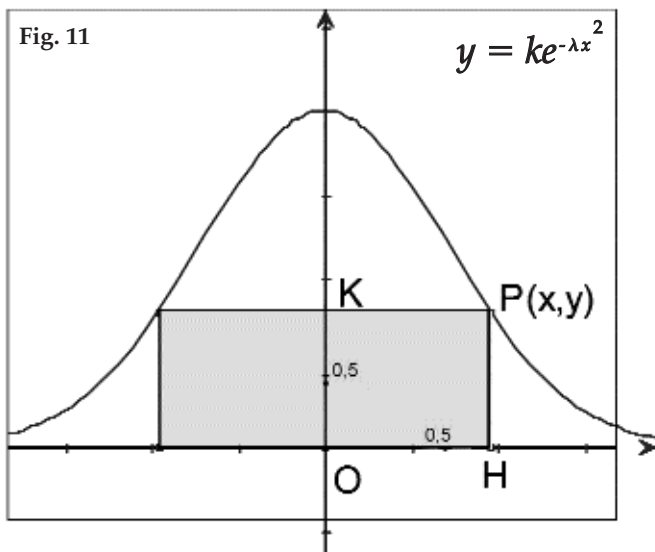
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

$f''(x) > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \vee x > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e quindi la f è concava in tali intervalli, mentre risulta convessa per $-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$; vi sono perciò due flessi $\Rightarrow (\pm \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \frac{k}{\sqrt{e}})$.

Nella Fig. 10 sono riportati i grafici delle due curve corrispondenti ai valori $(k_1 = 3; \lambda_1 = 2)$ e $(k_2 = 2; \lambda_2 = 1)$ rispettivamente. Dai due grafici si desume che il parametro k «agisce» sulle ordinate del massimo e dei flessi mentre λ fa variare l'ascissa dei flessi allargando o restringendo la «campana» attorno all'asse di simmetria.



Punto 2. - Sia $P(x, y)$ un punto qualsiasi del ramo della curva γ appartenente al I quadrante (Fig. 11). La simmetria di γ



rispetto all'asse delle y consente di considerare il rettangolo PHOK che è metà del rettangolo descritto nel testo del tema. L'area di tale rettangolo (che è funzione dell'ascissa x di P) è data da

$$S(x) = \overline{OH} \cdot \overline{HP} = x \cdot y = x k e^{-\lambda x^2}$$

che, a meno del segno e della costante 2λ , coincide con la $f'(x)$ calcolata al punto 1. Quindi:

$$S'(x) = k e^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2) \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

E poiché

$$S'(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}},$$

la $S(x)$ ha il massimo per $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ che è l'ascissa del punto di flesso (di ascissa positiva) trovato nel punto precedente.

L'area massima vale

$$2S\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) = 2k \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{\lambda}{2\lambda}} = k \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{0,858k}{\sqrt{\lambda}}.$$

Punto 3. - Per $\lambda = \frac{1}{2}$ l'area A compresa tra la curva γ e l'asse x è espressa dall'integrale improprio

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = k\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx.$$

Operando la sostituzione di variabile

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = z \Rightarrow dx = \sqrt{2} dz,$$

si ottiene:

$$A = k\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-z^2} dz$$

e poiché $\int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$, si ha $A = k\sqrt{2\pi}$ da cui

$$A = 1 \text{ se } k\sqrt{2\pi} = 1 \text{ cioè } k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Punto 4. - Come viene ricordato nel testo del tema, per $\lambda = \frac{1}{2}$ e $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ l'equazione della curva γ diventa

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (*)$$

e viene chiamata *curva di distribuzione normale standard di Gauss*.

Nella (*) per la variabile casuale z si ha:

valor medio $\mu = 0$ e scarto quadratico medio $\sigma = 1$.

