

Matematica

Liceo scientifico

Monica Bianchini - Alessandro Ghelardini

Problema 1

La funzione data $f(x)$ esiste $\forall x \in \mathbb{R} - (-\sqrt[3]{2})$; interseca gli assi cartesiani solo nel punto di coordinate $(0;1)$; è positiva per $x > -\sqrt[3]{2}$ ed è negativa per $x < -\sqrt[3]{2}$. Per il grafico della funzione, seppur non richiesto, v. fig. 1. L'equazione della parabola cercata è del tipo $y = ax^2 + bx + c$; si sa che passa per il punto $P(-1;3)$, il che implica $a - b = 3$, $a = b + 3$. L'equazione allora assume la forma $y = (b + 3)x^2 + bx$. Poiché le due curve devono essere ortogonali in P , lo sono le rette tangenti in P alla parabola ed alla $f(x)$. Risulta: $y' = 2(b + 3)x + b$, $f'(x) = \frac{-x^4 - 6x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$ e quindi $y'(-1) = -b - 6$ e $f'(-1) = -11$.

Uguagliando le due quantità si ottiene $b = -\frac{67}{11}$ e pertanto la parabola richiesta ha equazione: $y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}$.

La retta tangente in P alla k ha equazione $y - 3 = -11(x + 1)$, da cui $y = -11x - 8$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} \end{cases}, \text{ si ottiene l'equazione: } 11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x +$$

$+ 18 = 0$; tale equazione, per la condizione di tangenza in P , ammette $x = -1$ come radice doppia; usando il metodo di Ruffini otteniamo: $(x + 1)^2 (11x^2 - 14x + 18) = 0$. Il trinomio di secondo grado, come si vede dall'esame del discriminante, non ha radici reali e quindi possiamo concludere che la retta tangente in P alla curva K non ha con essa ulteriori punti di intersezione oltre quello di tangenza in P .

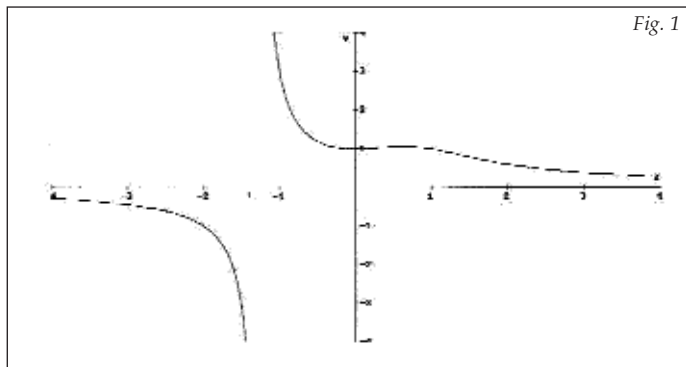


Fig. 1

LA TRACCIA MINISTERIALE

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

- Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.
- Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y , sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari).
- Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
- Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x .
- Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

Problema 2

Si considerino le lunghezze seguenti

$$[1] \quad a + 2x, \quad a - x, \quad 2a - x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

- Determinare per quali valori di x le lunghezze $[1]$ si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenero.
- Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze $[1]$, ne esiste uno di area massima o minima.
- Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le $[1]$ rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
- Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a : calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piano DBC e ABC .

Questionario

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V'' . Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$.

3. Considerati i numeri reali a, b, c, d – comunque scelti – se $a > b$ e $c > d$ allora:

- A) $a + d > b + c$; C) $ad > bc$;
B) $a - d > b - c$; D) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4. Si consideri la seguente proposizione: «La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica». Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5. Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

6. Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x - 1)^7 (4 - 2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

7. Calcolare la derivata, rispetto ad x , della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

8. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1, 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(1, 3)$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $(1, 3)$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

- A) un punto; C) infiniti punti;
B) due punti; D) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) \, dx = a, \quad \int_0^6 f(x) \, dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) \, dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x) \, dx = \ln 4.$$

La retta tangente alla k ha coefficiente angolare

$$m(x) = \frac{-x^4 - 6x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}; \text{ la condizione di parallelismo all'asse delle } x \text{ porta all'equazione } m(x) = 0, \text{ cioè } \frac{-x^4 - 6x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2} = 0$$

ossia $x(-x^3 - 6x + 4) = 0$, da cui $x = 0$ e $-x^3 - 6x + 4 = 0$. L'equazione $x^3 + 6x - 4 = 0$ non ammette soluzioni reali razionali quindi è necessario ricorrere al metodo grafico per stabilire l'esistenza di eventuali soluzioni reali irrazionali:

$$x^3 = -6x + 4 \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ y = -6x + 4 \end{cases}. \text{ Dal grafico, fig. 2, si osserva}$$

l'esistenza di una soluzione α , irrazionale, in quanto non appartenente all'insieme dei divisori del termine noto 4 e tale che $0 < \alpha < \frac{2}{3}$.

In conclusione ci sono due punti, uno di ascissa 0 e l'altro di ascissa α , in cui la retta tangente a k è parallela all'asse x .

Il teorema di Lagrange non è applicabile alla $f(x)$ nell'intervallo $[-\sqrt{2}; 0]$ perché la $f(x)$ non è, in tale intervallo, continua (ammette un punto di discontinuità di seconda specie in $x = -\sqrt[3]{2}$, valore interno all'intervallo dato).

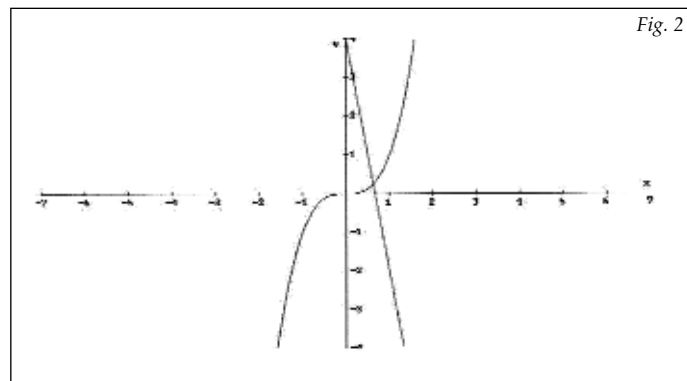


Fig. 2

Problema 2

Per le ipotesi iniziali, a e x sono numeri reali positivi, quindi sicuramente $a + 2x > 0$.

Affinché le lunghezze assegnate: $a + 2x$, $a - x$, $2a - x$ siano le lunghezze dei lati di un triangolo non degenere, devono essere positive anche $a - x$ e $2a - x$; inoltre deve essere verificata la disuguaglianza triangolare (la somma dei due lati minori deve essere maggiore del lato maggiore):

$$\begin{cases} a - x > 0 \\ 2a - x > 0 \\ a - x + 2a - x > a + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < a \\ x < 2a \\ x < \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{a}{2}.$$

Per il calcolo dell'area si applica la formula di Erone: $2p = 4a$ (osserviamo che il perimetro è costante al variare di x), $p = 2a$, ne segue $A(x) = \sqrt{2a(p - a - 2x)(p - a + x)(p - 2a + x)} = \sqrt{2a(a - 2x)(a + x)x}$.

L'area è espressa da una funzione algebrica, irrazionale, intera e quindi avrà valore massimo o minimo per gli stessi valori che rendono massima o minima la funzione radicando

$r(x) = 2a(a - 2x)(a + x)x$. Pertanto $r(x) = 2ax(a^2 - ax - 2x^2) = -4ax^3 - 2a^2x^2 + 2a^3x$ e allora: $r'(x) = -12ax^2 - 4a^2x + 2a^3 \geq 0$. Risolvendo l'equazione associata si hanno per soluzioni $x = \frac{-a \pm a\sqrt{7}}{6}$ e $r'(x) > 0$ per valori interni all'intervallo

$\left(\frac{-a(\sqrt{7} + 1)}{6}, \frac{a(\sqrt{7} - 1)}{6}\right)$; quindi $r'(x) \geq 0$ per

$0 < x \leq \frac{a(\sqrt{7} - 1)}{6}$. Pertanto il triangolo di area massima si

ha per $x = \frac{a(\sqrt{7} - 1)}{6}$.

Per $x = \frac{a}{4}$ si ottiene un triangolo di lati: $\frac{3}{2}a, \frac{3}{4}a, \frac{7}{4}a$. Si indichino $BC = \frac{7}{4}a, AC = \frac{3}{2}a = \frac{6}{4}a, AB = \frac{3}{4}a$. Scelto un segmento $u = \frac{a}{4}$ come unità di misura, si costruisce il segmento BC ,

riportando con riga e compasso a partire dal punto B individuato sopra una retta, sette volte il segmento u , ed in un verso a piacere. Con centro in B e raggio $AB = 3u$ si traccia la circonferenza γ e con centro in C e raggio $CA = 6u$ si traccia la circonferenza γ' . I punti A e A' di intersezione delle due circonferenze γ e γ' individuano con B e C due triangoli isometrici che soddisfano le condizioni richieste. In realtà, i triangoli sono quattro definiti a meno di isometrie (fig. 3).

Valutiamo l'angolo $\widehat{BAC}$, opposto al lato maggiore BC. Per il teorema del coseno abbiamo: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{BAC})$.

Sostituendo: $\left(\frac{7}{4}a\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{3}{4}a\right)\cos(\widehat{BAC})$.

Risolvendo si ottiene $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{9}$, quindi l'angolo $\widehat{BAC}$

è ottuso e il triangolo ottenuto è pertanto ottusangolo.

Calcoliamo l'area del triangolo ABC corrispondente a $x = \frac{a}{4}$, con la formula di Erone precedentemente applicata. $A\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2$. Quindi la misura dell'altezza AH relativa al lato BC è espressa da $2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a^2 \cdot \frac{4}{7a} = \frac{2\sqrt{5}}{7}a$, $AD = a$.

L'angolo formato dai due piani ABC e DBC è l'angolo $\widehat{DHA} = \alpha$ (fig. 4); pertanto dal triangolo rettangolo DAH si ottiene $\frac{AD}{AH} = \tan \alpha$, quindi $\tan \alpha = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{5}}{7}} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \approx 1,565$.

