

Matematica

Liceo scientifico

Gabriele Anzellotti

Problema 1

Ci sono vari modi di affrontare la prima domanda di questo problema¹. Uno dei più eleganti sfrutta la decomposizione del tetraedro in quattro piramidi, il vertice delle quali è posto nel centro del tetraedro. La soluzione data qui è leggermente più macchinosa, ma ha il vantaggio di non richiedere particolari intuizioni geometriche. Va però detto che, per questo tipo di problemi, occorre in ogni caso avere una buona capacità di visualizzazione mentale e di rappresentazione grafica degli oggetti nello spazio.

a) Indicata con s la lunghezza degli spigoli del tetraedro, l'area di una faccia vale $s^2\sqrt{3}/4$ e dunque $S = s^2\sqrt{3}$. L'altezza del tetraedro si calcola con il teorema di Pitagora applicato al triangolo ODH in figura 1, dove O è la proiezione di D sulla base e H è la proiezione di O su BC .

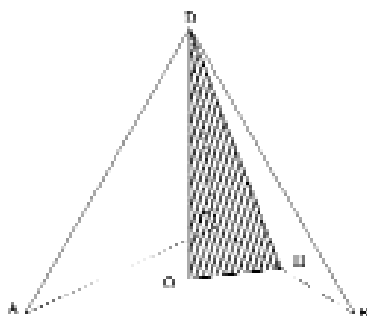


Fig. 1

¹. Riporto qui quasi identicamente le soluzioni che sono state date il giorno stesso dello svolgimento della prova da un gruppo di matematici, i cui nomi sono elencati nel testo, nell'ambito delle attività del Laboratorio LRMFD² del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento. Le soluzioni originali sono state pubblicate sul quotidiano L'Adige di Trento il giorno 20 giugno 2003. Il modo di affrontare i problemi e di esporre le soluzioni è del tutto coerente con il mio modo di vedere e ho fatto solo alcune piccole modifiche e aggiunto alcuni commenti, di cui mi prendo la responsabilità. Ringrazio gli Autori e il giornale L'Adige per avermi consentito di utilizzare il loro materiale. Dopo avere esposto la soluzione farò un breve commento specifico sulla prova in oggetto, mentre per un commento generale su obiettivi e struttura della prova di matematica nell'Esame di Stato, sulle possibili modalità di valutazione e sulla preparazione all'esame rimando all'articolo relativo alla prova assegnata per il corso P.N.I., su questo stesso numero della rivista.

LA TRACCIA MINISTERIALE

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D .

- Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T , trovare una relazione che leghi V , S ed r .
- Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T' .
- Condotto il piano α , contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E , e posto che uno spigolo di T sia lungo s , calcolare la distanza di E dalla retta AB .
- Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p .
- Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$.

Problema 2

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

- Determinare il suo dominio di derivabilità.
- Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.
- Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario

- Dopo aver fornito la definizione di «rette sghembe», si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z , due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

4. Il dominio della funzione $f(x) = \ln \{ \sqrt{x+1} - (x-1) \}$ è l'insieme degli x reali tali che:

- A) $-1 < x \leq 3$; B) $-1 \leq x < 3$; C) $0 < x \leq 3$; D) $0 \leq x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5. La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6. La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f'(x) = 2x e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili.

La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

- A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$;
C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

- A) è divisibile per 2 e per 3.
B) è divisibile per 2 ma non per 3.
C) è divisibile per 3 ma non per 2.
D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili quintine che contengono i numeri 1 e 90.

10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Si ha

$$\overline{OH} = \frac{1}{3}\overline{AH} = \frac{s}{6}\sqrt{3}; \quad \overline{DH} = \frac{s}{2}\sqrt{3};$$

quindi

$$\overline{DO} = \frac{s}{3}\sqrt{6}.$$

Di conseguenza

$$V = \frac{\text{Area}(ABC) \cdot \overline{DO}}{3} = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}.$$

Per calcolare r, consideriamo i due triangoli simili OHD e QKD, dove Q è il centro della sfera inscritta e K è il centro della faccia BCD, in cui la sfera è tangente al tetraedro (v. Fig. 2).

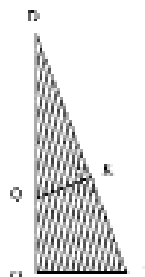


Fig. 2

Si ha

$$\overline{DK} = \frac{2}{3}\overline{DH} = \frac{s}{3}\sqrt{3}, \quad \overline{QK} = r.$$

Per similitudine abbiamo

$$\frac{\overline{QK}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DO}},$$

da cui $r = \frac{s}{12}\sqrt{6}$. Si ha allora

$$Sr = s^2\sqrt{3} \cdot \frac{s}{12}\sqrt{6} = \frac{s^3}{4}\sqrt{2} = 3V;$$

una relazione che legghi V, S e r è quindi $Sr = 3V$.

b) Il piano π passante per i centri delle facce laterali di T (cioè il piano che contiene la base di T') è parallelo alla base di T. Poiché π divide gli apotemi in due parti una doppia dell'altra (i centri delle facce sono i baricentri delle facce stesse), per il teorema di Talete anche DO è divisa in due parti DL e LO tali che $\overline{DL} = 2\overline{LO}$. Quindi LO, l'altezza di T', è 1/3 di DO. Il rapporto tra le lunghezze degli spigoli di T e T', che coincide con quello tra le altezze, è allora 3 e di conseguenza il rapporto tra i volumi di T e T' è 3^3 .

c) Poiché α è perpendicolare a DC, l'angolo AEC è retto e quindi $\overline{AE} = s\sqrt{3}/2$ (v. Fig. 3). La distanza EF richiesta si calcola con il teorema di Pitagora applicato al triangolo AFE; si ottiene

$$\overline{EF} = \frac{s}{2}\sqrt{2}.$$

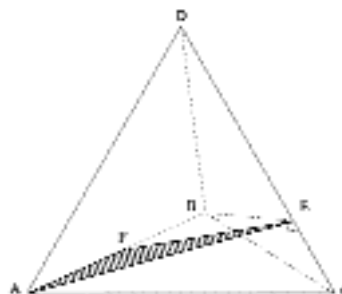


Fig. 3

d) Consideriamo un sistema di assi cartesiani con F nell'origine, come in figura 4.

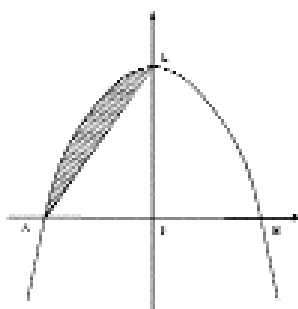


Fig. 4

La parabola p ha equazione della forma $y = ax^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}s$, per un certo numero reale $a < 0$. Imponendo che gli zeri del polinomio siano $\pm s/2$, abbiamo $a\frac{s^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}s = 0$, da cui $a = -\frac{2\sqrt{2}}{s}$. L'equazione di p è dunque

$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}s.$$

e) L'area della regione tratteggiata in figura si ottiene per differenza tra l'area sottesa dalla parabola nell'intervallo $[-s/2, 0]$ e l'area del triangolo AFE . Si ha

$$\int_{-s/2}^0 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}s \right) dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}s = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Calcolando l'integrale, da questa equazione si ottiene $s^2 = 8$ e quindi $s = 2\sqrt{2}$ cm.

Problema 2

La funzione da studiare contiene un parametro che ha la forma $m + |m|$. Si deve capire che questo è come dire che il parametro è semplicemente zero per $m \leq 0$, ed è $2m$ per $x > 0$.

(a) Condizione necessaria e sufficiente per la derivabilità di f in x è che si abbia $x^2 + m + |m| \neq 0$ e cioè $x^2 \neq -m - |m|$. Di conseguenza:

- se $m > 0$, allora f è derivabile in ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $m \leq 0$, allora $|m| = -m$ e quindi: f è derivabile in x se e solo se $x \neq 0$.

Osserviamo che, per ogni x nel dominio di derivazione, si ha

$$f'(x) = \frac{2(-x^2 - x + m + |m|)}{(x^2 + m + |m|)^2}.$$

(b) Da quanto stabilito in (a), segue che f è derivabile in 1 per qualunque valore di m .

Vogliamo che

$$0 = f'(1) = \frac{2(-2 + m + |m|)}{(1 + m + |m|)^2}$$

cioè $m + |m| = 2$. Ne segue $m \geq 0$ (da cui $|m| = m$) e quindi $m = 1$.

(c) La funzione da studiare è

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

le cui prime due derivate si calcolano subito essere

$$f'(x) = \frac{2(-x^2 - x + 2)}{(x^2 + 2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(2x^3 + 3x^2 - 12x - 2)}{(x^2 + 2)^3}.$$

Al fine di tracciare il grafico γ di f , osserviamo che: (i) f è negativa in $(-\infty, -1/2)$, si annulla in $-1/2$ ed è positiva in $(-1/2, +\infty)$; (ii) si ha $f(0) = 1/2$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; (iii) f' è negativa in $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, è positiva in $(-2, 1)$ e si annulla in -2 e in 1 . Di conseguenza f decresce in $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, cresce in $(-2, 1)$, ha un minimo relativo in -2 e un massimo relativo in 1 con $f(-2) = -\frac{1}{2}$ e $f(1) = 1$.