Se $\mu \neq 0$ e $\sigma \neq 1$, la funzione (*) assume l'espressione

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (**)$$

essendo le variabili z e x legate dalla relazione

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

La curva (**) è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$ e su questa retta presenta il valore massimo

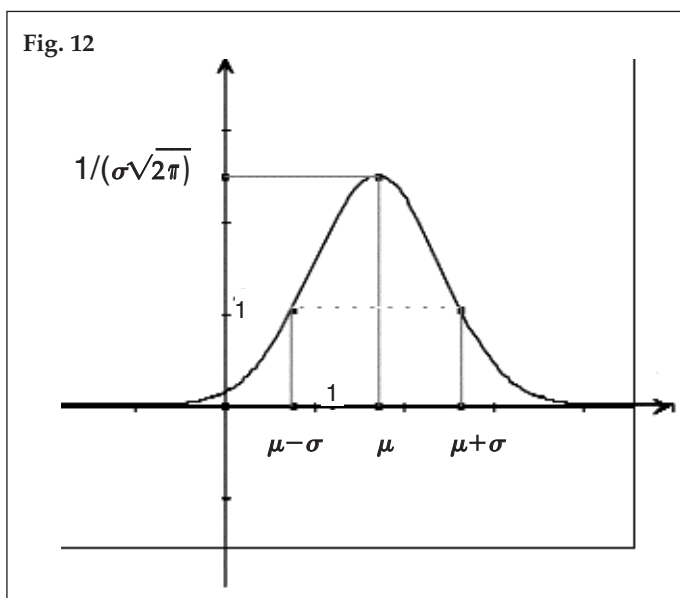
$$y(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

I due flessi cadono nei punti $x = \mu \mp \sigma$.

L'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse è sempre uguale a 1.

Se $\mu > 0$ la gaussiana (**) subisce una traslazione nel verso positivo delle ascisse, mentre si ha una traslazione nel verso opposto se $\mu < 0$. Se $\mu = 0$ torniamo, ovviamente, al caso della (*).

Il parametro σ agisce sulla forma della curva. Precisamente quando σ cresce il massimo della gaussiana si «abbassa», i flessi si «allontanano» dall'asse di simmetria e la curva si «schiaccia» sull'asse delle x . Viceversa se σ diminuisce accade l'opposto. Queste considerazioni sono illustrate nella figura 12.



Problema 2

Punto 1. - La dimostrazione richiesta si ottiene ricordando il seguente teorema che è una generalizzazione del «teorema degli zeri»: «una funzione continua in un intervallo vi assume ogni valore compreso fra due suoi valori particolari qualunque (e quindi fra il minimo ed il massimo, se l'intervallo è limitato)».

Infatti, osservando che la funzione

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{2b} x + x$$

è continua in tutto $\mathcal{R}$ e che risulta

$$f(a) = a, f(b) = b \quad e$$

$$f(a) = a < \frac{a+b}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2} < b = f(b),$$

per il teorema richiamato, la proposizione risulta dimostrata.

Punto 2. - Ponendo nell'espressione della $f(x)$ i valori $a = 2b = 2$ si ottiene la funzione

$$g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} x + x$$

nella quale, moltiplicando e dividendo per 2 il primo addendo, e applicando le formole di duplicazione, si ottiene l'espressione più semplice e compatta

$$g(x) = \frac{1}{2} \sin \pi x + x.$$

Lo studio di $g(x)$ non presenta particolari difficoltà.

– *Dominio di g :* $\mathcal{R}$.

– È una funzione dispari (è simmetrica, cioè, rispetto all'origine).

– Interseca gli assi nell'origine $O(0, 0)$. Non interseca l'asse delle ascisse in altri punti.

– Il comportamento agli estremi del dominio si desume dai limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \mp\infty.$$

– Non ci sono asintoti.

– La funzione non è periodica ma presenta una sorta di «periodicità di forma». Infatti la curva è mutata in sé dalle traslazioni

$$\begin{cases} x = x' \pm 2 \\ y = y' \pm 2 \end{cases} \quad (*)$$

Infatti, operando la sostituzione di variabili associata alla (*)

$$\begin{cases} x \Rightarrow x \pm 2 \\ y \Rightarrow y \pm 2 \end{cases}$$

si ha:

$$y \pm 2 = \frac{1}{2} \sin[\pi(x \pm 2)] + x \pm 2$$

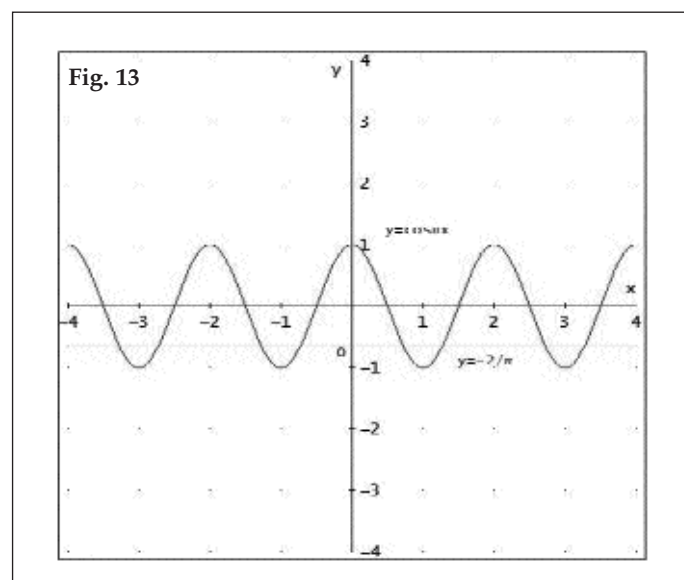
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \sin[\pi x \pm 2\pi] + x \Rightarrow y = \frac{1}{2} \sin \pi x + x.$$

Derivate:

$$g'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \pi x + 1 \Rightarrow g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \pi x = -\frac{2}{\pi}. \quad (**)$$

L'equazione (**) ha infinite soluzioni che si trovano operando l'intersezione grafica (Fig. 13) tra la curva $y = \cos \pi x$, pe-



riodica di periodo 2 e la retta $y = -\frac{2}{\pi}$.

Si ha: $g'(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k \approx \pm 0,72 + 2k = \pm \alpha + 2k$$

con $\alpha \approx 0,72$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Poiché $g'(x) > 0$ per $-\alpha + 2k < x < \alpha + 2k$ i punti di ascissa $\alpha + 2k$ sono punti di massimo mentre i punti di ascissa $-\alpha + 2k$ sono di minimo.

$$g''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \sin \pi x$$

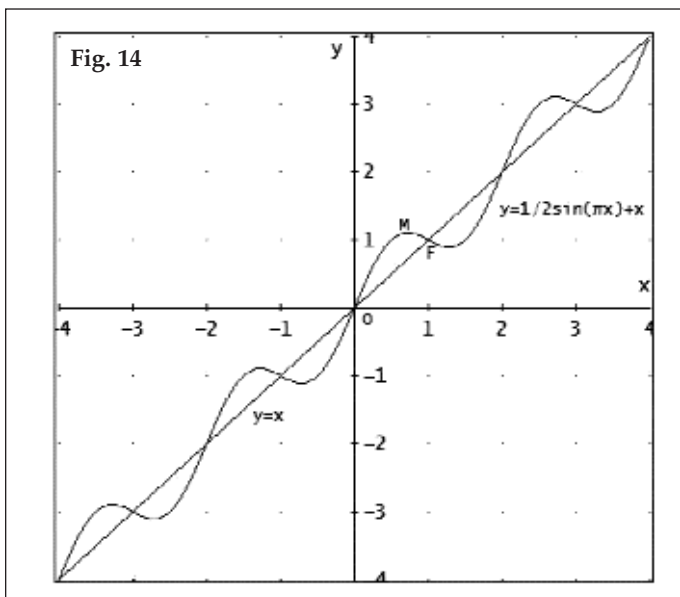
$$\Rightarrow g''(x) = 0 \text{ per } \pi x = k\pi \Rightarrow x = k \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Dunque i punti $[k; g(k)]$ sono punti di flesso ed, essendo $g(k) = K$, i flessi appartengono alla bisettrice del I e III quadrante $y = x$.

Si osservi che i coefficienti angolari delle tangenti inflessionali hanno solo due valori. Infatti si ha:

$g'(k) = \frac{1}{2} \pi \cos k\pi + 1 = 1 \pm \frac{1}{2} \pi$. Precisamente per k pari il coefficiente angolare è positivo, per k dispari è negativo. Si conclude che le tangenti inflessionali appartengono a due insiemi distinti di rette parallele.