Usando la calcolatrice si ricava: $57^\circ < \alpha < 58^\circ$.

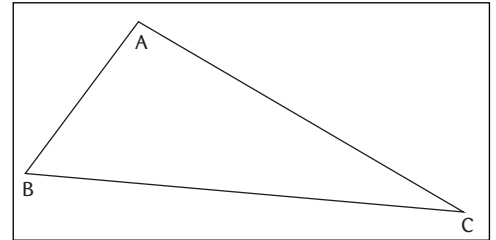
Questionario

1) Il rapporto tra la base maggiore AB e la base minore DC è 4 (fig. 5). Si richiede

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2 \frac{\overline{DH}^2 \overline{AH}}{3} \pi + \overline{DH}^2 \overline{DC} \pi}{\overline{DH}^2 \overline{AB} \pi - 2 \frac{\overline{DH}^2 \overline{AH}}{3} \pi} = \frac{\frac{2}{3} \overline{AH} + \overline{DC}}{\overline{AB} - 2 \frac{\overline{AH}}{3}}$$

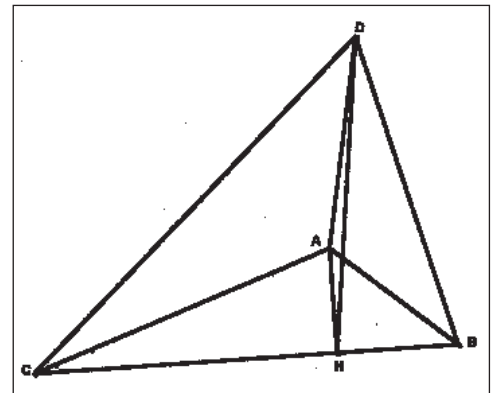
Poniamo $\overline{DC} = a$, allora $\overline{AB} = 4a$; ma $\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2} = \frac{3}{2}a$

Fig. 3



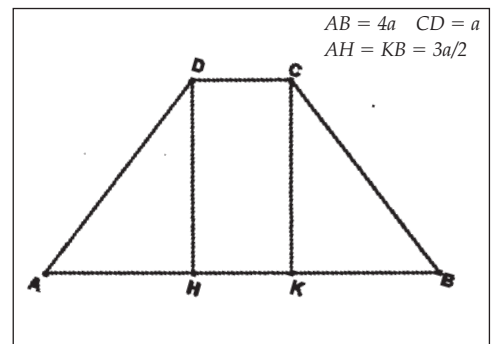
Il triangolo ABC (la cui esistenza è definita a meno di isometrie) ha i lati proporzionali ai numeri 3-6-7.

Fig. 4



La rappresentazione offerta segue le regole dell'assonometria isometrica. L'angolo AHD è quello formato dai 2 piani DBC e ABC. Il segmento AH è perpendicolare a BC e DA è perpendicolare al piano ABC.

Fig. 5



$AB = 4a \quad CD = a$
 $AH = KB = 3a/2$

$$\text{e quindi } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} a + a}{4a - a} = \frac{2}{3}.$$

2) Poiché $\frac{A'}{A''} = 2$, sussiste anche il medesimo rapporto tra l'area di due facce, $f' = 2f''$; poiché le facce sono triangoli equilateri è $l' = \sqrt{2}l''$, avendo indicati con l' e l'' i rispettivi spigoli. Il medesimo rapporto sussiste tra le altezze e quindi:

$$\frac{V'}{V''} = \frac{\frac{1}{3} A'h'}{\frac{1}{3} A''h''} = 2\sqrt{2}.$$

3) Risposta B. Infatti $a > b$ e $c > d \Rightarrow a > b$ e $-d > -c$, addizionando membro a membro si ha $a - d > b - c$.

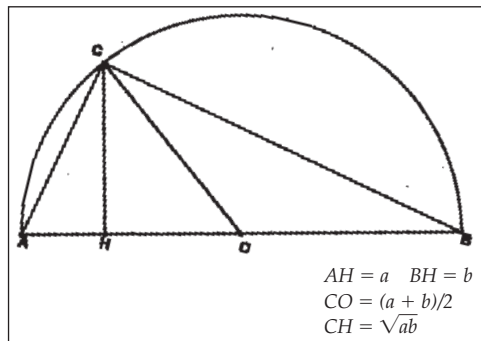


Fig. 6

4) La formulazione del quesito non è esatta. Sarebbe stato opportuno dire: «La media aritmetica di due numeri reali positivi comunque scelti è non minore della loro media geometrica». Infatti: presi due numeri reali positivi a e b , la loro media aritmetica risulta $M_a = \frac{a + b}{2}$, mentre la loro media geometrica

$M_g = \sqrt{ab}$. Quindi, $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$, da cui risulta $a + b \geq 2\sqrt{ab}$;

elevando al quadrato ambo i membri si ottiene $a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$, quindi $(a - b)^2 \geq 0$.

Del quesito riformulato si può dare anche una risoluzione geometrica (v. fig. 6), avendo posto $AH = a$, $HB = b$.

5) Dopo semplici calcoli, applicando il principio di identità dei polinomi si giunge al sistema $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 3b = 1. \end{cases}$ Risolvendo, otteniamo $a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{1}{4}$.

6) La funzione data, essendo algebrica razionale intera, è continua su $\mathbb{R}$ e limitata su un qualsiasi intervallo chiuso contenuto in $\mathbb{R}$; pertanto, per il teorema di Weierstrass, essa ammette massimo e minimo assoluti. Essendo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = 0$, gli unici zeri della funzione, si deduce che essa ammette un massimo assoluto.

7) Possiamo scrivere $f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt = \int_0^{x+1} \ln t dt - \int_0^x \ln t dt$, quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha: $f'(x) = \ln(x + 1) - \ln x$, vale a dire $f'(x) = \ln \frac{x + 1}{x}$.

8) Appliciamo alla funzione $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1;3]$ il teorema della media:

$\int_1^3 f'(x) dx = (3 - 1) f'(c)$ con $c \in (1;3)$. Per il teorema di Barrow-Torricelli $\int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1)$ quindi $f(3) - f(1) = 2f'(c)$, ossia $f(3) = 2f'(c) + 1$; ma poiché $0 \leq f'(x) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq f(3) \leq 5$.

9) Risposta B. Infatti il dominio della funzione è dato da:

$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}$, cioè $x = 1$ e $x = -1$. Pertanto il luogo geometrico si riduce ai due soli punti $(-1;0)$ e $(1;0)$.

10) Risolviamo l'integrale:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \int_0^6 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \frac{b}{2} \text{ avendo posto } 2x = t;$$

quindi $\frac{b}{2} = \ln 2 \Rightarrow b = \ln 4 = 2 \ln 2$.

$$\int_1^3 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 f(t) dt + \int_2^6 f(t) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right) = \frac{1}{2} (b - a).$$

Perciò $\frac{1}{2} (b - a) = \ln 4$ e sostituendo il valore di $b = \ln 4$, si ottiene $\frac{a}{2} = -2 \ln 2$.

Analisi e commento

Nella prova sono presenti quasi tutti gli argomenti oggetto del programma ministeriale del corso completo del liceo scientifico.

Il primo problema, che richiede conoscenze teoriche del programma di Analisi matematica dell'ultimo anno di corso, sembra alla portata di un qualsiasi studente, anche di medio-

All. 1

Sessione suppletiva a.s. 2001-2002 ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO Corso di Ordinamento - Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente ed x come resto.

a) Determinare $f(x)$.

b) Studiare la funzione $y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$

e disegnarne il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G .

e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1},$$

calcolare una primitiva della funzione $\frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

Problema 2

Una piramide di vertice V , avente per base il trapezio rettangolo ABCD, è tale che:

- il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;
- lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;
- la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB , dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una

basse capacità: se affrontato con gli usuali procedimenti di calcolo non esige particolari capacità di ragionamento. Solo il punto d) può aver creato un certo disorientamento tra i candidati non abituati a ricercare almeno l'esistenza di eventuali radici irrazionali di equazioni algebriche. Il tema non fa parte esplicitamente dei vigenti programmi ministeriali, ma è prassi assai comune presentare agli studenti esempi di semplici risoluzioni grafiche di equazioni ed eventuali risoluzioni approssimate con il metodo di bisezione. Osserviamo che, contrariamente alle consuetudini, non viene domandato lo studio completo del grafico della funzione; com'è noto buona parte del tempo del lavoro in classe svolto nell'ultimo anno viene impiegato su questioni di tale genere.

Di un certo interesse didattico e forse anche un po' più originale appare il *secondo problema*. Da osservare che, mentre il primo può essere risolto con metodologie più strettamente legate al corso di matematica dell'ultimo anno, il secondo vuole conoscenze di geometria euclidea acquisite nei primi tre anni. Solo nel punto b) è richiesta l'eventuale applicazione di tecniche proprie dell'analisi matematica. Riteniamo che proprio

per questo motivo i ragazzi abbiano privilegiato, nella scelta, il problema numero uno. Si potrebbe pensare che gli estensori della prova abbiano voluto correlare fra loro geometria, analisi, trigonometria; condividiamo l'idea, ma la realizzazione non ci sembra riuscita. Il ricorso alla trigonometria ed alla geometria solida resta un momento a sé stante privo di significativi collegamenti con la prima parte. Sarebbe stato preferibile continuare la prassi degli ultimi anni che ha visto la geometria dello spazio situata in un contesto problematico atto maggiormente a valutare le capacità di analisi e sintesi di un candidato che si accinge a ottenere il diploma di liceo scientifico. A sostegno di ciò s'invita il lettore a prendere visione della prova suppletiva 2002 (*All. 1*), che riteniamo di gran lunga più adeguata e completa per valutare il grado di preparazione dei candidati. In essa si possono ritrovare indicazioni più precise

lunghezza assegnata, e che $BC = 2AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio ABCD.

c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABCD della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

Questionario

1. Si consideri la seguente equazione in x, y :

$$2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0,$$

dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

A - è una circonferenza per ogni valore di k ;

B - è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$;

C - è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$;

D - non è una circonferenza qualunque sia k .

Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

2. Considera la funzione di variabile reale:

$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, dire se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente ad 1 e giustificare la risposta.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm \infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ ed $f(1) = -2$. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

4. Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \sin 2x & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1+a}{\sin x} & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x = 0$.

5. Un titolo di borsa ha perso ieri l' $x\%$ del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l' $y\%$, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x .

6. Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è sufficiente per concludere che $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

7. Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+4}$ è:

A) $\ln \frac{x}{x+2}$; B) $\ln \frac{x+2}{x}$; C) $\ln \sqrt{x^2+2x}$; D) $\ln \sqrt{2x^2+x}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

8. S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari.

La successione di termine generale a_n tale che $a_n = \frac{S_n}{2n^2}$, è: A) costante; B) crescente; C) decrescente.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

9. Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

10. Di due rette a, b - assegnate nello spazio ordinario - si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta p .

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?

b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?

c) Le rette a, b sono comunque parallele?

d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

Griglia per la correzione della prova di Matematica

Problema n. 1

Punto	Pun- teggio	Descrittori	
a	1	• Imposta le disequazioni e le risolve corret- tamente	1
		• Imposta le disequazioni e commette qual- che errore	0,5
		• Non imposta le disequazioni	0
b	2	• Determina l'equazione della parabola	2
		• Individua le condizioni, ma commette qualche errore nel calcolo dei coefficienti	1,5
		• Individua parzialmente le condizioni	1
		• Individua solo una condizione	0,5
		• Non individua alcuna condizione	0
c	1	• Trova le intersezioni	1
		• Trova la retta tangente	0,5
		• Non trova la retta tangente	0
d	2	• Individua il numero delle soluzioni	2
		• Individua l'equazione e trova una soluzione	1,5
		• Imposta l'equazione ma non trova il nu- mero di soluzioni	0,5
		• Non risolve il quesito	0
e	1,5	• Enuncia il teorema correttamente e lo ap- plica all'esercizio	1,5
		• Enuncia il teorema con qualche impreci- sione e lo applica all'esercizio; oppure enuncia il teorema correttamente e non lo applica correttamente all'esercizio	1
		• Enuncia il teorema con qualche impreci- sione e non lo applica	0,5
		• Non risponde al quesito	0
Totale	7,5		

Problema n. 2

Punto	Pun- teggio	Descrittori	
a	1,5	• Individua le disequazioni e le risolve cor- rettamente	1,5
		• Individua o risolve parzialmente le dise- quazioni	1
		• Non individua le disequazioni	0
b	2	• Trova l'espressione dell'area, trova il valo- re estremante e verifica il risultato	2
		• Trova l'espressione dell'area, calcola la de- rivata, ma determina il valore estremante con qualche errore	1
		• Non trova l'espressione dell'area	0
c	2,5	• Determina il genere del triangolo e li/lo costruisce spiegando in modo esauriente	2,5
		• Determina il genere del triangolo e lo/li costruisce spiegando parzialmente	2
		• Determina il triangolo ma non lo costruisce	1
		• Non svolge questa parte	0
d	1,5	• Costruisce la figura e determina l'angolo richiesto	1,5
		• Costruisce la figura ma non individua l'angolo	0,5
		• Non risponde al quesito	0
Totale	7,5		

Quesiti

Descrittori	Punteg- gio
Risponde in modo corretto giustificando la risposta	1,5
Risponde con qualche incertezza	1
Risponde senza dare giustificazioni	0,5
Non risponde	0

« La prova scritta all'esame di matematica, in genere, indirizza l'attività didattica ».

sul livello di approfondimento dei contenuti della geometria dello spazio e questioni più complete di analisi matematica. Se è vero che i programmi di Matematica del Liceo di ordinamento sono invariati da troppi anni, è altrettanto vero che solo attraverso le prove inviate dal Ministero è stato possibile indurre innovazioni nell'insegnamento, senza specifiche direttive ministeriali. Sarebbe stato quindi auspicabile proporre una siffatta traccia nella sessione ordinaria.

Riteniamo un momento molto valido e significativo quello del questionario, poiché oltre a permettere agli allievi di cimentarsi su quegli argomenti in cui si sentono più preparati, propone collegamenti tra le questioni teoriche e quelle applicative, consentendo alla Commissione d'esame di saggiare le capacità dello studente in vari settori. I quesiti, pur di buon livello, potrebbero essere resi più significativi con richieste la cui soluzione si possa raggiungere, oltre che con procedure e tecniche standard, anche con l'utilizzo di processi euristici e strategie alternative, e magari originali.

Per quanto riguarda la valutazione, riteniamo che i due problemi e i quesiti del questionario debbano avere lo stesso peso. Non si devono «valutare» le scelte fatte dallo studente ma la precisione e le strategie risolutive adottate sia nel problema, sia nei quesiti, in coerenza con lo spirito della nuova formulazione della prova di Matematica, che deve dare ad ogni allievo la possibilità di cimentarsi in quegli argomenti che conosce meglio.

Resta aperto il problema di una valutazione più omogenea a livello nazionale. Perché non suggerire direttamente nella traccia ministeriale, per ogni quesito proposto, una griglia di valutazione e stabilire così la soglia di accettabilità dell'elaborato? Di fatto, ciò avviene in alcuni paesi stranieri (Spagna, Gran Bretagna). Sulla base di questa convinzione abbiamo pensato di elaborare una griglia adatta alla valutazione del tema di quest'anno (All. 2).

Profondamente convinti della valenza formativa dell'Esame di Stato, auspichiamo che le prove d'indirizzo nei vari Istituti d'Istruzione Secondaria Superiore continuino ad essere formulate a livello centrale, al fine di garantire un'omogeneità di contenuti della preparazione di base.

Monica Bianchini, Alessandro Gherardini
Nucleo Ricerche Didattiche, Università di Firenze

Scientifico-Tecnologico

Progetto «Proteo»

Alfredo Marzocchi

esami conclusivi

Problema 1

Ci riferiamo alla *figura 1*. Osserviamo che, essendo il rapporto tra l'altezza e la base pari a $\sqrt{3}$, il triangolo ABC è metà di un triangolo equilatero avente vertici A e B . Ne segue che $\overline{AH} = a\sqrt{3}/2$, che $\overline{CH} = 3a/2$ e che $\overline{AB} = 2a\sqrt{3}$.

a) Abbiamo intanto $\overline{AP} + \overline{BP} = 2a\sqrt{3}$, per cui resta da calcolare $\overline{PC}$, che risulta pari a $3a/(2 \cos z)$. Quindi la somma delle distanze date in funzione di z è

$$2a\sqrt{3} + \frac{3a}{2 \cos z}$$

dove $z \in [-\pi/6, \pi/3]$.

b) Siccome $\overline{AP} + \overline{BP}$ è indipendente da z , la somma sarà minima se è minima $\overline{CP}$, il che accade se $P \equiv H$, ossia se $z = 0$. Supponiamo per il momento che la domanda sottintenda che PBC sia isoscele sulla base BC . Successivamente esamineremo l'altra possibilità.

c1) Osserviamo allora che perché il triangolo PBC sia isoscele sulla base BC , P deve equidistare da B e C e quindi P deve trovarsi nel punto medio di AB , da cui $\overline{DC} = a\sqrt{3}$.

d1) Si può porre l'origine in D e scegliere AB come asse delle ascisse. Poiché $\overline{DC} = a\sqrt{3}$, l'equazione della circonferenza richiesta sarà

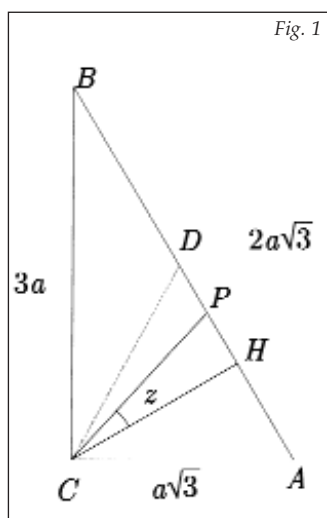
$$x^2 + y^2 = 3a^2.$$

Poiché infine D si trova nel punto medio del segmento AB , la circonferenza di centro D e passante per C passerà anche per A e B .

e1) Siccome l'angolo $\widehat{CDB}$ è ampio $2\pi/3$, l'area del settore circolare corrispondente sarà un terzo di quella dell'intero cerchio, cioè πa^2 . Il triangolo BCD ha invece area metà dell'area del triangolo ABC , ossia $3a^2\sqrt{3}/4$, e quindi i due segmenti circolari divisi da BC hanno area

$$\pi a^2 - 3a^2\sqrt{3}/4 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{e} \quad \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4} a^2.$$

f1) Il solido consiste di una sfera di raggio $a\sqrt{3}$ alla quale sono stati tolti un cono di vertice B passante per la circonferenza generata dalla rotazione di C e un segmento sferico di centro D e passante per la suddetta circonferenza (*fig. 2*).



LA TRACCIA MINISTERIALE

Tema di Matematica e Informatica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

È dato il triangolo ABC , rettangolo in C , tale che AC e BC sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa AB e z la misura, in radianti, dell'angolo $\widehat{HCP}$.

- Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.
- Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.
- Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di DC .
- Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano (Oxy) , trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C , e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k .
- Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k .
- Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB .

Problema 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , sono assegnate le curve di equazione:

$$y = kx^3 - (2 - k)x^2 - (3 - 2k)x + 2,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

- Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.
- Indicata con γ quella, fra tali curve, che si ottiene per $k = 1$, dimostrare che γ ha un centro di simmetria.
- Dimostrare che la curva γ interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_A .
- Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}.$$

- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ , dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario

- Due circonferenze, k e k' , sono tangenti esternamente nel punto T . Due rette distinte, a e b , condotte per T , secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A', B' . Stabilire se le rette AB e $A'B'$ sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

3. In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0,$$

dove k è un parametro reale.