Osserviamo che, in virtù del punto precedente, tali estremi relativi sono anche assoluti.

Dalle informazioni fin qui acquisite segue subito che devono esistere $a \in (-\infty, -2)$, $b \in (-2, 1)$ e $c \in (1, +\infty)$ tali che $f''(a) = f''(b) = f''(c) = 0$. Poiché il numeratore di f'' può annullarsi al più in tre punti, concludiamo che a , b e c sono tutti e soli gli zeri di f'' . Ne consegue che f è concava in $(-\infty, a) \cup (b, c)$ ed è convessa in $(a, b) \cup (c, +\infty)$. Il grafico è riportato nella figura 5.

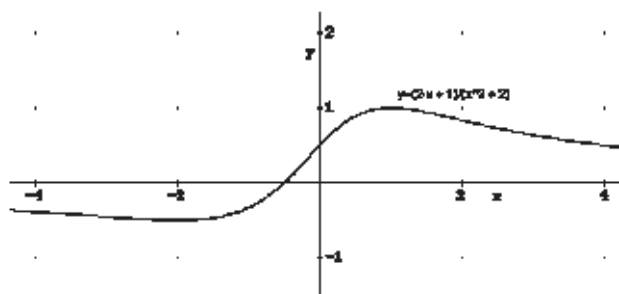


Fig. 5

(d) L'area richiesta è uguale a

$$\int_{-1/2}^1 f(x) dx = \left[\log(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-1/2}^1.$$

Quesiti

Quesito 1. Due rette nello spazio si dicono sghembe se non esiste alcun piano che le contiene entrambe. La risposta alla domanda è: «l'affermazione è falsa». Per mostrare questo è sufficiente produrre un controesempio. A questo fine si possono prendere due rette parallele x e z che stiano su di uno stesso piano π e una retta y , non parallela alle prime due, che stia su un piano parallelo a π e diverso da π .

Quesito 2. Le possibili figure si vedono abbastanza facilmente. Un modo possibile per dare una classificazione è il seguente. Siano P la piramide, Π il piano, e Q il quadrilatero intersezione fra Π e P .

Allora:

- Nel caso che Π sia parallelo alla base di P , il quadrilatero Q è un quadrato.

Consideriamo ora il caso che Π non sia parallelo alla base di P e denotiamo con R la retta ottenuta intersecando il piano Π con il piano contenente la base della piramide P . Le proprietà di simmetria della piramide implicano facilmente che:

- se R è parallela a uno spigolo di base di P , allora Q è un trapezio isoscele;
- se R è parallela a una delle diagonali della base di P , allora Q è un deltoide (il quadrilatero a «forma di aquilone»).

Se nessuna di queste condizioni è verificata, allora si ottiene un quadrilatero che riteniamo privo di caratteristiche significative.

Un altro modo di classificare può essere quello di considerare le altezze, rispetto alla base, dei punti di intersezione del piano con gli spigoli della piramide.

Quesito 3. Si consideri il triangolo ABP , di cui può essere misurato il lato $\overline{AP}$. Grazie ad un opportuno strumento di misura, possiamo anche misurare l'angolo in A (che chiamiamo α) e l'angolo in P (che chiamiamo γ). Per il teorema dei seni si ha $\overline{AB}/\sin \gamma = \overline{AP}/\sin(\pi - \alpha - \gamma)$, da cui $\overline{AB} = \overline{AP} \sin \gamma / \sin(\pi - \alpha - \gamma) = \overline{AP} \sin \gamma / \sin(\alpha + \gamma)$.

Quesito 4. Affinché $f(x)$ esista, occorre che l'argomento della radice sia ≥ 0 , e che l'argomento del logaritmo sia > 0 : occorre dunque risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ \sqrt{x + 1} - (x + 1) > 0. \end{cases}$$

Un grafico qualitativo può a questo punto essere molto utile per capire cosa sta succedendo.

Con qualche calcolo si trova poi che la risposta corretta è la B): $-1 \leq x < 3$. Sapendo che una sola risposta è corretta, si possono anche facilmente escludere i casi A), C) e D) (infatti $x = 0$ non è un punto «interessante» perché nessuna delle due espressioni coinvolte vi si annulla, mentre A) si esclude perché la funzione non esiste per $x = 3$).

Quesito 5. Studiando il segno della derivata, si trova che f è crescente per $x < 0$ o per $x > 1$. In particolare, essa ha un massimo relativo in $x = 0$ (e $f(0) = 2$) e un minimo relativo per $x = 1$, con $f(1) = 1$. Se ne deduce che f è sempre maggiore o uguale a 1 per $x \geq 0$. Viceversa, per $x < 0$ la funzione $f(x)$ è strettamente crescente ed assume come valore massimo $f(0) = 2$. Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, se ne deduce che la funzione si annulla una ed una sola volta nel semiasse delle x negative.

Quesito 6. Se definiamo $g(s) = \int_0^s e^{-t^2} dt$, il teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice che $g'(s) = e^{-s^2}$. Allora, utilizzando la formula di derivazione della funzione composta

$$f'(x) = (g(x^2))' = g'(x^2) \cdot 2x = 2xe^{-x^4}.$$

Quesito 7. La risposta dipende da come si interpreta la frase «... moltiplicarli *combinandoli in tutti i modi possibili*».

Prima interpretazione: «formare tutti i prodotti del tipo $i \cdot j$, dove i e j sono interi che variano tra 1 ed n ». In questo caso abbiamo n^2 termini, la cui somma corrisponde allo sviluppo del prodotto $(1 + 2 + \dots + n) \cdot (1 + 2 + \dots + n)$. Poiché $(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$, la somma richiesta è uguale a $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ e la risposta corretta, con questa interpretazione, è la A.

Seconda interpretazione. La frase fra virgolette può anche essere intesa nel senso di «formare i prodotti di tutte le possibili coppie ottenute estraendo due elementi dall'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ ».

In tal caso i termini sono $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ e si ottengono da quelli considerati nel caso precedente togliendo i prodotti del tipo $i \cdot i$ e prendendo una sola volta i prodotti con i fattori scambiati.

Per quanto detto, la quantità richiesta si può scrivere

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n i \cdot j = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n i \cdot j - \sum_{i=1}^n i^2 \right),$$

dove l'uso dei simboli di sommatoria non è veramente necessario, ma è comodo. La prima somma nella parentesi è

$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, mentre la seconda somma vale $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Eseguendo il calcolo si trova subito

che la risposta corretta è la D. Sapendo però che *una ed una sola delle risposte è esatta*, a questo risultato si poteva giungere più semplicemente (e a mio parere questa via è pienamente corretta e accettabile) anche calcolando la somma per qualche valore di n ed escludendo via via le risposte errate. In particolare, per $n = 3$ si ottiene il valore $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11$ che è in accordo con la sola espressione D.

Personalmente ritengo che la seconda interpretazione sia più vicina alle intenzioni di chi ha redatto la prova, sia perché il quesito diventa più stimolante, sia per l'uso della parola «combinandoli» nel testo della domanda. Ritengo peraltro che la possibile ambiguità non sia sfuggita a chi ha scritto il quesito e che la capacità di accorgersi di questa ambiguità e di risolverla sia parte del quesito stesso.

Quesito 8. Se scriviamo $x = 2k + 1$ con $k = 1, 2, \dots$, si ha evidentemente $y = 2k - 1$. Dunque: $x^3 - y^3 = (2k + 1)^3 - (2k - 1)^3 = 24k^2 + 2 = 2(12k^2 + 1)$. Questo è un numero pari, ma non è divisibile per 3 perché non lo è il secondo fattore. La risposta corretta è quindi la B. In alternativa si può cercare di esplorare qualche caso particolare per escludere le risposte errate.

Piano Nazionale Informatica

Gabriele Anzellotti

P

Per prima cosa darò una soluzione dei problemi e dei quesiti. Le argomentazioni saranno abbastanza dettagliate e sono pensate anche per essere lette, meglio se con la guida dell'insegnante, dagli studenti che si preparano all'Esame di Stato. In particolare, farò numerosi commenti sia sulle strategie, sia sugli atteggiamenti metacognitivi del solutore. Terminata la soluzione farò una riflessione sulla struttura e sugli obiettivi che la prova di Matematica ha in generale e alcune considerazioni specifiche sulla prova in oggetto. Inoltre esporrò alcuni problemi relativi alla valutazione degli elaborati da parte delle commissioni. Dopo di questo darò alcuni suggerimenti relativi alla preparazione per l'Esame di Stato. Per concludere, farò qualche considerazione sul problema generale, che però qui non potrò discutere compiutamente, di quali modalità usare per verificare le conoscenze e le capacità degli studenti in uscita dalla scuola secondaria¹.

1. Ringrazio Sisto Baldo, Giancarlo Dorigotti e Sandro Innocenti per numerose preziose osservazioni critiche su una prima bozza di questo articolo.