Il grafico della $g(x)$ è riportato nella Fig. 14.



Punto 3. - Per fornire la valutazione approssimata del primo punto di massimo di ascissa positiva (in Figura 14 è indicato con la lettera M) osserviamo che la sua ascissa $x_M = \alpha_1$ è compresa nell'intervallo $(1/2; 1)$. Infatti si ha:

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 1 = 1 > 0 \text{ e}$$

$$g'(1) = \frac{\pi}{2} \cos \pi + 1 = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

e per il teorema degli zeri $\alpha_1 \in (1/2; 1)$.

Per calcolare un valore approssimato di α_1 si può utilizzare il metodo di bisezione degli intervalli.

$$\text{Sia } x_1 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{3}{4} \pi + 1 = -\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = -0,110$$

e pertanto per il teorema degli zeri $\alpha_1 \in (1/2; 3/4)$, cioè $0,5 < \alpha_1 < 0,75$ e $1 < g(\alpha_1) < 1,104$.

$$\text{Posto allora } x_2 = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x_2) = g'\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{5}{8} \pi + 1 = 0,398 > 0$$

e quindi possiamo scrivere $\alpha_1 \in (5/8; 3/4)$

ovvero $0,625 < \alpha_1 < 0,75$ e $1,086 < g(\alpha_1) < 1,104$.

E continuando:

$$x_3 = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{11}{16} \Rightarrow g'\left(\frac{11}{16}\right) = 0,127 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,687 < \alpha_1 < 0,75 \Rightarrow 1,103 < g(\alpha_1) < 1,104.$$

E, iterando ancora il processo:

$$x_4 = \frac{\frac{11}{16} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{23}{32} \Rightarrow g'(x_4) = g'\left(\frac{23}{32}\right) = 0,004 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{23}{32} < \alpha_1 < \frac{3}{4} \Rightarrow 0,718 < \alpha_1 < 0,75.$$

L'ultima disuguaglianza fornisce il seguente risultato:

$\alpha_1 \approx 0,7$ con la seconda cifra decimale che può essere 1; 2; 3 o

4. Ma se osserviamo che $g'\left(\frac{23}{32}\right) = 0,004$, cioè con valore molto prossimo a zero, ne deduciamo che α_1 è più vicino a 0,718 che a 0,75 pertanto la seconda cifra decimale è più probabile che sia 1 o 2.

Per quanto si riferisce all'ordinata non ci sono dubbi che sia 1,103.

Come si vede il metodo di bisezione non converge molto rapidamente ma, utilizzando uno strumento di calcolo automatico, il fatto può essere relativamente irrilevante.

Questionario

I quesiti 1; 2; 4; 5; 6 e 8 sono stati già proposti nel tema del corso di ordinamento. Per le loro soluzioni si rimanda pertanto a tali soluzioni. Del quesito 9 viene svolta solo la soluzione della seconda parte, essendo stata svolta, la prima, sempre nel tema del corso di ordinamento (quesito n. 4).

Quesito 3. - In una similitudine il rapporto k tra le lunghezze di segmenti corrispondenti è costante (rapporto di similitudine). Le aree di due figure corrispondenti stanno fra loro nel rapporto k^2 mentre i volumi di solidi corrispondenti sono nel rapporto k^3 . Nel nostro caso, se V e V' sono i volumi di

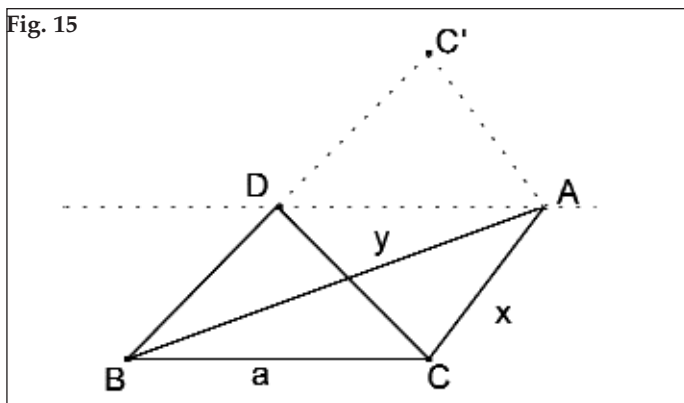
due solidi corrispondenti in una similitudine di rapporto 3 e A e A' sono le aree delle superfici degli stessi solidi si avrà:

$$V/V' = 3^3 = 27 \text{ e } A/A' = 3^2 = 9.$$

Quesito 7. - Siano ABC e DBC due triangoli aventi la stessa base BC e la stessa area e sia DBC isoscele. Se BC è fissata e di lunghezza a costante, tutti i triangoli di base BC e aventi la stessa area di ABC avranno il terzo vertice sulla retta AD parallela a BC . Si vuole dimostrare che il triangolo isoscele DBC ha il perimetro minimo rispetto a quello degli altri triangoli. E' sufficiente dimostrare che è (Fig. 15)

$$\overline{BD} + \overline{DC} < \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Fig. 15



Sia C' il simmetrico di C rispetto alla retta AD . Sarà evidentemente

$$\overline{DC} = \overline{DC'} \text{ e } \overline{AC} = \overline{AC'} \quad (*)$$

e, considerando il triangolo BAC' ,

$$\overline{BC'} = \overline{BD} + \overline{DC'} < \overline{AB} + \overline{AC'}$$

ovvero, per le (*),

$$\overline{BD} + \overline{DC} < \overline{AB} + \overline{AC}.$$

È meno immediata ma riveste un certo interesse anche la dimostrazione algebrica, soprattutto in ordine alla capacità di «lettura» delle espressioni algebriche.

Tale dimostrazione richiede di ricordare la formula di Erone, che non è di uso molto frequente,

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

in cui a, b, c sono le misure dei lati del triangolo, p il semiperimetro e $\mathcal{A}$ l'area.

Nel nostro caso, indicati con x e y i lati AC e AB rispettivamente, abbiamo:

$$p = \frac{a+x+y}{2}; \quad p-a = \frac{x+y-a}{2};$$

$$p-x = \frac{a-x+y}{2}; \quad p-y = \frac{a+x-y}{2};$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{a+x+y}{2} \cdot \frac{x+y-a}{2} \cdot \frac{a-x+y}{2} \cdot \frac{a+x-y}{2}}.$$

Elevando al quadrato e moltiplicando per 16 entrambi i membri

$$16\mathcal{A}^2 = [(x+y)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (x-y)^2]$$

$$(x+y)^2 = a^2 + \frac{16\mathcal{A}^2}{a^2 - (x-y)^2}.$$

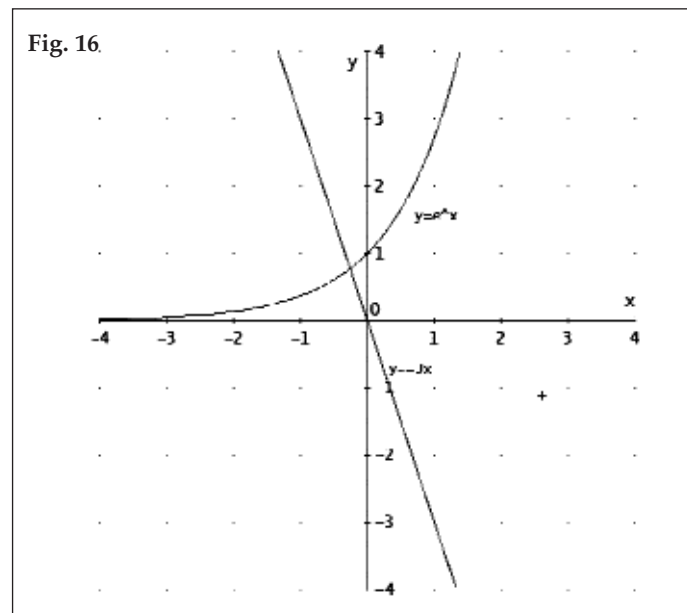
Il secondo membro dell'ultima relazione è composto da due addendi:

a^2 , che è costante, e $\frac{16\mathcal{A}^2}{a^2 - (x-y)^2}$, che dipende dal termine variabile $(x-y)^2$.

$(x+y)^2$, e quindi $x+y$ è minimo se $a^2 - (x-y)^2$ è massimo e ciò accade quando $x=y \Rightarrow AB=AC$.