Determinare, se esistono, i valori di k per cui il luogo è costituito da:

A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto.

4. Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.

5. Si considerino i numeri: $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$. Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

6. Calcolare la derivata, rispetto ad x , della seguente funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+2} e^{-t} dt,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

7. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \dots + (2 \cdot 2^{n-1}) + (2 \cdot 2^n),$$

calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^{2n}}$.

8. I numeri reali a, b sono tali che:

$$4.3 < a < 5.2 \quad e \quad -1.7 < b < -1.5.$$

Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8 < a - b < 6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la parabola e la retta di equazioni rispettivamente: $x = y^2$ e $x = 1$. La regione finita R di piano delimitata dalla parabola e dalla retta è trasformata nella regione R' dall'affinità di equazioni:

$$x = 2X - Y + 1, \quad y = -3X + 2Y - 1.$$

L'area di R' è:

A) $\frac{4}{3}$; B) 4; C) $\frac{28}{3}$; D) un valore diverso dai precedenti.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione.

10. Da un mazzo di carte da gioco «napoletane» (formato da 40 carte distribuite in 4 semi: «coppe», «spade», «bastoni», «denari») se ne estraggono due a caso. Calcolare la probabilità che fra esse vi sia almeno un «RE».

Per calcolare il volume sottraiamo dal volume generato dalla rotazione dell'arco BC quello generato dalla rotazione del segmento BC , attorno all'asse AB . Grazie alla scelta degli assi precedentemente fatta, sarà possibile effettuare il calcolo analiticamente.

Riferendoci agli assi intro-

dotti sopra (fig. 3), osserviamo che $B(a\sqrt{3}, 0)$ e $C(-a\sqrt{3}/2, 3a/2)$, per cui la retta BC ha equazione

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{3} (x - a\sqrt{3}).$$

Pertanto il volume richiesto è

$$V = \pi \int_{-a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} (3a^2 - x^2) dx - \pi \int_{-a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} \frac{1}{3} (x - a\sqrt{3})^2 dx = \frac{27}{8} (\sqrt{3} - 1) \pi a^3.$$

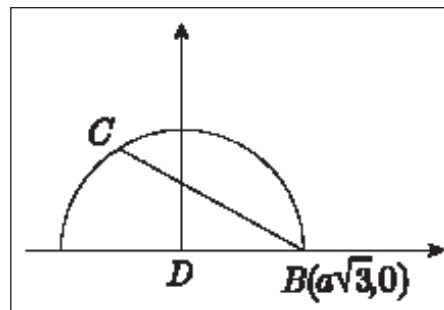


Fig. 3

Esaminiamo ora l'altra possibilità, ossia che PBC sia isoscelele sulla base PC , riferendoci alla fig. 4.

c2) Poiché $\overline{BC} = \overline{BD} = 3a$ e $\widehat{CBD} = \pi/6$, abbiamo dal teorema di Carnot che

$$\overline{DC} = \sqrt{18a^2(1 - \cos \pi/6)} = \frac{3}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) a \approx 1.55a.$$

d2) Poniamo come prima l'origine in D e l'asse x passante per A e B . La circonferenza ha quindi equazione

$$x^2 + y^2 = \overline{DC}^2 = 9(2 - \sqrt{3}) a^2.$$

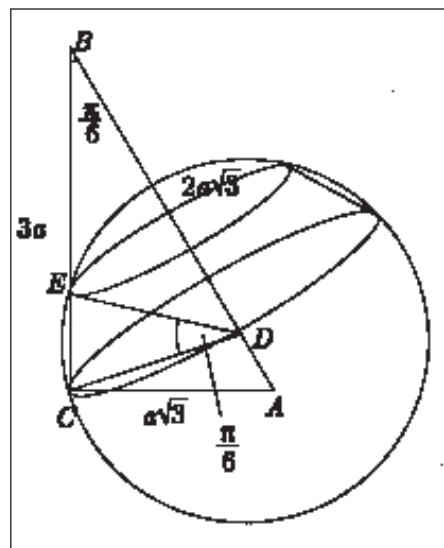


Fig. 4

Osserviamo poi che, poiché $\overline{BD} = 3a > \overline{DC}$, B è esterno alla suddetta circonferenza, mentre A , che dista da D

$$\overline{AD} = (2\sqrt{3} - 3)a \approx 0.46a$$

è più vicino a D di C , e dunque risulta interno alla circonferenza.

e2) Sia E il punto di intersezione della suddetta circonferenza, diverso da C , con la retta contenente BC , che delimita i due segmenti circolari dei quali si richiede l'area. Dovendo poi per differenza nel triangolo BCD essere $\widehat{DCE} = \widehat{CED} = 5\pi/12$, si trova $\widehat{CDE} = \pi/6$. Da qui troviamo che l'area del settore circolare CDE è

$$\text{area}(CDE) = \frac{1}{12} \pi \overline{DC}^2$$

mentre l'area del triangolo CDE è

$$\frac{1}{2} \overline{DC}^2 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \overline{DC}^2.$$

Per differenza si trova allora che la prima area è

$$\frac{1}{12} \pi \overline{DC}^2 - \frac{1}{4} \overline{DC}^2,$$

e che l'altra area è pari a

$$\frac{11}{12} \pi \overline{DC}^2 + \frac{1}{4} \overline{DC}^2.$$

Sostituendo l'espressione di DC troviamo

$$9 \left(\frac{1}{12} \pi - \frac{1}{4} \right) (2 - \sqrt{3})a^2 \quad \text{e} \quad 9 \left(\frac{11}{12} \pi + \frac{1}{4} \right) (2 - \sqrt{3})a^2.$$

f2) Poiché stavolta (v. fig. 5) il punto B ha coordinate $(3a, 0)$ e stesso coefficiente angolare che nel caso e1), la retta BC ha equazione

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3} (x - 3a).$$

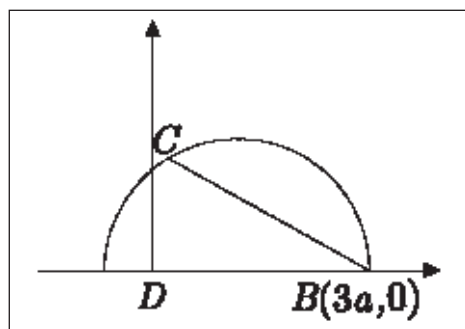


Fig. 5

Intersecando la circonferenza di centro D sopra trovata con questa retta troviamo le coordinate di C e dell'ulteriore punto E di intersezione di BC con la circonferenza. Abbiamo perciò l'equazione

$$x^2 + \frac{1}{3} (x - 3a)^2 = 9 (2 - \sqrt{3})a^2$$

che risolta dà

$$x_1 = x_C = \frac{3}{2} (2 - \sqrt{3})a, \quad x_2 = x_E = \frac{3}{2} (\sqrt{3} - 1)a.$$

Pertanto stavolta, considerato che il quadrato del raggio della circonferenza è pari a $9(2 - \sqrt{3})a^2$, il volume richiesto sarà

$$V = \pi \int_{3(2-\sqrt{3})a/2}^{3(\sqrt{3}-1)a/2} (9(2-\sqrt{3})a^2 - x^2) dx - \pi \int_{3(2-\sqrt{3})a/2}^{3(\sqrt{3}-1)a/2} \frac{1}{3} (x - 3a)^2 dx = \frac{9\sqrt{3}}{4} (26 - 15\sqrt{3}) \pi a^3.$$

Problema 2

a) Riscrivendo la famiglia di curve nella forma

$$k(x^3 + x^2 + 2x) - 2x^2 - 3x + 2 - y = 0$$

ci accorgiamo che l'equazione è soddisfatta per ogni valore di k nei punti in cui

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 + y = 0. \end{cases}$$

La prima delle due equazioni diviene

$$x(x^2 + x + 2) = 0$$

che ammette la sola soluzione reale $x = 0$. Sostituendo nella seconda espressione si trova il punto $(0, 2)$.

b) Per $k = 1$ si trova la curva di equazione

$$y = x^3 - x^2 - x + 2$$

che è una cubica.

Per dimostrare che questa curva ammette un centro di simmetria, possiamo ragionare così: scritta la generica simmetria di centro (a, b)

$$\begin{cases} X = 2a - x \\ Y = 2b - y \end{cases}$$

troviamo, ricavando e sostituendo, l'espressione

$$2b - Y = (2a - X)^3 - (2a - X)^2 - (2a - X) + 2$$

che, sviluppata, fornisce

$$Y = X^3 + (1 - 6a)X^2 + (12a^2 - 4a - 1)X - 8a^3 + 4a^2 + 2a + 2b - 2.$$

Ora, se la curva data è simmetrica rispetto a un centro (a, b) , allora la sua equazione trasformata deve coincidere, per quei valori di a e b , con l'equazione di partenza, scritta nelle nuove coordinate. Pertanto deve essere

$$\begin{cases} 1 - 6a = -1 \\ 12a^2 - 4a - 1 = -1 \\ -8a^3 + 4a^2 + 2a + 2b - 2 = 2. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si trova $a = 1/3$, che è consistente con la seconda, in quanto essa ammette le soluzioni $a = 0, a = 1/3$. Sostituendo infine $a = 1/3$ nella terza si trova $b = 43/27$. Se ne conclude che la curva ammette il punto $(1/3, 43/27)$ come centro di simmetria.