LA TRACCIA MINISTERIALE

Corso sperimentale P.N.I. tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

Problema 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A , una retta r passante per O , il punto B , ulteriore intersezione di r con γ , il punto C intersezione di r con t . La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P . Al variare di r , P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di versiera di Agnesi [da Maria Gaetana Agnesi, *matematica milanese* (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA ;

2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy , l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$;

In effetti, «la prima cosa che viene in mente», ossia il caso $y = 1$ e $x = 3$, produce $x^3 - y^3 = 8$ che è in accordo solo con la risposta B.

Quesito 9. Se in una cinquina devono essere contenuti i numeri 1 e 90, abbiamo la libertà di scegliere gli altri 3 numeri tra i restanti 88: ci stiamo dunque chiedendo quante sono le possibili combinazioni costituite da 3 oggetti su un totale di 88: la risposta è

$$\binom{88}{3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 109736.$$

Quesito 10. L'affermazione è vera. La si ottiene subito se si ricorda la formula per cambiare base nei logaritmi:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Ancora meglio se si scrive

$$3 = [2^{\log_2 3}] = 3^{\log_3 [2^{\log_2 3}]} = 3^{\log_3 3 \cdot \log_3 2}.$$

Soluzioni a cura di: F. Arrigoni, S. Baldo, C. Cuslin, S. Delladio, S. Innocenti, M. Pagliacci, L. Pretti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento.

Commento al tema

Per la struttura e gli obiettivi generali previsti per la prova di matematica nell'Esame di Stato, faccio riferimento al commento della prova per il corso P.N.I. (di seguito, in questo stesso numero della rivista). Per la prova in oggetto, osservo che il problema 1 è suddiviso in 5 domande, di cui le prime tre sono indipendenti e le ultime due dipendono a cascata dalla terza. Il problema non è molto difficile, ma richiede certamente una buona capacità di visualizzazione geometrica nello spazio, che non è detto sia così comune. La mia impressione è che per molti studenti la scelta del secondo problema sia stata obbligata. Il secondo problema è standard e presenta l'unica difficoltà psicologica del modulo di m , peraltro innocuo. Le diverse domande sono concatenate, ma anche se il candidato si fosse sbagliato (o non fosse riuscito) a determinare il valore del parametro, in ogni caso avrebbe potuto continuare a studiare la funzione anche con un valore errato (o da lui scelto) di m e mostrare comunque le proprie capacità nello studio dei grafici.

I quesiti sono abbastanza interessanti, coprono diversi argomenti, hanno a mio parere gradi di difficoltà assai diversi. Osservo anche che un candidato avrebbe potuto ottenere il massimo dei voti ad esempio risolvendo il primo problema e rispondendo ai quesiti 1, 2, 3, 8, 9 e quindi senza sapere nulla di funzioni, logaritmi, trigonometria, derivate e integrali. Questo conferma la necessità di riflettere sui modi in cui verifichiamo le conoscenze in uscita dalla scuola secondaria, come ho scritto nell'articolo citato per il corso P.N.I., che segue su questo stesso numero della rivista. Complessivamente ritengo che sia un tema accettabile, ma meno felice di quello assegnato al P.N.I.

Gabriele Anzellotti - Università di Trento

Problema 1

Lettura e comprensione del testo. Per rendersi conto di cosa chiede il problema, è opportuno subito disegnare una figura. Tracciamo quindi un cerchio γ , possibilmente con un compasso o almeno con una moneta o altro oggetto idoneo (è sempre meglio fare disegni ragionevolmente precisi). Decidiamo poi di disegnare il diametro OA in posizione orizzontale (ricordando che si tratta solo di una delle scelte possibili) e tracciamo la retta t tangente a γ in A . Proseguiamo disegnando una retta r passante per O , scegliendo un'inclinazione media, poi segniamo il punto B di intersezione fra r e γ e segniamo anche il punto C di intersezione fra r e t . Ora tracciamo la retta passante per B e parallela a t , che decidiamo di indicare con u , e infine tracciamo la retta passante per C e parallela a OA , indicata con v . Il punto di intersezione fra queste ultime due rette è indicato con la lettera P . Così abbiamo ottenuto la figura 1. Poiché al variare della retta r il punto P descrive il luogo Γ a cui siamo interessati, conviene ripetere la costruzione per qualche altra posizione della retta r e se-

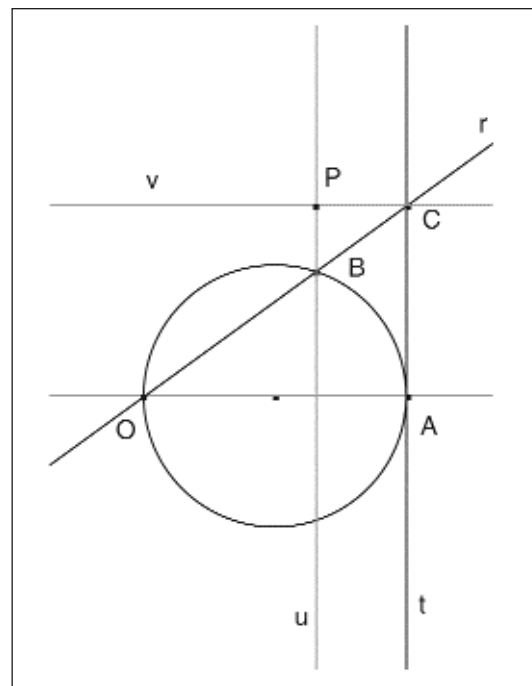


Fig. 1

gnare le corrispondenti posizioni di P , per farsi un'idea della forma di Γ . Dovrebbe essere chiaro, ad esempio, che la curva Γ è simmetrica rispetto alla retta per O e A , ed anche che è compresa fra la retta t e la retta parallela a t e passante per O . Quest'ultima retta è inoltre presumibilmente un asintoto di Γ .

LA TRACCIA MINISTERIALE

3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ .

Problema 2

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari;
2. $f(0) = 2$;

$$3. \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \log 2}.$$

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G .

Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G , mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G .

Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)} dx$.

Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r .

Questionario

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

4. Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

5. Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0.$$

6. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b ?

7. Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π , applicando un metodo di integrazione numerica.

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

9. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$.

Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

10. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Risposta alla domanda 1. Conviene ragionare su una figura in cui i punti B, C, P non siano troppo vicini fra loro, cioè in cui l'angolo formato dalla retta r con OA non è troppo piccolo (potrebbe essere opportuno rifare la figura). Il problema introduce il punto D , che viene assegnato come proiezione ortogonale di B su OA . Lo studente dovrebbe immediatamente riconoscere che D è l'intersezione fra la retta u e OA . Una dimostrazione è ad esempio: la retta t è tangente alla circonferenza γ in A , quindi è perpendicolare al diametro OA . Poiché u è parallela a t , u è anch'essa perpendicolare a OA . Ma u passa anche per B per costruzione, dunque l'intersezione fra u e OA è proprio la proiezione ortogonale di B su OA .

Segnato il punto D sulla nostra figura (figura 2), si vede facilmente che il rapporto $OD : DB$ è uguale al rapporto $OA : AC$ (dal confronto fra i due triangoli rettangoli simili ODB e OAC). Inoltre, AC è uguale a DP , poiché $DACP$ è un parallelogramma (i lati opposti sono paralleli per costruzione). Sostituendo DP ad AC nell'uguaglianza di rapporti precedente, otteniamo $OD : DB = OA : DP$, che è la prima proporzione che era richiesto di dimostrare.

Per vedere la seconda proporzione bisogna ancora ricordare che $DP = AC$ e considerare i triangoli nei quali compaiono i segmenti interessati, ossia i triangoli OAC e ABC . Un disegno ben fatto (si veda ancora la figura 2) suggerisce che l'angolo ABC sia retto, e questo in effetti si dimostra poiché esso è l'angolo alla circonferenza di un angolo piatto (si ricordi che OA è un diametro). D'altra parte i due angoli COA e CAB sono uguali, in quanto complementari dello stesso angolo ACO . I triangoli OAC e ABC sono dunque simili (con gli angoli corrispondenti nell'ordine dato) e ne segue l'uguaglianza dei rapporti $OC : AC = AC : BC$. Sostituendo DP ad AC si ottiene la seconda proporzione richiesta. Osserviamo che questo tipo di confronto fra triangoli dovrebbe essere familiare allo studente, così come la proporzione che si ottiene, la quale dovrebbe essere riconosciuta come tesi di un teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo OAC .