Quesito 9. - La prima parte del quesito è stata svolta nella soluzione del quesito n. 4 del tema del «corso di ordinamento». Qui calcoliamo soltanto un valore approssimato della soluzione. Dal grafico della figura deduciamo che l'ascissa dell'unica intersezione delle due curve cade nell'intervallo $[-1, 0]$. Per calcolarne un'approssimazione utilizziamo il metodo iterativo c. d. «metodo delle approssimazioni successive».

Fig. 16



Il processo iterativo

$$x_n = f(x_{n-1}) = -\frac{1}{3}e^{x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

desunto dalla scrittura dell'equazione data nella forma

$$x = f(x) = -\frac{1}{3}e^x$$

è certamente convergente. Infatti, essendo

$$f'(x) = -\frac{1}{3}e^x,$$

nell'intervallo $[-1, 0]$ risulta $|f'(x)| = \left| -\frac{1}{3}e^x \right| < 1$.

Partendo dal valore iniziale approssimato, anche se grossolano, $x_0 = -1$, si perviene rapidamente ad un'approssimazione accettabile della soluzione.

Si ha successivamente:

$$x_1 = f(-1) = -\frac{1}{3}e^{-1} = -0,1226,$$

$$x_2 = f(x_1) = -\frac{1}{3}e^{-0,1226} = -0,2949,$$

$$x_3 = f(x_2) = -\frac{1}{3}e^{-0,2949} = -0,2482,$$

$$x_4 = f(x_3) = -\frac{1}{3}e^{-0,2482} = -0,2600.$$

La soluzione approssimata cercata è, dunque,
 $x \approx -0,26$.

Quesito 10. Prima di entrare nel merito del quesito, vorrei fare una precisazione sulla notazione adottata per indicare la trasformazione. Affrontando l'argomento «trasformazioni geometriche», non tutti i docenti, né tutti gli autori, usano la simbologia adottata nel testo del quesito, né parlano di «sostituzioni», anche se sul piano operativo sarebbe preferibile. La scrittura

$$\begin{cases} x = x'\sqrt{3} - y' \\ y = x' + y'\sqrt{3} \end{cases} \quad (\sigma)$$

certamente più familiare agli studenti, avrebbe evitato di indurre qualcuno in confusione, come in effetti è stato. Ciò premesso, ritengo che la risposta al quesito, corretta anche sul piano formale, sia la seguente.

La sostituzione di variabili proposta nel quesito è associata alla trasformazione geometrica di equazioni (σ) . Esse sono equazioni del tipo

$$\begin{cases} x = ax' + by' + p \\ y = cx' + dy' + q \end{cases} \quad (\tau)$$

dove a, b, c, d, p, q sono numeri reali.

Si sa che, se $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ e $p = q = 0$ la (τ) prende il nome di *centro-affinità* di costante $|\Delta|$ e punto unito O .

Nel nostro caso $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 > 0$.

Dunque si tratta di una centro-affinità diretta di costante 4. Si può dimostrare che la costante $\Delta = 4$ è il rapporto tra le aree di due regioni qualsiasi del piano che si corrispondono nella (σ) .

Ma essendo

$$a^2 + c^2 = 3 + 1 = 4 = b^2 + d^2$$

$$ab + cd = \sqrt{3}(-1) + \sqrt{3}(1) = 0$$

la (σ) è anche una similitudine perché, come si può dimostrare, essa trasforma circonferenze in circonferenze. Il rapporto di similitudine è $\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4} = 2$.

La (σ) si può scrivere anche nella forma

$$\begin{cases} x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}x' - \sin\frac{\pi}{6}y'\right) \\ y = 2\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}x' + \cos\frac{\pi}{6}y'\right) \end{cases}$$

da cui si desume che la nostra similitudine è prodotto di una omotetia di rapporto 2 e di una rotazione di ampiezza $\pi/6$. Quest'ultima proprietà rientra in una proprietà più generale secondo cui una similitudine si può sempre scomporre nel prodotto «commutativo» di una omotetia per una isometria.