(Incidentalmente, tutte le cubiche della forma $y = f(x)$ sono simmetriche rispetto al loro punto di flesso, che è unico).

c) Posto $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

per cui, essendo la curva continua, abbiamo che il suo grafico interseca l'asse x in almeno un punto. Per mostrare che è unico, calcoliamo

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

e osserviamo che la derivata si annulla per $x = -1/3, x = 1$. Essa poi è positiva per $x < -1/3$, negativa per $-1/3 < x < 1$ e positiva per $x > 1$. Dunque la curva ammette per $x = 1$ un punto di minimo relativo. L'ordinata di tale minimo è 1, che è posi-

tivo, per cui la curva deve intersecare l'asse x in un punto di ascissa inferiore a 1, e non può più ulteriormente intersecarla.

d) Usiamo il metodo di bisezione. Poiché $f(0) = 2$, abbiamo che x_A deve essere negativo. Osserviamo che $f(-1) = -1$ e $f(-2) = -8 < 0$. Dunque $-2 < x_A < -1$. Poi $f(-1.5) = -17/8$, per cui $-1.5 < x_A < -1$. Prendiamo allora nuovamente il punto medio dell'intervallo trovato, che è $-5/4 = -1.25$. Poiché viene richiesto un intervallo esatto alla seconda cifra significativa, conviene prendere l'approssimazione -1.3 . Se calcoliamo $f(-1.3)$ troviamo $-0.587 < 0$. Dunque $-1.3 < x_A < -1$. Calcoliamo poi il punto medio di questo intervallo e troviamo -1.15 , che approssimiamo di nuovo con -1.2 . Inserendo questo risultato nell'espressione di $f(x)$ risulta $4/125$, che è positivo. Dunque $-1.3 < x_A < -1.2$ e questo implica che $z = -13$. (La soluzione con 5 cifre decimali esatte è $x_A = -1.2056$).

e) Abbiamo che l'area è data da

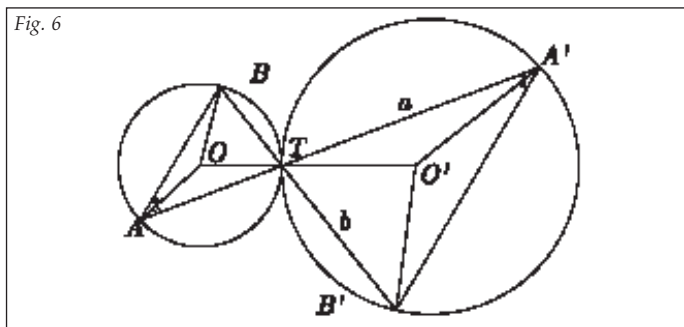
$$\text{Area} = \int_0^1 (x^3 - x^2 - x + 2) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_0^1 = \frac{17}{12}.$$

Questionario

Questione 1

Le rette sono parallele. Per rendersi conto di questo congiungiamo i centri O e O' delle circonferenze con i punti A , B , A' , B' e otteniamo sei triangoli isosceli (OBT , $O'B'T$, ecc. come indicati nella fig. 6).

Fig. 6



Dunque sono congruenti gli angoli $\widehat{OBT}$ e $\widehat{O'TB}$, $\widehat{OAT}$ e $\widehat{O'TA}$, $\widehat{OBA}$ e $\widehat{O'AB}$. Per l'opposizione al vertice avremo

$$\widehat{O'AT} = \widehat{O'TA} = \widehat{O'TA}$$

e similmente per $\widehat{O'B'T}$, $\widehat{O'B'T}$, $\widehat{O'TB}$. Ne concludiamo per differenza sui triangoli ABT e $A'B'T$ che

$$\widehat{OBA} + \widehat{OAB} = \widehat{O'B'A} + \widehat{O'A'B'}$$

ed essendo $\widehat{OBA} = \widehat{O'AB}$, $\widehat{O'B'A} = \widehat{O'A'B'}$ troviamo

$$\widehat{OAB} = \widehat{O'A'B'}.$$

Ne segue per somma di angoli uguali che $\widehat{ABT} = \widehat{A'B'T}$, e dunque le rette contenenti AB e $A'B'$ sono parallele.

Questione 2

La risposta è sì. Infatti la piramide recisa e quella originaria sono simili, e il rapporto fra le loro altezze è $2/3$, in quanto

l'altezza del tronco di piramide deve essere $1/3$ dell'altezza della piramide originaria. Quindi il rapporto dei volumi delle due dette piramidi è $8/27$. Ne segue che il tronco di piramide ha volume $19/27$ di quello della piramide originaria, e quindi il rapporto fra i volumi della piramide recisa e quello del tronco di piramide è $8/19$.

Questione 3

Il luogo assegnato è un fascio di circonferenze di raggio $\sqrt{k^2 - 13/36}$. Pertanto se $k = \pm \sqrt{13}/6$ la circonferenza si riduce al solo punto $(k, -1/6)$, se $k < -\sqrt{13}/6$ oppure se $k > \sqrt{13}/6$ la circonferenza è costituita da infiniti punti (reali), mentre se $-\sqrt{13}/6 < k < \sqrt{13}/6$ la circonferenza non possiede punti reali in quanto il luogo assume la forma

$$(x - k)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = k^2 - \frac{13}{36} < 0$$

che è algebricamente impossibile nel campo reale. Non essendoci altri casi possibili per k , ne concludiamo che in nessun caso la circonferenza si riduce a due punti.

Questione 4

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{5}$ sia razionale, ossia che esistono due interi m, n primi tra loro tali che

$$5 = \frac{m}{n}$$

ossia

$$m^2 = 5n^2.$$

Per il teorema fondamentale dell'Aritmetica, m e n ammettono una unica decomposizione in fattori primi. Osserviamo che ogni quadrato perfetto deve possedere un numero *pari* di fattori primi. Sia k il numero di fattori pari a 5 nella decomposizione di n . Per quanto detto, n^2 deve avere un numero di fattori 5 pari a $2k$, e quindi $5n^2$ avrà $2k + 1$ fattori 5. E questo è assurdo perché in questo modo m^2 , che è un quadrato, avrebbe un numero dispari di fattori primi.

Questione 5

Osserviamo dapprima che per ogni $c \in \mathbb{R}$

$$1 \leq a < b \iff 1 \leq a^c < b^c.$$

Osserviamo anche che i tre numeri sono tutti superiori a 1, in quanto potenze di 2. Elevando $2^{1/2}$ e $3^{1/3}$ alla sesta potenza (il m.c.m. dei denominatori degli esponenti) troviamo 8 e 9. Quindi $2^{1/2} < 3^{1/3}$. Poi, elevando $2^{1/2}$ e $5^{1/5}$ alla decima troviamo 32 e 25, per cui $2^{1/2} > 5^{1/5}$. Pertanto l'ordine giusto è

$$5^{1/5} < 2^{1/2} < 3^{1/3}.$$

Questione 6

Poiché, integrando, $f(x) = e^{-x} - e^{-(x-2)}$, abbiamo

$$f'(x) = e^{-(x-2)} - e^{-x}.$$

Questione 7

Innanzitutto ricordiamo che vale l'identità

$$1 + q + \dots + q^k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Osserviamo poi che a_n non è altro che la somma delle prime $n + 1$ potenze di due, per cui ponendo $q = 2$ e $k = n + 1$ nella precedente espressione troviamo

$$a_n = 2^{n+2} - 1$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2-n} - 2^{-2n}) = 0.$$

Questione 8

La deduzione è corretta. Infatti dai dati segue che

$$1.5 < -b < 1.7$$

e quindi

$$a - b = a + (-b) < 5.2 + 1.7 = 6.9$$

dopodiché similmente

$$a - b = a + (-b) > 4.3 + 1.5 = 5.8.$$

In alternativa, ci si può riferire a un sistema di assi coordinati a, b nel quale gli intervalli dati sono delle strisce parallele agli assi e danno per i numeri a, b una regione rettangolare di variabilità. Tracciando le rette di equazione $a - b = C$ che contengono «al minimo» tale rettangolo si ottiene per C l'intervallo di variabilità $[5.8, 6.9]$.

Questione 9

L'area della regione R è data semplicemente da

$$2 \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{4}{3}.$$

A questo punto, sapendo che l'area di una regione regolare A , soggetta ad un'affinità di equazioni

$$\begin{cases} x = aX + bY + c \\ y = a'X + b'Y + c' \end{cases}$$

si trasforma secondo la legge

$$\text{area}(A') = (ab' - a'b) \text{area}(A)$$

si trova

$$\text{area}(R') = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Questione 10

Supponiamo che le carte vengano estratte senza reimmissione, come è plausibile. Innanzitutto il numero totale di combinazioni delle 40 carte a 2 a 2 è

$$\binom{40}{2} = 780.$$

Per calcolare il numero di casi favorevoli conviene prima calcolare quelli relativi ad avere «esattamente un RE» e «esattamente due RE». Il secondo è facile, perché 4 RE si possono combinare a 2 a 2 in 6 modi. Per quanto riguarda il primo, invece, ragioniamo così: per ognuno dei 4 modi di avere un RE in una delle due carte vi sono 36 modi di piazzare l'altra carta (che non deve essere un RE perché ne vogliamo avere uno solo a questo punto). Dunque in definitiva i casi favorevoli sono $36 \cdot 4 + 6 = 150$. Ne concludiamo che la probabilità di avere almeno un RE è $15/78 = 5/26$.

Commento alla prova

La parte relativa ai problemi non presentava particolari difficoltà concettuali e ciascun problema poteva essere risolto in vari modi. Purtroppo, probabilmente per una involontaria svista dell'estensore, il problema 1 poteva essere interpretato in due maniere diverse, entrambe possibili, delle quali una comportava calcoli molto laboriosi. Il secondo proble-

ma, accanto a domande abbastanza semplici e naturali, chiedeva un'approssimazione di tipo numerico di una equazione di terzo grado con un preciso errore massimo. Ciò era risolubile con varie tecniche, che però sarebbero risultate un po' pesanti a chi non fosse provvisto di calcolatrice tascabile o non fosse abituato a usarla. Infine, non era esplicitamente richiesto lo studio di una funzione, aspetto questo positivo perché introduce un elemento di novità nella prova.

Il questionario, invece, conteneva alcune domande stimolanti e si presentava assai bilanciato nella scelta dei temi. Tra i vari quesiti segnaliamo il quesito 1, che era puramente di incidenza, e ciò permetteva anche agli insegnanti di valutare meglio quegli studenti che non avessero fatto uso di concetti metrici (quali la similitudine) per risolverlo; il quesito 5, che richiedeva conoscenze molto elementari ma da usare in maniera un po' astuta; il quesito 7, che richiedeva conoscenze sulle successioni, e il quesito 8, interessante per le sue applicazioni alle approssimazioni e alla teoria degli errori, e per la semplicità con il quale è posto.