Risposta alla domanda 2. Occorre tradurre la costruzione del punto generico P del luogo Γ in una condizione algebrica sulle coordinate di P , rispetto ad un sistema di riferimento opportuno. Consideriamo allora due assi cartesiani ortogonali (monometrici) con centro in O . Come d'uso, chiamiamo x la coordinata sull'asse orizzontale, diretto verso destra, e chiamiamo y la coordinata sull'asse verticale, diretto verso l'alto. Denotiamo con (x_P, y_P) le coordinate di P e in modo analogo le coordinate di B e C . Scriviamo sul nostro disegno le coordinate dei punti e guardiamo il disegno così ottenuto (figura 3). Una buona tecnica generale a questo punto è quella di scrivere in formule algebriche tutte le condizioni che si conoscono sulle coordinate. Dalla similitudine dei triangoli (come nella dimostrazione della prima proporzione nella domanda 1) sappiamo che

$$(1) \quad \frac{y_P}{a} = \frac{y_B}{x_P}.$$

Inoltre, la condizione che B sta sulla circonferenza equivale a

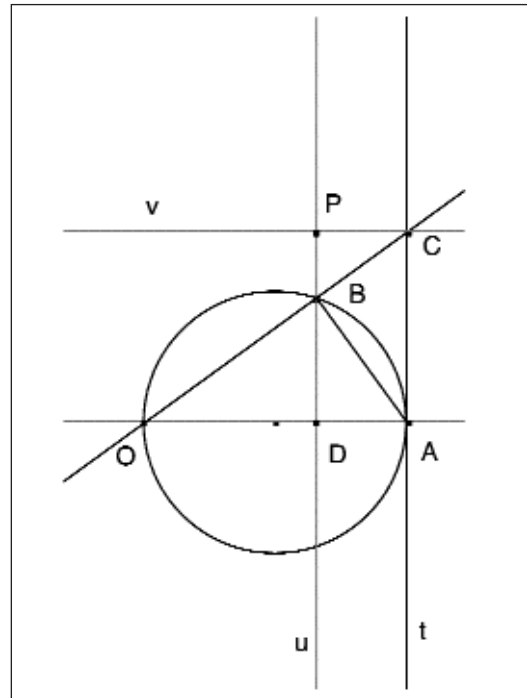


Fig. 2

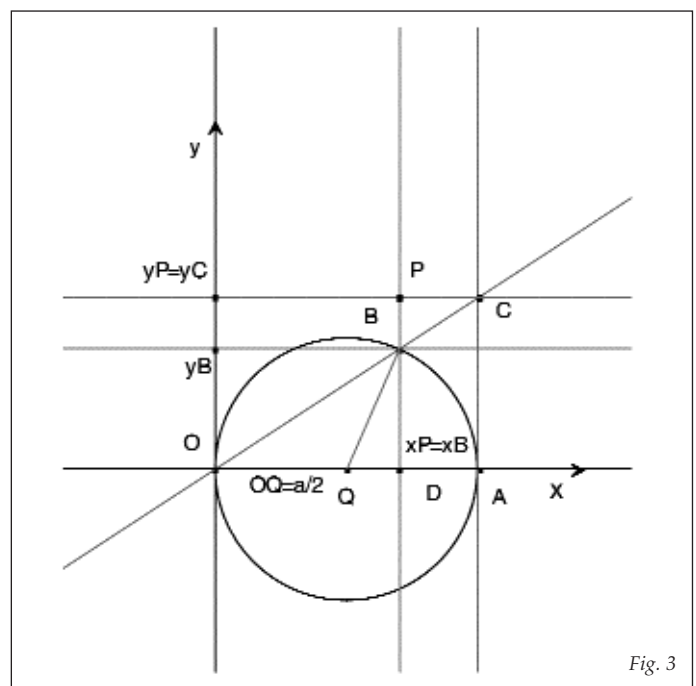


Fig. 3

$QB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ dove Q è il centro della circonferenza. Ma il teorema di Pitagora applicato al triangolo QBD ci dice che

$$QB^2 = \left(x_P - \frac{a}{2}\right)^2 + y_B^2 \text{ e così otteniamo l'equazione}$$

$$(2) \quad \left(x_P - \frac{a}{2}\right)^2 + y_B^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Conviene ora vedere cosa dicono (1) e (2) messe insieme. Possiamo ricavare y_B da (1) e sostituirlo in (2) e otteniamo

$$x_P^2 - ax_P + \frac{a^2}{4} + \frac{x_P^2 y_P^2}{a^2} = \frac{a^2}{4}.$$

Togliendo da ambo i membri il termine $\frac{a^2}{4}$ e dividendo tutto per x_p (è possibile far questo poiché si ha sempre $x_p > 0$) si ottiene $x_p (a^2 + y_p^2) = a^3$ e quindi

$$x_p = \frac{a^3}{a^2 + y_p^2}$$

che è proprio l'equazione suggerita dal testo del problema, a patto di scambiare x con y . Poco male, lo facciamo e concludiamo che il luogo Γ ha equazione cartesiana

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

rispetto al nuovo sistema di riferimento indicato in figura 4.

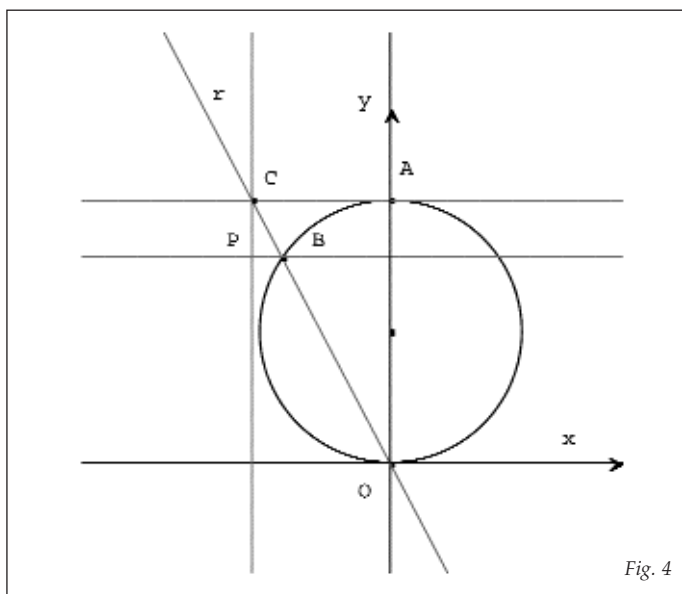


Fig. 4

Risposta alla domanda 3. Dalle costruzioni geometriche precedenti abbiamo già un'idea di come si comporta il grafico della funzione $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Un'idea ancora migliore ce la facciamo considerando il caso di $a = 1$ e i grafici delle funzioni $x^2 + 1$, $\frac{1}{x^2 + 1}$ (fig. 5) che possiamo disegnare qualitativamente in un attimo². Ora che sappiamo cosa ci dobbiamo aspettare (osserviamo che lo studio analitico di una funzione dovrebbe essere sempre preceduto da uno studio qualitativo), passiamo a studiare il grafico di f con i soliti strumenti del Calcolo differenziale.

La funzione è pari, quindi è simmetrica rispetto all'asse delle y . Il suo grafico passa per il punto $(0, a)$ ed è sempre compreso fra l'asse delle x e la retta $y = a$, poiché $\frac{a^2}{a^2 + x^2} \leq 1 \forall x$, dunque il valore massimo è a , assunto in $x = 0$. Inoltre si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} = 0$$

il che vuol dire che l'asse delle x è un asintoto della funzione

(tutto questo ce lo aspettavamo e ci dà una conferma dei nostri ragionamenti).

Calcoliamo poi la derivata prima

$$D(a^3(x^2 + a^2))^{-1} = a^3(-1)(x^2 + a^2)^{-2}2x$$

e vediamo immediatamente che la funzione f' ha lo stesso segno della funzione $-x$, quindi è crescente nell'intervallo $\{x | x < 0\}$ e decrescente in $\{x | x > 0\}$ (come ci aspettavamo). Infine calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} D(-2a^3x(x^2 + a^2)^{-2}) &= -2a^3[1 \cdot (x^2 + a^2)^{-2} + x(-2)(x^2 + a^2)^{-3}2x] = \\ &= 2a^3(x^2 + a^2)^{-3}[3x^2 - a^2]. \end{aligned}$$

Il segno della derivata seconda è lo stesso della funzione $(3x^2 - a^2)$, ossia è negativo nell'intervallo $I = \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ e positivo fuori. La funzione f è quindi concava nell'intervallo I e convessa in ciascuna delle due semirette esterne, e ha i flessi nei punti $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}a, \frac{3}{4}a\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}a, \frac{3}{4}a\right)$. Osserviamo che la posizione esatta dei flessi è l'unica informazione che il calcolo differenziale ci ha dato in più sul grafico, rispetto all'analisi qualitativa fatta all'inizio.