Commento alla prova

Anche la prova del corso sperimentale rispetta la struttura stabilita nel 2001. Sono due problemi e 10 quesiti. Al candidato, come previsto, viene richiesto di risolvere, a scelta, uno dei due problemi e 5 quesiti. Nel problema 1 viene proposta la classica curva della distribuzione normale di Gauss. Si richiede lo studio della curva e il disegno del relativo grafico. Dei quattro punti, il 3 e il 4 non sono del tutto indipendenti. Come diremo più avanti, con questo problema si poteva entrare un po' di più nel concreto, rendendolo così più significativo.

Il problema 2 consiste in 3 punti indipendenti.

È più complesso ma anche più interessante del primo perché offre ai più dotati spunti per dimostrare la propria preparazione con osservazioni anche originali. Anche in questo problema, come era accaduto nel problema 2 del corso di ordinamento viene richiesta una valutazione approssimata (questa volta delle coordinate del primo punto di massimo di ascissa positiva della curva).

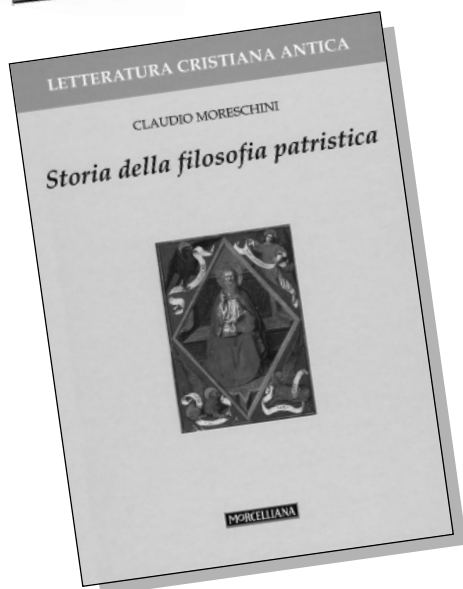
Dei 10 quesiti del questionario, come abbiamo sottolineato nell'esempio di soluzione, 7 sono comuni alla prova di ordinamento. Ciò è da ritenersi un fatto positivo, perché mostra che i curricula di matematica dei due corsi vanno sempre più uniformandosi. Per questi 7 quesiti rimandiamo alle osservazioni fatte in sede di commento alla prova di ordinamento.

Il quesito 9, rispetto a quello analogo dell'altra prova (n. 4), richiede in appendice di calcolare il valore approssimato della soluzione dell'equazione trascendente assegnata. In questo caso si poteva usare, come abbiamo mostrato, un metodo iterativo di approssimazione diverso dal solito metodo della bisezione degli intervalli. Dei rimanenti tre quesiti, il 3 e il 10, concernono le trasformazioni affini e il 7 è simile al n. 7 dell'altra prova ed è anch'esso risolvibile sia per via analitica che per via sintetica. In conclusione, anche per questa prova, certamente un po' più complessa e impegnativa dell'altra, valgono le stesse osservazioni. Tocca una notevole varietà di questioni ed è adeguata per la verifica per cui è stata destinata. Riteniamo perciò che si possa a buona ragione affermare che sia una prova di buona qualità, sufficientemente coerente e congruente con i normali curricula. In entrambi i temi, inoltre, la esposizione delle questioni è sufficientemente semplice e chiara e non dà adito ad equivoci di sorta.

Proposte per le prove 2005

La prova di matematica dell'Esame di Stato del liceo scientifico, ancorché molto migliorata in questi ultimi anni, rimane pur sempre troppo circoscritta nell'ambito della disciplina. È vero che le questioni proposte hanno allargato notevolmente lo spettro della verifica rispetto al passato, spaziando dall'algebra alla geometria, dalla trigonometria all'analisi numerica e infinitesimale, ecc., ma mancano ancora di trasver-

NOVITÀ



Claudio Moreschini
**STORIA
 DELLA FILOSOFIA
 PATRISTICA**

22003 - pp. 760 - € 50,00

Un evento editoriale: la prima, dettagliata e documentata storia del pensiero cristiano dalla sua genesi primitiva – in opposizione alla filosofia pagana – fino al VI-VII sec. d.C.