Una considerazione a parte merita il quesito 9, che richiedeva di sapere come si trasformano le aree di una figura curvilinea sotto l'effetto di una affinità. Ciò poteva risultare insormontabile a chi non sapesse già il risultato o non lo intuísse dal caso di regioni poligonali semplici. Infatti la dimostrazione rigorosa di questo fatto può essere data nell'ambito del calcolo integrale di più variabili. Naturalmente era possibile trasformare l'intera figura mediante l'affinità data e calcolarne l'area, ma questo avrebbe ruotato la parabola che definiva una parte del bordo e complicato enormemente i calcoli.

Consigli e orientamenti

La varietà di temi presenti nel questionario di questa prova suggerisce senz'altro di non trascurare nella preparazione degli allievi argomenti considerati a volte marginali, quali le successioni e l'uso corretto delle disuguaglianze, perché queste possono con poca fatica aiutare lo studente ad aggiungere un quesito corretto alla prova.

Da segnalare, poi, un aspetto interessante, suggerito dai quesiti 2 e 10, relativo alla sovrabbondanza di dati. Nel quesito 2, anziché chiedere di determinare il rapporto fra i volumi, si è preferito chiedere se i dati erano sufficienti per calcolarlo, mentre nel quesito 10 si sono illustrati i semi delle carte napoletane senza che questi (oltre al fatto che erano 4) servissero per calcolare il risultato, al quale non si poteva invece pervenire senza specificare che l'estrazione delle carte doveva essere senza reimmissione. Ciò suggerisce di preparare durante l'anno anche esercizi nei quali i dati sono sovrabbondanti (ma coerenti!) o insufficienti, e chiedere di studiare anche il problema in tal senso.

Alfredo Marzocchi - Università agli studi, Brescia

Piano Nazionale di Informatica

Nerina Rumi

Problema 1

Di due numeri x e y si sa che:

$$x + y = a$$

$$\frac{x}{y} = a \text{ con } a \neq 0.$$

1. In un piano cartesiano xOy il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = a \end{cases}$$

descrive geometricamente al variare del parametro a ($a \neq 0$)

l'intersezione tra una retta r del fascio improprio: $y = -x + a$

e una retta s del fascio proprio $y = \frac{1}{a}x$ (v. Fig. 1).

Il sistema ammette una sola soluzione per ogni valore di $a \neq -1$,

che vale $\left(-\frac{a^2}{1+a}; -\frac{a}{1+a}\right)$.

È impossibile per $a = -1$, perché in questo caso le due rette r : $y = -x - 1$ e s : $y = -x$ sono tra loro parallele.

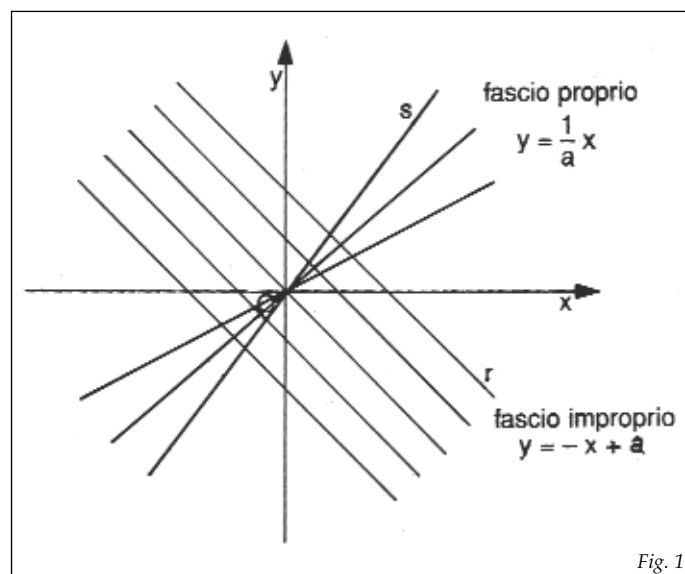


Fig. 1

Corso sperimentale P.N.I. Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale a non nullo.

Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y) :

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a ;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x,y)$ che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

Problema 2

I raggi $OA = OB = 1$ metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

- 1) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C' ;
- 2) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C' ;
- 3) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C , specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

2. Per determinare l'equazione cartesiana del luogo γ si deve

eliminare il parametro a da $\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = a \end{cases}$ si ottiene: $x + y = \frac{x}{y}$

da cui: $y^2 + xy - x = 0$ (con $y \neq 0$).

3. Per rappresentare la curva γ sul piano cartesiano (si tratta di una conica perché la sua equazione è di secondo grado) è necessario scriverla in forma esplicita. Anziché scrivere l'equazione nella forma $y = f(x)$ è opportuno ricavare x in funzione di y ottenendo:

$$\gamma: x = \frac{y^2}{1 - y}.$$

Quindi la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice $y = x$ ha equazione:

$$\gamma': y = \frac{x^2}{1 - x}.$$

Risulta allora preferibile rappresentare per primo il grafico di γ' e successivamente, per simmetria, il grafico di γ . Lo studio di tale funzione non presenta difficoltà. Si tratta di un'iperbole con asintoto verticale $x = 1$ e asintoto obliquo

Questionario

1. Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n ?

2. Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré (1610-1685), amico di Blaise Pascal: «giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?».

3. Assumendo che i risultati $-X, 1, 2$ - delle 13 partite del totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

4. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n!}$$

5. Cosa si intende per «funzione periodica»? Quale è il periodo di $f(x) = -\sin \frac{\pi x}{3}$? Quale quello di $\sin 2x$?

6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ ($p, q \in \mathbb{R}$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

7. Data la funzione

$$f(x) = e^x - \sin x - 3x$$

calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

8. Verificare che la funzione $3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

9. Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x \cos \pi x$.

10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

$y = -x - 1$. Il centro di simmetria dell'iperbole è il punto $C(1, -2)$ di intersezione tra i due asintoti. Presenta un minimo in $(0,0)$ e un massimo in $(2, -4)$. Per simmetria rispetto a $y = x$ si ottiene quindi il grafico di γ (v. Fig. 2).

4. La regione di piano delimitata da γ e γ' è simmetrica rispetto a $y = x$. L'area A di tale regione è quindi il doppio dell'area tra $y = x$ e γ' . Si determinano gli estremi di integrazione risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{x^2}{1-x} \end{cases} \text{ottenendo } x = 0, x = 1/2.$$

Perciò:
$$A = 2 \int_0^{1/2} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx = 2 \int_0^{1/2} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = 2 \left[x^2 + x + \ln |x-1| \right]_0^{1/2} = \frac{3}{2} + 2 \ln \frac{1}{2} \approx 0,1137.$$

Si può ottenere un valore approssimato di tale area applicando un metodo di integrazione numerica, ad esempio il metodo di quadratura dei rettangoli, o il metodo di Cavalieri-Simpson.

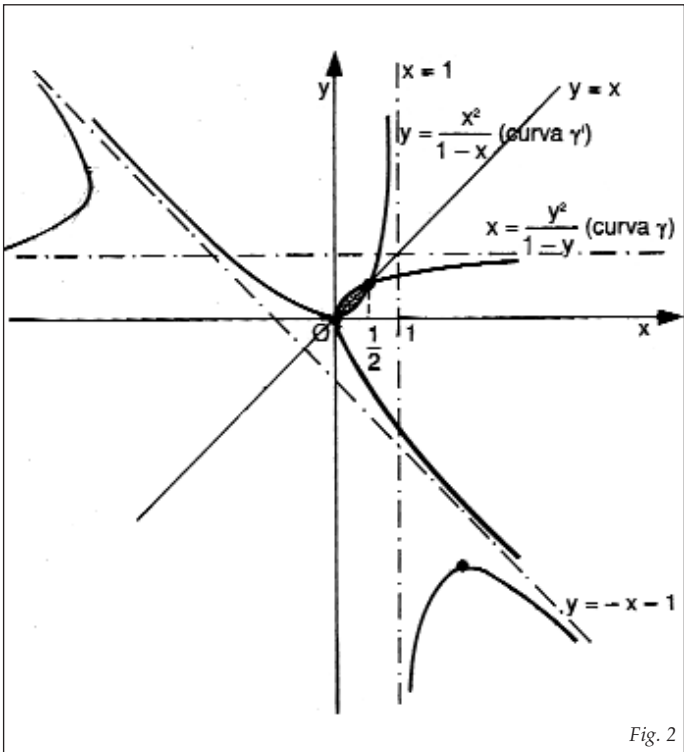


Fig. 2

Le formule da utilizzare sono:

• Formula dei rettangoli:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

• Formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \frac{b-a}{n} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots) + 4(y_1 + y_3 + \dots)].$$

Per il calcolo approssimato di $\int_0^{1/2} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$ divido l'intervallo $[a,b] = [0,1/2]$ in $n = 10$ parti uguali e costruisco la tabella dei valori della funzione integranda:

x	$y = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$
$x_1 = 0,05$	$y_1 = 0,0474$
$x_2 = 0,10$	$y_2 = 0,0889$
$x_3 = 0,15$	$y_3 = 0,1235$
$x_4 = 0,20$	$y_4 = 0,1500$
$x_5 = 0,25$	$y_5 = 0,1667$
$x_6 = 0,30$	$y_6 = 0,1714$
$x_7 = 0,35$	$y_7 = 0,1615$
$x_8 = 0,40$	$y_8 = 0,1334$
$x_9 = 0,45$	$y_9 = 0,0818$
$x_{10} = 0,50$	$y_{10} = 0$

Applicando la formula dei rettangoli:

$$\int_0^{1/2} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx \approx \frac{0,5}{10} (1,4746) = 0,07373.$$

Da cui l'area A della regione finita di piano delimitata da γ e da γ' vale: $A = 2 \cdot (0,07373) = 0,1475$.

Il valore è approssimato per eccesso e solo la prima cifra decimale è esatta.