Procediamo infine al calcolo dell'area compresa fra la curva Γ e il suo asintoto, che abbiamo visto essere l'asse delle x . In formula, dobbiamo calcolare l'integrale

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx.$$

La sostituzione $\frac{x}{a} = t$ ci permette immediatamente di scrivere una primitiva

$$\int \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx = a \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = a \int \frac{1}{1 + t^2} a dt = a^2 \arctan t =$$

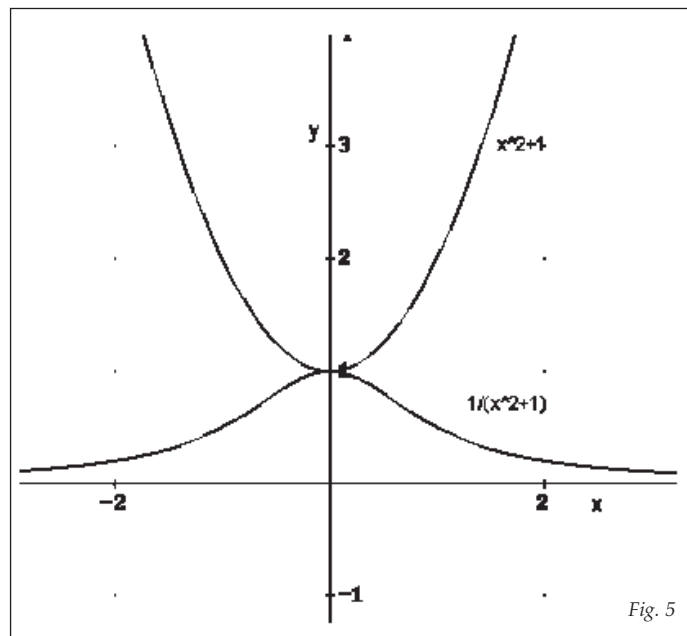
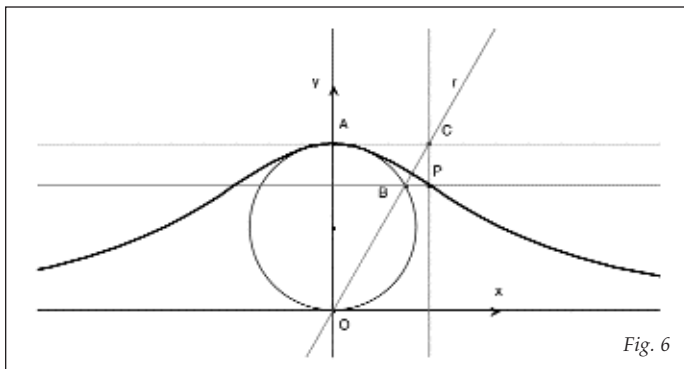


Fig. 5

2. Se siamo attenti, possiamo perfino osservare che $\frac{a^3}{a^2 + x^2} = a \frac{1}{1 + (x/a)^2}$ e quindi che il grafico della nostra funzione, per un certo valore del parametro a , si ottiene dilatando di un fattore a rispetto all'origine il grafico relativo al caso $a = 1$, ma questo è forse chiedere troppo.



$$= a^2 \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

e l'integrale in (3) si calcola ad esempio come

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[a^2 \arctan\left(\frac{c}{a}\right) - a^2 \arctan\left(-\frac{c}{a}\right) \right] =$$

$$= a^2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = a^2 \pi.$$

Poiché l'area del cerchio dato all'inizio è $\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$, la dimostrazione è conclusa e anche la risoluzione del problema 1 è completa. Se ne abbiamo voglia (ma non all'esame!!!) possiamo utilizzare una applicazione grafica per disegnare il luogo Γ . In figura 6 è riportato il disegno ottenuto con Cabri Géomètre II plus³.

Problema 2

Lettura e comprensione del testo. È data una funzione con parametri e sono date alcune condizioni che tale funzione deve soddisfare. Ci aspettiamo che scrivendo le condizioni come opportune equazioni si riesca facilmente a ricavare i valori dei parametri. Fatto questo, dovremo studiare la funzione così determinata e fare diversi calcoli che non sembrano concettualmente difficili. Tuttavia non è facile valutare a priori la lunghezza di questi calcoli.

Determinazione dei parametri.

1. Dire che la funzione f è pari equivale a dire che, per tutti gli x , si deve avere $f(x) = f(-x)$. Nel nostro caso questo si scrive

$$a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c$$

e dovrebbe suggerire che si deve avere necessariamente $a = b$. Per essere rigorosi, osserviamo che la condizione precedente equivale a

$$(a - b)2^x + (b - a)2^{-x} = 0$$

e che questo vale per ogni x . Quindi deve valere ad esempio in particolare per $x = 1$, e da questo segue subito che

$$a = b.$$

2. La condizione $f(0) = 2$, nel nostro caso (usando il fatto appena trovato che $a = b$), diventa

$$2a + c = 2.$$

3. Inoltre, sempre nel nostro caso (usando il fatto appena tro-

vato che $c = 2 - 2a$) l'integrale che compare nella terza condizione diventa

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (a2^x + a2^{-x} + 2 - 2a) dx =$$

$$= \left[\frac{a}{\log 2} (2^x - 2^{-x}) + 2x - 2ax \right]_0^1 = a \frac{3}{2 \log 2} + 2 - 2a$$

dove il logaritmo è in base e , e la terza condizione diventa semplicemente

$$a = 1.$$

In conclusione, sostituendo ai parametri i valori trovati, si ottiene la funzione g

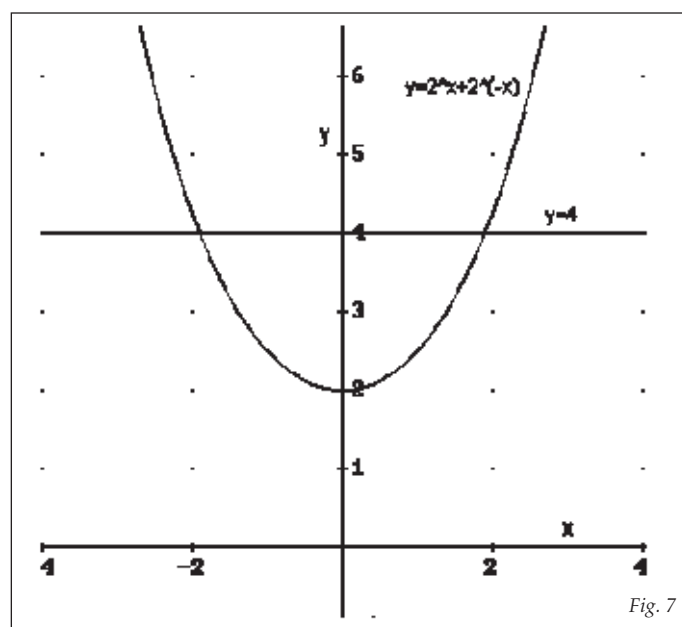
$$g(x) = 2^x + 2^{-x}$$

che dovrebbe essere familiare agli studenti, poiché è un classico esempio che si dà per esercizio in tutti i corsi di analisi

(osserviamo anche che $g(x) = 2 \frac{e^{x \log 2} + e^{-x \log 2}}{2} = 2 \cosh(x \log 2)$,

dove $\cosh(t)$ è la funzione coseno iperbolico).

Sommando i grafici delle due funzioni 2^x e 2^{-x} si vede immediatamente l'andamento qualitativo del grafico di g e, in particolare, che la funzione ha un valore minimo uguale a 2 per $x = 0$ e tende all'infinito sia per x che va a più infinito, sia per x che va a meno infinito. Uno studio più accurato può procedere come segue. Sappiamo già che la funzione è pari, dunque il grafico è simmetrico rispetto all'asse y . Si ha ovviamente che $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. La derivata prima di g è $g'(x) = \log 2 (2^x - 2^{-x})$ e la derivata seconda è $g''(x) = (\log 2)^2 (2^x + 2^{-x})$. La derivata seconda è positiva ovunque, quindi la funzione è convessa, mentre la derivata prima è crescente e ha $x = 0$ come unico zero. In $x = 0$ la funzione ha un minimo assoluto (tutto questo si vedeva sostanzialmente già senza fare conti, ma è utile vederlo confermato). Il grafico G è riportato in figura 7, dove è anche disegnata la retta r di equa-



3. Si veda ad es. il sito <http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/>

zione $y = 4$, che dobbiamo considerare nella domanda successiva.

Ora il testo richiede di determinare, approssimativamente, con un opportuno procedimento iterativo a nostra scelta, le ascisse dei punti in cui la retta r interseca il grafico G . Si vede chiaramente che i punti di intersezione devono essere due, equidistanti dall'asse y . La dimostrazione è ad esempio: la funzione ha valore minore di 4 in $x = 0$ e tende all'infinito per x che tende a $+\infty$, inoltre è continua, dunque assume certamente il valore 4 nel semiasse positivo, e ciò accade in un solo punto, poiché la derivata g' è positiva in $(0, +\infty)$. Se indichiamo con α quel numero positivo tale che $g(\alpha) = 4$, poiché la funzione è pari, si avrà anche $g(-\alpha) = 4$ e $-\alpha$ sarà l'unico punto nel semiasse negativo in cui questo accade. Le ascisse che ci interessano sono quindi $-\alpha$ e α ed è sufficiente determinare un'approssimazione di α .

Come procedimento iterativo, data la convessità della funzione, sarebbe utilizzabile il metodo delle tangenti, che converge molto velocemente, tuttavia, anche se meno veloce, preferiamo usare un algoritmo di bisezione, che è un po' più semplice e di applicabilità molto generale (e consente comunque di mostrare capacità algoritmiche e di analisi numerica). Cominciamo con una descrizione a parole dell'algoritmo, che si applica a qualsiasi funzione continua.

Prendiamo un intervallo $I_0 = [a_0, b_0]$ tale che $g(a_0) < 4$ e $g(b_0) > 4$.