Claudio Moreschini - Enrico Norelli

**STORIA
 DELLA LETTERATURA
 CRISTIANA ANTICA**

Vol. 1°: **Da Paolo all'età costantiniana**

21549 - pp. 624 - € 30,99

Vol. 2°: **Dal concilio di Nicea agli inizi del Medioevo**

21610 - 2 tomi inseparabili - pp. 1008 - € 60,00

La *Letteratura Cristiana Antica* intende mettere in rilievo precipuamente gli aspetti letterari che caratterizzano gli scritti dei primi secoli cristiani e che spesso vengono trascurati dalle analoghe opere esistenti.

MORCELLIANA

Distribuzione in esclusiva
 EDITRICE LA SCUOLA

salità e di collegamento con le altre discipline e con la realtà quotidiana. Anche se di tanto in tanto è comparso qualche accenno alla fisica, si è trattato solo di timidi episodi isolati mancando l'opportuna sistematicità.

Da diverso tempo le ricerche della didattica della matematica e gli orientamenti più diffusi e convinti consigliano a tutti i livelli di scuola di «partire sempre dalla realtà», muovere sempre da problemi reali prima di procedere a operazioni di astrazione e di sistemazione logica. Lo scopo è duplice: ridurre la dimensione astratta della disciplina rendendone lo studio meno teorico e quindi meno arido e faticoso da un lato, e mostrare, dall'altro, ai discenti come la materia sia presente nella vita di tutti i giorni, migliorando se possibile il loro stato motivazionale. Ci sembrerebbe ragionevole e sensato, in fase di verifica finale, un «ritorno alla realtà», sia pure parziale, per saggiare la capacità di utilizzo dello «strumento matematico» acquisito anche nel contesto extradisciplinare e nella realtà della vita sociale.

L'apprendimento matematico non va visto solo in funzione dell'eventuale proseguimento degli studi, ma anche nella prospettiva dell'acquisizione di un bagaglio di abilità utile alla formazione del cittadino *tout court*.

Tornando, ad esempio, al problema 1 della prova del corso sperimentale, anziché limitarsi a indagare gli aspetti squisitamente matematici della gaussiana, si poteva (a margine, naturalmente) cercare di verificare la conoscenza delle questioni concrete e dei problemi che sono alla base della scoperta della curva o la capacità di utilizzo di essa in una situazione reale, richiedendo almeno di calcolare per mezzo di essa alcune probabilità.

La prova di matematica, e il discorso vale anche per le altre prove, non dovrebbe limitarsi a verificare solo l'apprendimento formale, ma dovrebbe in qualche modo accertare anche quello informale, se non altro perché tale apprendimento esiste e non è meno importante. Pertanto, è giusto che esso sia valutato e certificato, come si consiglia anche a livello internazionale.

È pur vero che nello svolgimento dei programmi molti docenti rifuggono di solito dal proporre esercitazioni che affrontino problemi concreti della vita reale, ma è altrettanto vero che non vi è strada più efficace dell'Esame di Stato, in un paese in cui si attua la «scuola per l'esame» piuttosto che «l'esame per la scuola», per «costringere» i docenti al cambiamento. Se il ministro Berlinguer non avesse introdotto «l'articolo di giornale» e «il saggio breve» nella prova di italiano dell'Esame di Stato, quanti docenti di lettere avrebbero accettato di ridimensionare nei loro curricula l'esclusività del tema tradizionale?

Vi sono argomenti nell'ambito matematico che dovrebbero essere oggetto di studio in tutti i tipi di scuola. Ci riferiamo alla capitalizzazione, al contratto assicurativo, agli ammortamenti, alle rilevazioni statistiche, ai sondaggi, ai problemi di scelta, ecc. tutte questioni che ogni cittadino (talora pagando prezzi molto alti...) impara informalmente nel corso della vita.

Si cominci allora, certamente in modo graduale ma comunque sistematico, a proporre anche quesiti che concernino l'utilizzo della matematica nei campi succitati, più funzionali alla formazione e alla crescita culturale dei futuri cittadini. E, chissà, magari per questa via, la matematica, tanto incompresa e temuta, potrebbe spaventare di meno e diventare un po' più simpatica e attraente.

Antonio Marro - *Dirigente Scolastico*