Applicando la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_0^{1/2} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx \approx \frac{0,05}{3} \cdot (3,411) = 0,05685 \text{ da cui l'area } A \text{ vale: } A = 2 \cdot (0,05685) = 0,1137, \text{ approssimazione corretta per le prime quattro cifre decimali.}$$

5. Nell'equazione implicita del luogo γ : $y^2 + xy - x = 0$ ponendo $x = 1$. Si ottiene: $y^2 + y - 1 = 0$ da cui $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La

soluzione positiva rappresenta il rapporto aureo: y è quindi la sezione aurea di x , quando $x = 1$.

Problema 2

I due settori circolari in cui i raggi $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ m tagliano il cerchio di centro O hanno ampiezza: α , $2\pi - \alpha$. Tali sono anche le misure lineari dei due corrispondenti archi, poiché il raggio è 1 metro (v. Fig. 3).

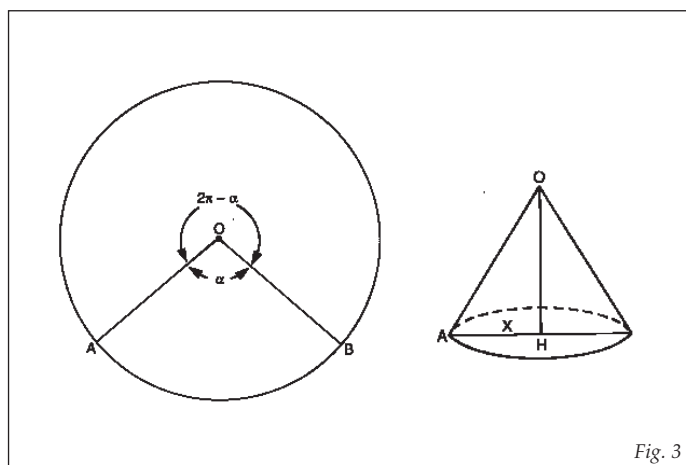


Fig. 3

1. Indico con x il raggio $\overline{AH}$ di base del cono C ottenuto dal settore circolare di ampiezza α , con $0 < x < 1$. L'altezza $\overline{OH}$ del cono è: $\overline{OH} = \sqrt{1 - x^2}$ e quindi il volume V del cono è:

$$V = y = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{1 - x^2} \text{ con dominio in } (0, 1).$$

Per il calcolo del massimo richiesto si calcola la derivata pri-

$$\text{ma di tale volume: } y' = \frac{1}{3} \pi \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$y' \geq 0 \text{ per } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il volume è massimo per $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e vale $V_{\text{MAX}} = \frac{\pi}{3} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,4031 \text{ m}^3$. Il valore dell'angolo α corrispondente al cono di volume massimo vale: $\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 5,1302 \text{ rad}$, mentre la

lunghezza dell'arco α è 5,1302 m. Poiché infine l'area del settore circolare è proporzionale all'arco che lo sottende, si ottiene: $\text{Area}_{(\text{settore})} : \text{Area}_{(\text{cerchio})} = \alpha : 2\pi$, da cui $\text{Area}_{(\text{settore})} = 2,5651 \text{ m}^2$ e il rapporto tra l'area del settore e l'area del cerchio vale $0,8165 = 81,65\%$.

Il secondo cono C' dipende da $\alpha' = 2\pi - \alpha$ come C dipende da α . Quindi, se $\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$, allora $\alpha' = 2\pi - 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ a cui corrisponde un valore del suo raggio di base pari a $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$. Il volume V' di C' vale: $V' = 0,0347 \text{ m}^3$.

2. $V = 0,4031 \text{ m}^3 = 403,1 \text{ l}$, $V' = 0,0347 \text{ m}^3 = 34,7 \text{ l}$ da cui la capacità totale dei due coni è 437,8 l.

3. L'angolo di apertura di un cono è l'angolo che le generatrici formano con l'asse di simmetria del cono. In riferimento alla figura 3, è l'angolo $\widehat{AOH}$. Da $\overline{AH} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e $\overline{AO} = 1$ si ottiene: $\sin \widehat{AOH} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AO}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, da cui

$$\widehat{AOH} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 0,9553 \text{ rad} \approx 54^\circ 44' \dots \text{ Un'approssima-$$

zione della misura in gradi sessagesimali di tale angolo di apertura si può ottenere attraverso un calcolo numerico della funzione $\arcsin(x)$. Questo è possibile sviluppando in serie di Taylor (con punto iniziale $x = 0$) la funzione. Si ottiene:

$$\arcsin(x) = \frac{180}{\pi} \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots \right) \text{ da cui}$$

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 46,7818 + 5,1979 + 1,5594 \approx 53^\circ 32'.$$

Questionario

1. Dati due numeri positivi a e b , calcolo:

$$\text{media aritmetica } M_A = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{media geometrica } M_G = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\text{si ha sempre: } M_A \geq M_G \rightarrow \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Infatti, elevando entrambi i membri al quadrato:

$$\left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \geq ab$$

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \text{ vero per } \forall a, b$$

in particolare: $M_A = M_G$ se $a = b$.

Generalizzando, le medie di n numeri assegnati valgono:

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}; \quad M_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

2. Evento A = «ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado».

Evento $\bar{A}$ = «non ottenere neanche una volta 1...».

La probabilità che l'evento A si verifichi è:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0,5178 = 51,78\%.$$

Evento B = «ottenere almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi».

Evento $\bar{B}$ = «non ottenere neanche un doppio 1...».

La probabilità che l'evento B si verifichi è:

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0,4914 = 49,14\%,$$

perciò l'evento A è più probabile dell'evento B.

3. Evento A = «tutte le 13 partite del totocalcio, eccetto una, terminano in parità».

La probabilità che una partita termini in parità è $\frac{1}{3}$; la probabilità che 12 partite terminino in parità è $\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$. Una sola delle 13 partite non termina in parità: la probabilità che il suo risultato sia 1 o 2 è perciò $\frac{2}{3}$, e poiché ciò può avvenire per una qualsiasi delle 13 partite, la probabilità che solo una non finisca in parità è: $13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$.

In conclusione la probabilità che l'evento A si verifichi è:

$$p(A) = 13 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cong 0,000016 = 0,0016\%.$$

4. Il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$ si calcola in modo intuitivo, costruendo i primi termini della successione di termine generale $a_n = \frac{3^n}{n!}$ e osservandone il comportamento.

n	$a_n = \frac{3^n}{n!}$
1	$a_1 = 3$
2	$a_2 = \frac{3^2}{2!} = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} a_1 = \frac{9}{2}$
3	$a_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{3}{3} \cdot \frac{3^2}{2!} = \frac{3}{3} \cdot a_2 = \frac{3}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$
4	$a_4 = \frac{3^4}{4!} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3^3}{3!} = \frac{3}{4} \cdot a_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{8}$
5	$a_5 = \frac{3^5}{5!} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3^4}{4!} = \frac{3}{5} \cdot a_4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{27}{8} = \frac{81}{40}$
6	$a_6 = \frac{3^6}{6!} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3^5}{5!} = \frac{3}{6} \cdot a_5 = \frac{3}{6} \cdot \frac{81}{40} = \frac{243}{240}$
.....	
n	$a_n = \frac{3}{n} \cdot a_{n-1} \Leftarrow$

Perciò: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \cdot a_{n-1} = 0$.

Più rigorosamente, poiché $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3}{n} < \frac{3}{4}$ per $n > 3$, per il criterio del rapporto la successione di termine generale $a_n = \frac{3^n}{n!}$ è maggiorata, a partire dal quarto termine, da una successione geometrica di ragione $\frac{3}{4}$. Quindi a_n converge a 0, come la successione geometrica che la maggia.

5. Una funzione $y = f(x)$ è periodica di periodo T se, per ogni x del dominio, si ha:

$$f(x + T) = f(x).$$

In particolare, la funzione $y = \sin(x)$ ha periodo 2π , e la funzione $y = \sin(\omega x)$ ha periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

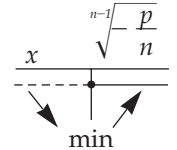
Perciò: la funzione $y = -\sin \frac{\pi x}{3}$ ha periodo $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$, mentre la funzione $y = \sin(2x)$ ha periodo $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

6. La funzione $y = x^n + px + q$ è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e la sua derivata prima è: $y' = n \cdot x^{n-1} + p$

– per n pari:

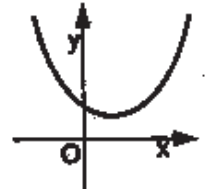
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^n + px + q) = +\infty$$

$$y' \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$$

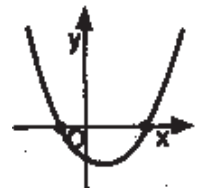


La funzione ha dunque un minimo in $\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}; f\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right)\right)$

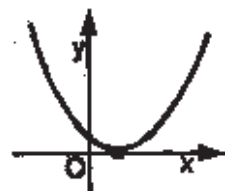
se: $f\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right) > 0 \rightarrow y = f(x)$ non ha nessuna radice reale;



se: $f\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right) < 0 \rightarrow y = f(x)$ ha due radici reali;



se: $f\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right) = 0 \rightarrow y = f(x)$ ha due radici reali e coincidenti.



Quindi, per n pari, $y = f(x)$ ha al più due radici reali.

– per n dispari:

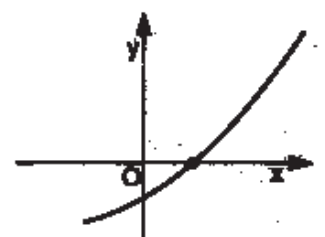
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^n + px + q) = \pm\infty$$

Il segno di y' dipende dal segno di p :

• per $p \geq 0$:

$$y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

la funzione è dunque sempre crescente ed ha una sola radice reale.