Passo 1. Si prende il punto medio c_0 di I_0 e si calcola $g(c_0)$. Dopodiché

$$\begin{cases} \text{se } g(c_0) > 4 \text{ si pone } I_1 = [a_0, c_0] \\ \text{se } g(c_0) < 4, \text{ si pone } I_1 = [c_0, b_0] \\ \text{se } g(c_0) = 4, \text{ la procedura termina.} \end{cases}$$

Passo ($n + 1$). Si prende il punto medio c_n dell'intervallo I_n (che è stato definito al passo n) e si calcola $g(c_n)$. Dopodiché

$$\begin{cases} \text{se } g(c_n) > 4 \text{ si pone } I_{n+1} = [a_n, c_n] \\ \text{se } g(c_n) < 4, \text{ si pone } I_{n+1} = [c_n, b_n] \\ \text{se } g(c_n) = 4, \text{ la procedura termina.} \end{cases}$$

Osserviamo che l'algoritmo descritto compie ad ogni passo la stessa operazione, applicandola all'intervallo di approssimazione ottenuto nel passo precedente. In questo senso è un algoritmo *iterativo*. Se al passo $(n + 1)$ -esimo l'algoritmo termina, allora vuol dire che c_n è uno zero di g . Altrimenti, poiché la funzione g è continua e prende valori di segno opposto in a_n e b_n , siamo comunque certi che nell'intervallo $[a_n, b_n]$ c'è almeno uno zero di g . Se prendiamo il punto medio c_n dell'intervallo $[a_n, b_n]$ come approssimazione n -esima di tale ze-

ro, commettiamo un errore non superiore a $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

[Osserviamo che questo algoritmo può essere utilizzato come argomento per dimostrare il teorema degli zeri].

Procediamo infine al calcolo numerico approssimato dello zero α nel nostro caso. Decidiamo di cominciare dall'intervallo di estremi $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$, che soddisfa evidentemente alle condizioni $g(a_0) < 4$ e $g(b_0) > 4$ e applichiamo l'algoritmo *con qualche libertà, come spiegheremo fra un momento*. Otteniamo così la seguente tabella

n	a_n	b_n	c_n	$g(c_n)$
0	1	2	1.5	3.18
1	1.5	2	1.75	3.66
2	1.75	2	1.9	4.00007
3	1.75	1.9	1.899	3.997675
4	1.899	1.9	1.8995	–

Prendendo come valore approssimato il punto medio $c_4 = 1.8995$ di I_4 ci garantiamo un errore assoluto minore di 0.0005 e un errore relativo non superiore a $0.0005/2$, che corrisponde allo 0.025%. Tuttavia, tenendo conto dei valori della funzione negli estremi, vediamo che probabilmente 1.9 è una approssimazione ancora migliore ed è un numero più semplice da usare. Quindi nel seguito useremo questo valore.

Nota Bene. I primi due passi, corrispondenti al calcolo di c_0 e c_1 , sono stati effettivamente fatti secondo l'algoritmo iterativo descritto sopra, ma nei due passi successivi (corrispondenti al calcolo di c_2 e c_3) anziché il punto medio dell'intervallo precedente si è scelto un altro punto che si è ritenuto essere migliore, veduto il valore della funzione negli estremi. Precisamente, anziché prendere il valore medio 1.875, si è preso $c_2 = 1.9$, poiché si è visto che $g(2) = 4.24$ è più vicino a 4 di $g(1.75)$. Questa si è rivelata una scelta assai fortunata, poiché $g(1.9)$ è risultato essere molto vicino (da sopra) a 4. A causa di questo si è deciso poi di derogare ancora all'algoritmo e di prendere $c_3 = 1.899$. In conclusione, in soli 4 passi si è stimato α con un errore relativo abbastanza piccolo. Osserviamo che ad ogni passo abbiamo utilizzato un numero di cifre decimali diverso, aumentando la precisione secondo la necessità. Bisogna però dire che l'algoritmo iterativo, per quanto «meno intelligente» (nel senso di «meno capace di adattarsi ai singoli casi»), resta comunque migliore al fine di realizzare un programma di calcolo automatico, poiché esegue ripetutamente uno stesso ciclo di istruzioni ed è semplice da scrivere. Fatto tutto questo, o anche prima di fare tutto questo, ci dovremmo accorgere (io però non ci avevo pensato, nonostante fosse evidente, e devo l'osservazione a un collega) che α è soluzione dell'equazione $2^x + 2^{-x} = 4$. Ponendo allora $2^x = t$, si ottiene un'equazione che ha soluzioni $t = 2 \pm \sqrt{3}$ e quindi $\alpha = \log_2(2 + \sqrt{3})$. A questo punto possiamo usare la calcolatrice per ottenere un valore approssimato di α , che possiamo usare come controllo della nostra precedente approssimazione. Si noti che quest'ultimo metodo algebrico non può essere considerato una risposta alla domanda del

problema, che chiede esplicitamente di usare un algoritmo iterativo.

Calcoliamo ora l'area della regione finita del piano compresa fra r e G , ossia la regione compresa tra i grafici, sopra l'intervallo $[-\alpha, \alpha]$. Diamo solo una rapida indicazione perché è del tutto standard. L'area è data dall'integrale

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (4 - g(x)) dx = 4 \cdot 2 \cdot \alpha - \frac{2}{\log 2} (2^{\alpha} - 2^{-\alpha}) = 8 \cdot 1.9 - 2.8854 \cdot (3.73213 - 0.26794) = 5.2044$$

dove abbiamo usato 1.9 come valore per α . Naturalmente il valore trovato è a meno di un certo errore che non vogliamo stimare con precisione, anche perché non è richiesto.

La domanda successiva ci chiede di calcolare $\int \frac{1}{g(x)} dx$.

Usando la sostituzione $t = 2^x$, $dt = 2^x \log 2 dx$ si ha $\frac{1}{g(x)} = \frac{t}{1+t^2}$ e quindi

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \frac{1}{\log 2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\log 2} \arctan t + \text{cost} = \frac{1}{\log 2} \arctan 2^x + \text{cost}.$$

Per sicurezza si può verificare che $D\left(\frac{1}{\log 2} \arctan 2^x\right) = \frac{1}{g(x)}$.

Concludiamo determinando la funzione g^* (nel testo del problema è denotata con g' , ma abbiamo cambiato il nome perché si potrebbe confondere con la derivata di g) il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r . Il modo che mi sembra più chiaro (ma si può ragionare anche in altri modi) è il seguente:

- (1) abbasso G di 4, cioè prendo la funzione $f(x) - 4$;
- (2) rifletto rispetto all'asse x il grafico così abbassato, cioè prendo la funzione $-[f(x) - 4]$;
- (3) alzo il grafico ottenuto di 4, cioè prendo la funzione $-[f(x) - 4] + 4$.

In conclusione la funzione trovata è $g^* = -f(x) + 8$.

Quesiti

Quesito 1. Nell'arco dell'intero campionato, ogni squadra deve ospitare in casa una e una sola volta tutte le altre, quindi in ciascuno dei 18 campi si devono giocare 17 partite. In totale sono $17 \cdot 18 = 306$ partite. In alternativa si può ricordare che le coppie che si formano con n elementi sono $\frac{n(n-1)}{2}$, ma, calcolando partite di andata e partite di ritorno, bisogna raddoppiare questo numero.

Quesito 2. Bisogna fare attenzione che la procedura di scelta è: «prima si sceglie una scatola a caso, poi da quella scatola si estrae una lampadina», il che è diverso da «metto insieme tutte le lampadine di tutte le scatole e ne estraggo una». In particolare osserviamo che nel primo caso (il nostro) è irrilevante il numero di lampadine che si trova in ciascuna scatola, mentre nel secondo caso sarebbe importante. La probabi-

lità è data da $\frac{1}{3} \cdot 0.05 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 = \frac{1}{3} \cdot 0.35 \approx 0.117$ cioè è circa del 11.7%.

Quesito 3. Il volume del cono è $v = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot h$, dove h è l'altezza e x è il raggio di base. D'altra parte, per il teorema di Pitagora si ha $h = \sqrt{4 - x^2}$, dove 4 è il quadrato dell'apotema. Abbiamo così che il volume, espresso come funzione del raggio x , è $v(x) = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \sqrt{4 - x^2}$. Un rapido studio qualitativo mostra che la funzione $v(x)$ deve avere uno ed un solo punto di massimo. Per trovare il valore massimo conviene derivare la funzione $v(x)$ rispetto a x . Il risultato è $v'(x) = \frac{\pi}{3} \left(2x\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} \right) = \frac{\pi}{3} x \frac{8 - 3x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ e si vede che

l'unico zero positivo della derivata è $x_0 = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Si ha poi $v_{\max} = v(x_0) = \frac{16}{27} \pi \sqrt{3} \approx 3.2245$. Poiché l'unità di misura lineare usata è il decimetro, il volume è espresso in decimetri cubi, ossia litri. Il volume massimo in centilitri è quindi 322.4.

Quesito 4. Il grafico di $P(x)$ taglia quattro volte la retta $y = 2$ se e solo se il grafico di $P(x) - 2$ taglia quattro volte l'asse x . Dunque basta prendere ad esempio $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) + 2$.

Quesito 5. È del tutto elementare, molto più lungo da dirsi che da pensare. Ricordiamo il teorema di Rolle: *Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso $[b, c]$ e derivabile nell'intervallo aperto (b, c) . Supponiamo inoltre che $f(b) = f(c)$. Allora esiste un $x_0 \in (b, c)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

Consideriamo la funzione $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ e siano b, c due radici reali di f , tali cioè che $f(b) = f(c) = 0$. La funzione f è continua e derivabile su tutta la retta, quindi nell'intervallo $[b, c]$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle e pertanto c'è un punto x_0 compreso fra b e c in cui la derivata di f si annulla. Ma la derivata di f è proprio la funzione $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$ e così abbiamo finito.

Quesito 6. Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + bx$. L'andamento qualitativo del grafico è evidente come somma dei comportamenti di x^3 e di bx (figura 8). In particolare, se $b > 0$ abbiamo che f è crescente e interseca una sola volta qualsiasi retta orizzontale. Se invece $b < 0$ è «abbastanza negativo», è possibile che in una zona a sinistra di $x = 0$ la funzione f si

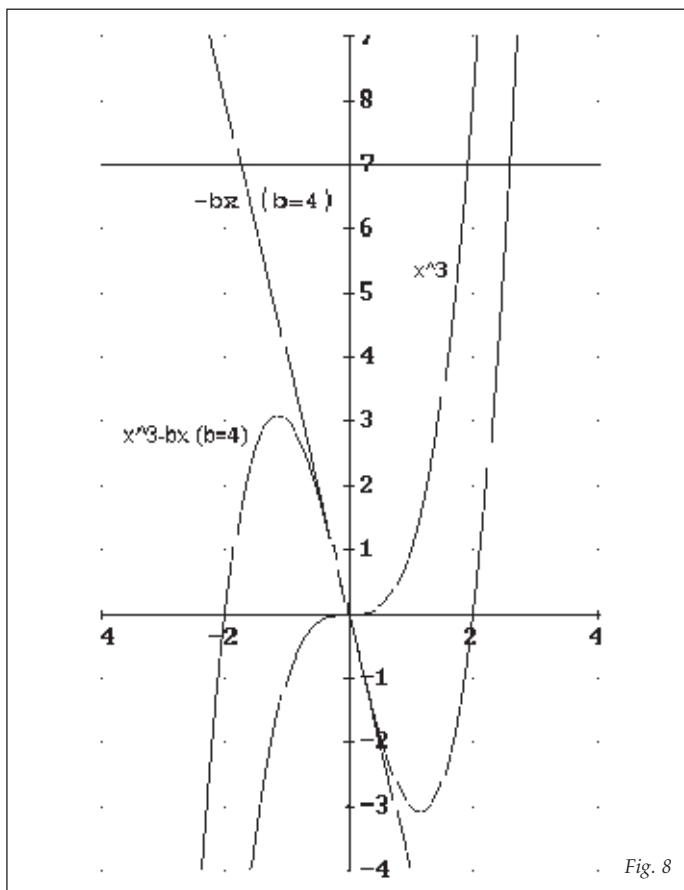


Fig. 8

alzi sopra il valore 7. In tal caso le radici sono 3. Se ora ci accontentiamo, come chiede il quesito, di trovare *un* valore di b in corrispondenza al quale l'equazione abbia tre radici, allora è sufficiente ad esempio osservare che per $x = 0$ il valore del membro sinistro (indipendentemente da b) è negativo (-7), mentre per $x = -1$, se b vale ad esempio 10, allora il valore del membro sinistro è positivo ($+2$). Tenuto poi conto del comportamento del membro sinistro all'infinito si deduce che ci devono essere tre zeri. Se invece vogliamo trovare *tutti* i valori di b per cui l'equazione ha tre radici, è sufficiente calcolare il massimo relativo della funzione f . Calcoliamo allora la derivata di f , dopo aver posto per comodità $b = -k$. Si ha $f'(x) = 3x^2 - k$ e la derivata si annulla per $x = \pm \sqrt{\frac{k}{3}}$, dove bisogna richiedere che $k > 0$. Per quanto detto ci interessa il valore di f nella radice negativa, ossia $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^3 - k\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = \frac{2}{3}k \sqrt{\frac{k}{3}}$. Se questo valore è maggiore di 7 allora l'equazione considerata nel quesito ha tre

radici reali. Questo si ha per $k > \left(\frac{21\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, ossia per $b < -\left(\frac{21\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx -6.92$.

Quesito 7. Si ha $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + \text{cost}$ e quindi $4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 4(\arctan 1 - \arctan 0) = 4 \frac{\pi}{4} = \pi$. Per approssimare l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ basta calcolare l'area di un op-

portuno poligono inscritto nel sottografico. Il poligono che useremo è una unione di trapezi. Non ci interessa avere una approssimazione molto buona e il nostro obiettivo è soprattutto quello di illustrare il metodo, quindi ci limitiamo a *due* trapezi. Consideriamo allora i punti $P_0 = (x_0, 0) = (0, 0)$, $P_1 = (x_1, 0) = (0.5, 0)$, $P_2 = (x_2, 0) = (1, 0)$ sull'asse x e i corrispondenti punti sul grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ossia $A_0 = (x_0, f(x_0)) = (0, 1)$, $A_1 = (x_1, f(x_1)) = (0.5, 0.8)$, $A_2 = (x_2, f(x_2)) = (1, 0.5)$. Consideriamo poi i due trapezi $P_0P_1A_1A_0$ e $P_1P_2A_2A_1$ e calcoliamone le aree: $\text{area}(P_0P_1A_1A_0) = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(f(x_0) + f(x_1))$ e $\text{area}(P_1P_2A_2A_1) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(f(x_1) + f(x_2))$. La somma delle due aree (nel nostro caso è 0.775) è una approssimazione dell'integrale. Anche qui non entriamo nella questione di stimare l'errore che si è commesso.

Quesito 8. La presenza del fattore π suggerisce di pensare a un solido di rotazione. Infatti, il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse x il sottografico di una funzione definita sul segmento $[0, 1]$, si calcola integrando da 0 a 1 l'area delle sezioni piane del solido, ortogonali all'asse stesso. Se vogliamo che il volume sia dato dall'integrale assegnato, l'area della sezione corrispondente al punto di coordinata x deve essere πx^3 e quindi il raggio deve essere $x^{\frac{3}{2}}$. In conclusione l'esempio cercato è il solido che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse delle x il sottografico della funzione $x^{\frac{3}{2}}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Quesito 9. Poiché $f''(x) = \sin x$, si ha che $f'(x) = -\cos x + c$. La condizione $f'(0) = 1$ diventa allora $-\cos(0) + c = 1$, da cui $c = 2$. Infine $f(\pi/2) - f(0) = \int_0^{\pi/2} f'(x) dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos x + 2) dx = \pi - 1$.

Quesito 10. Per verificare che le radici sono tre è sufficiente osservare che $x^3 - 3x + 1$ è positivo in 0 e negativo in 1 (in fondo, è la seconda parte della domanda che ci fa accorgere di questo...) e tener conto del comportamento all'infinito. Se non ci si accorge di questo, allora, come nel quesito 6, si può cercare il minimo relativo di $f(x) = x^3 - 3x$ e verificare che è minore di -1 . Per far questo si calcola la derivata di f , che è $f'(x) = 3x^2 - 3$ e si annulla per $x = \pm 1$. Il minimo relativo è quindi $f(-1) = -2$ e la cosa è fatta. Il calcolo approssimato della radice si può fare in modo analogo a quello discusso nel problema 2.

Commenti

La prova scritta di matematica è sempre stata presente nel liceo scientifico, anche dopo le riforme del 1969 e poi del 1997. La struttura della prova è stata sostanzialmente stabile fino al 2000: si chiedeva di risolvere almeno 2 problemi su 3 o 4 assegnati. Gli argomenti della prova sono stati per lungo tempo soprattutto la geometria analitica piana e lo studio del grafico delle funzioni, con qualche ingrediente di geometria euclidea e di trigonometria e con qualche semplice calcolo di integrali. Negli anni '90, nell'indirizzo PNI, i problemi di analisi sono diventati più complessi e si sono arricchiti di domande relative alle procedure di calcolo numerico e di approssimazione, inoltre sono comparsi i temi del calcolo delle probabilità e della statistica, dell'algebra lineare e degli algoritmi, mentre la geometria analitica «solita» (intersezioni e tangenze di coniche, fasci, luoghi) ha avuto un ruolo minore di prima.

La struttura della prova è stata riformata nel giugno 2001 con gli obiettivi seguenti (citiamo documenti a suo tempo diffusi dal Ministero).

Obiettivi della prova. Con riferimento alla matematica studiata nell'intero corso di studi la prova scritta è intesa ad accertare:

- le conoscenze specifiche;
- le competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti;
- le capacità logiche e argomentative.

Struttura della prova. Il testo è costituito da due problemi (articolati al loro interno in almeno tre quesiti, possibilmente indipendenti tra loro) e da un questionario contenente altri quesiti (da un minimo di 6 a un massimo di 10) riguardanti argomenti del programma. La tipologia delle questioni poste è tale da offrire al candidato le più ampie opportunità di esprimere conoscenze, competenze e capacità acquisite nel corso degli studi. Il candidato è tenuto a risolvere uno dei due problemi proposti a scelta e circa la metà dei quesiti del questionario.

Vorrei ora affrontare le seguenti questioni: primo, la prova assegnata nel 2003 risponde agli obiettivi? Secondo, in che modo le commissioni avrebbero dovuto valutare gli elaborati per rispettare le indicazioni del Ministero?

Rispondo alla prima questione. I problemi sono articolati ciascuno in almeno tre quesiti. I quesiti del primo problema sono effettivamente indipendenti, nel senso che ciascuno può essere affrontato senza aver risolto gli altri. In particolare, anche uno studente che non ha risposto alle prime due domande può affrontare la terza utilizzando l'equazione cartesiana del luogo Γ , che viene data nel testo. Nel secondo problema invece, se non si riescono a determinare i valori dei parametri (compito peraltro piuttosto facile), non si possono affrontare le cinque domande successive.

Le questioni poste nei problemi e nei quesiti riguardano una pluralità di argomenti presenti nei programmi dell'indirizzo PNI e richiedono capacità di comprendere il linguaggio matematico, di dimostrare, di argomentare, di rappresentare graficamente, di modellizzare, di calcolare. I problemi sono a mio parere ragionevolmente significativi, non sono inutilmente complicati, richiedono una buona capacità di comprensione del testo e hanno un grado di difficoltà adeguato. Nei quesiti si rileva una presenza forse eccessiva di domande (quattro) relative allo studio delle radici di polinomi con i metodi dell'Analisi Matematica e una modesta presenza di geometria analitica e probabilità, che avrebbero potuto avere più spazio. Il grado di difficoltà dei quesiti è difficile da valutare. A me sono sembrati abbastanza facili, e anzi i numeri 1, 2, 4, 5, 8, 9 direi che sarebbero dovuti essere quasi immediati, sia concettualmente, sia per quanto riguarda il calcolo, ma non ho una statistica delle scelte e dei risultati degli studenti. Osservo che non compare alcuna richiesta di codificare algoritmi in un codice, forse prendendo atto di una realtà liceale in cui la programmazione è fondamentalmente assente anche negli indirizzi PNI. Complessivamente mi pare un buon tema di esame.

Per quanto riguarda invece la seconda delle questioni sollevate sopra, a quanto mi risulta, le commissioni in genere si danno, almeno teoricamente (in pratica non mi è chiarissimo cosa succeda), regole di valutazione del tipo: 7.5 punti per il problema (ripartiti uniformemente fra le domande) e 7.5 punti per i quesiti (1.5 per ciascun quesito). Questo criterio, come altri simili, risponde all'esigenza di uniformità, trasparenza e certezza di determinazione dei punteggi, però ha alcuni svantaggi. Ad esempio consideriamo due soluzioni tipo.

Candidato A. Affronta il problema 1 e risponde alle domande 1 e 2, disegnando buone figure e dimostrando le affermazioni. Inoltre affronta e risponde correttamente ai quesiti 2, 3, 7, 10, quest'ultimo con un'esposizione precisa dell'algoritmo iterativo. Secondo il criterio enunciato, il punteggio del candidato A è 11 (appena sufficiente).

Candidato B. Affronta il problema 2 e risponde a tutte le domande meno l'ultima, ma non stima l'errore nel procedimento iterativo nella domanda 3. Inoltre risponde correttamente ai quesiti 5, 6, 7, 9, 10. Secondo il criterio enunciato, il punteggio del candidato B è 13.75, che viene arrotondato a 14 (vicino al massimo).

I punteggi assegnati in questo modo, a mio parere, sono sostanzialmente rovesciati rispetto a quello che sarebbe giusto.

Infatti il candidato A ha mostrato una conoscenza della geometria, della probabilità, del calcolo differenziale e integrale, degli algoritmi e del calcolo numerico, e capacità di rappresentare graficamente, dimostrare, modellizzare. Questo è quasi il massimo che si può chiedere a uno studente. Gli si potrebbe dare quasi 15. Invece il candidato B ha mostrato in diversi modi una conoscenza del Calcolo differenziale e Integrale, il che si può considerare sufficiente, ma non entusiasmante.

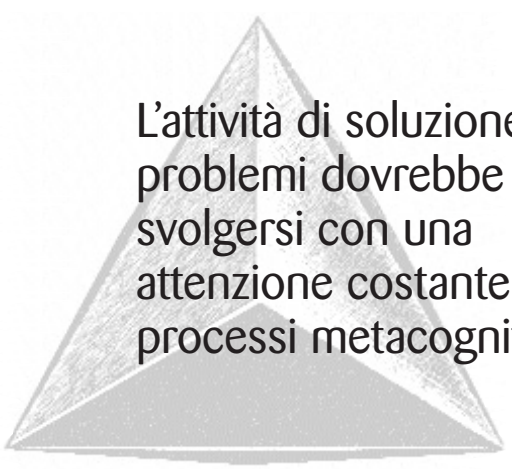
Come si dovrebbe fare allora a valutare? La questione è delicata e non può essere trattata in modo affrettato. Per ora mi è sufficiente avere mostrato (spero) che il criterio puramente numerico di assegnare punteggi alle domande può essere fortemente ingiusto. E osservo in generale che una prova dovrebbe essere progettata *insieme* al criterio di attribuzione del punteggio (ma questo pare che non si possa fare per l'Esame di Stato, con le norme in vigore, poiché le commissioni sono sovrane).

Vengo ora alla questione di come preparare gli studenti all'Esame. Credo che l'attività che più caratterizzi il «fare» del matematico sia la risoluzione di problemi, che porta con sé l'introduzione di nuovi «oggetti» matematici e la scoperta di nuove relazioni fra questi oggetti. Anche la sistemazione disciplinata del sapere in teorie assiomatiche è importante, ma viene per seconda (credo che questa scala di valori sia largamente condivisa nella comunità dei matematici). A mio parere anche l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica dovrebbero essere largamente basati sull'individuazione e sulla soluzione di problemi, non solo nel momento della «applicazione» della teoria, ma già come momento iniziale di introduzione dei concetti. In questo modo gli oggetti matematici sarebbero costitutivamente intessuti in una trama complessa di significati, che verrebbero mantenuti anche nella fase di astrazione e sistemazione teorica. Inoltre, l'attività di soluzione dei problemi dovrebbe svolgersi con una attenzione costante ai processi metacognitivi, che ci permettono di tenere sotto controllo quello che stiamo facendo, individuare obiettivi, formulare strategie, prendere decisioni, valutare i progressi che facciamo, dirigere la nostra azione. Se si riguarda la soluzione dei problemi e dei quesiti che ho dato precedentemente, si noteranno molte espressioni del tipo: «è meglio», «conviene», «decidiamo», «scegliendo», «dovrebbe essere familiare», «dovrebbe essere riconosciuto», «abbiamo già un'idea», «come ci aspettavamo» e così via. Tutte queste espressioni corrispondono a valutazioni, a scel-

te, a controlli che, insieme al bagaglio di conoscenze disciplinari, consentono di trovare la strada della soluzione di un problema. Gli studenti dovrebbero abituarsi a divenire consapevoli di queste scelte, valutazioni e controlli e a metterli in atto adeguatamente. Il modo migliore è risolvere problemi e pensare a quello che si sta facendo. Può essere molto più utile pensare a lungo ad un solo problema e magari neanche riuscire a risolverlo, che fare (o peggio guardare qualcuno che fa) 20 esercizi, senza pensare. Quanti studenti sono consapevoli di questo (che è appunto un esempio di sapere metacognitivo)?

Concludo ampliando il discorso ad una questione più generale, alla quale bisogna pensare di più: *quale sarebbe il modo migliore di verificare le conoscenze degli studenti che escono dalla scuola secondaria superiore?* Se si vuole che rimanga un Esame di Stato, e per questo possono esserci dei buoni motivi (credo anche costituzionali), lo si può lasciare. In questo Esame, per quanto riguarda la matematica, sono convinto che le capacità di risolvere problemi complessi e di affrontare liberamente quesiti dovrebbero rimanere oggetto di verifica. Ma accanto a questo, nello stesso Esame o in una prova parallela (magari parzialmente facoltativa, eventualmente anche sfasata nel tempo), dovrebbero essere aggiunte delle prove strutturate per la verifica di specifiche conoscenze e competenze, con una valutazione standardizzata, uniformi a livello nazionale o anche europeo (ad esempio come si fa in alcuni test per l'accesso all'Università, o nei test P.I.S.A., o nei test per le certificazioni di competenza per le lingue straniere). Senza aspettarmi miracoli, credo che questo sarebbe utile al fine di dare obiettivi più chiari e definiti a studenti e insegnanti, al fine di aiutare nella preparazione per l'Università, e al fine di avere dati e fare confronti sull'efficacia dei percorsi formativi nel territorio nazionale e in Europa.

Gabriele Anzellotti - Università di Trento



L'attività di soluzione dei problemi dovrebbe svolgersi con una attenzione costante ai processi metacognitivi.