• per $p < 0$:

$$y' \geq 0 \quad \text{per} \quad x \leq -\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}} \vee x \geq \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$$



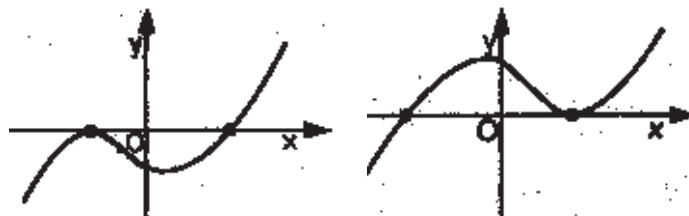
Se le ordinate del massimo e del minimo hanno segni concordi, $y = f(x)$ ha una sola radice reale.



Se le ordinate del massimo e del minimo hanno segni discordi, $y = f(x)$ ha tre radici reali.



Se l'ordinata del massimo o del minimo è nulla, $y = f(x)$ ha tre radici reali, di cui due coincidenti.



Quindi, per n dispari, $y = f(x)$ ha al più tre radici reali.

Nella risoluzione del quesito, non si è utilizzato il Teorema di Rolle, come esplicitamente richiesto. Ma come utilizzarlo?

7. I limiti di $f(x) = e^x - \sin x - 3x$ valgono:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \sin x - 3x) = +\infty$$

infatti, per $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$

$\sin x$ non ammette limite, perché oscilla tra i valori finiti -1 e $+1$

$$3x \rightarrow -\infty.$$

Analogamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \sin x - 3x) = +\infty.$$

Per provare che $y = f(x)$, continua in tutto $\mathbb{R}$, si annulla in α , con $0 < \alpha < 1$, si calcolano i valori che $f(x)$ assume per $x = 0$ e per $x = 1$:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = e - \sin 1 - 3 \approx -1,1232 < 0$$

$y = f(x)$ assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $[0;1]$: esiste quindi almeno un punto $x = \alpha$ in cui: $f(\alpha) = 0$.

8. Per verificare che la funzione $y = 3x + \ln x$ è strettamente crescente, si calcola il segno della sua derivata prima:

$$y' = 3 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{per} \quad \forall x > 0$$

quindi $y = 3x + \ln x$ è sempre strettamente crescente nel suo dominio.

Sia $x = f^{-1}(y) = g(y)$ la funzione inversa di $y = f(x)$.

Per determinare il valore x corrispondente a $y = 3$ si risolve l'equazione: $3 = 3x + \ln x$ utilizzando il metodo grafico:

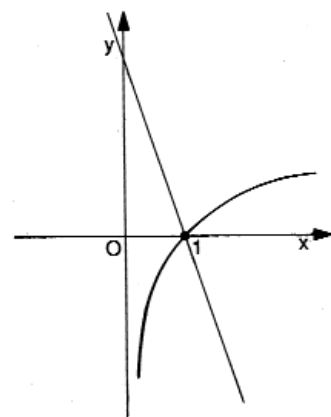
$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = -3x + 3 \end{cases}$$

e si ottiene $x = 1$.

Perciò: $g(3) = 1$.

Per calcolare $g'(3)$ si utilizza il teorema di derivazione delle funzioni inverse:

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \rightarrow g'(3) = \\ &= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



9. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione integrale $x \cdot \cos \pi x$ è derivabile e la sua derivata è $f'(x)$. Quindi:

$$f(x) = (x \cdot \cos \pi x)' = \cos \pi x - \pi x \cdot \sin \pi x$$

da cui:

$$f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \cdot \sin 4\pi = 1.$$

10. La similitudine è una trasformazione del piano in sé che mantiene costante il rapporto tra l'immagine $A'B'$ di un segmento AB e il segmento stesso:

$$\frac{A'B'}{AB} = k = \text{rapporto di similitudine.}$$

L'omotetia è una particolare similitudine nella quale i punti corrispondenti P e P' sono sempre allineati con un punto fisso C , detto centro di omotetia.

Se $P(x,y)$ e $P'(x',y')$ sono punti corrispondenti in una similitudine, le coordinate sono collegate tra loro dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax - cy + p \\ y' = cx + ay + q \end{cases} \quad \text{con } k = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Se $P(x,y)$ e $P'(x',y')$ sono punti corrispondenti in una omotetia di centro $O(0,0)$ le equazioni sono

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

Commento

I due problemi assegnati, sia per gli argomenti matematici coinvolti, che per il livello di difficoltà della risoluzione, sono tra loro assai diversi.

1. Il primo problema, riguardante l'analisi, risulta strettamente inerente al programma svolto nella classe quinta. La risoluzione grafica del sistema parametrico di primo grado genera incertezza per la sua eccessiva e inattesa semplicità. Una volta determinata l'equazione cartesiana in forma implicita del luogo γ : $y^2 + xy - x = 0$ risulta inopportuno espli-

citare la variabile y . Si otterrebbe infatti: $y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$

che rappresenta l'equazione di due funzioni irrazionali, dallo studio impegnativo. Diventa quindi assai utile ricavare $x = \frac{y^2}{1-y}$, il cui studio verrà però condotto dopo lo studio, peraltro richiesto, della curva y' , simmetrica di y rispetto alla bisettrice $y = x$.

Il problema va dunque affrontato con attenzione, individuando e applicando simmetrie per non appesantire il processo di calcolo. Alla semplicità del calcolo dell'area tra le due curve attraverso l'integrale definito è affiancata la richiesta di approssimare tale area attraverso un metodo di approssimazione numerica: interessante utilizzare due diversi metodi di quadratura e confrontare il grado di approssimazione ottenuto. Poco opportuna appare la richiesta del punto 5: difficilmente i ragazzi ricorderanno la sezione aurea, studiata, se studiata, anni prima. Il problema proposto è nel complesso un «bel» problema che consente di valutare con attendibilità le competenze raggiunte dallo studente nel campo dell'analisi.

2. Il secondo problema è, rispetto al primo, assai semplice e soprattutto assai poco stimolante. La risoluzione sarebbe stata appesantita nei calcoli se fosse stata scelta come incognita, anziché il raggio di base del cono, l'angolo di apertura del settore. La richiesta di calcolare una capacità in litri che comporta di eseguire un'equivalenza, risulta davvero ridicola, se rivolta a studenti che hanno fatto cinque anni di fisica. Fuori dalla portata dei ragazzi è invece lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\arcsin(x)$ per approssimare in gradi l'angolo di apertura del cono. Questo problema valuta dunque ben poco di quanto i ragazzi hanno studiato, soprattutto nell'ultimo anno.

3. I dieci quesiti proposti presentano diversi gradi di difficoltà:

- Semplice e alla portata di ogni studente la risoluzione dei quesiti 1, 5, 9, 10.
- Ripetitive le richieste sulla probabilità dei quesiti 2 e 3, che richiedono comunque padronanza dell'argomento.
- Impegnativi i quesiti 7 e 8 che richiedono capacità di riflessione fuori dagli schematismi degli esercizi di routine.
- Decisamente difficili i quesiti 4 e 6. La risoluzione del limite proposto nel quesito 4 non può essere condotta utilizzando regole di calcolo standard (limiti notevoli, confronto di infiniti, Teorema di De L'Hopital), ma richiede un approccio intuitivo e capacità di lavorare con le successioni, argomento spesso trascurato. Il quesito 6, con tutti i sottocasi che è necessario analizzare, si presenta veramente impegnativo; soprattutto disorienta la richiesta, davvero curiosa, di utilizzare il Teorema di Rolle.

Nel complesso, i quesiti proposti non sono affatto banali e richiedono allo studente di saper applicare quanto ha appreso in contesti diversi dall'usuale, e di avere non soltanto padronanza dei contenuti, ma anche capacità rielaborative e intuitive.

Nerina Rumi
Liceo Scientifico «G. Galilei», Palazzolo S/O (BS)

CLASSICI ITALIANI

Collana di classici italiani che si distinguono per il particolare impegno e l'alto rigore critico ai quali i singoli curatori si sono attenuti.

D. ALIGHIERI, **LA DIVINA COMMEDIA**

edizione integrale - a cura di F. Montanari
testo critico di M. Casella

INFERNO - 7189, pp. 384, € 10,49

PURGATORIO - 7191, pp. 416, € 10,49

PARADISO - 7193, pp. 452, € 10,49

F. PETRARCA, **RIME E TRIONFI**

a cura di M. Apollonio e di L. Ferro Apollonio
5260, pp. 832, rilegato, € 17,25

T. TASSO, **LA GERUSALEMME LIBERATA**

commento di G. Getto - 2633, pp. 944, rilegato, € 17,25

V. ALFIERI, **ORESTE**

edizione integrale - a cura di P. Cazzani
4757, pp. 184, € 9,40

V. ALFIERI, **TRAGEDIE E SCRITTI SCELTI**

a cura di P. Cazzani - 5708, pp. 1064, rilegato, € 17,25

C. GOLDONI, **LA VEDOVA SCALTRA**

edizione integrale - a cura di N. Mangini
6688, pp. 232, € 9,77

C. GOLDONI, **IL CAMPIELLO**

edizione integrale - a cura di N. Mangini
7116, pp. 192, € 9,40

C. GOLDONI, **I RUSTEGHI**

edizione integrale - a cura di E. Caccia
2241, pp. 208, € 9,77

C. GOLDONI, **LA LOCANDIERA**

edizione integrale - a cura di E. Caccia
3642, pp. 320, € 11,50

G. LEOPARDI, **CANTI**

edizione integrale - a cura di A. Frattini
ediz. aggiornata e accresciuta con la collaborazione di E. Giordano
2631, pp. 736, € 17,25

G. CARDUCCI, **POESIE E PROSE SCELTE**

a cura di A. Greco - 5704, pp. 624, rilegato, € 15,96

A. MANZONI, **I PROMESSI SPOSI**

edizione integrale
a cura di E. Caccia - prefazione di Mario Marazzan
7156, pp. 1160, € 17,25

A. MANZONI, **I PROMESSI SPOSI**

Storia milanese del secolo XVII
Commento storico-estetico e note illustrative di F. Rizzi
900543, pp. 872, € 12,40

A. MANZONI, **POESIE E TRAGEDIE**

a cura di A. Frattini - 6986, pp. 856, rilegato, € 17,25

NS02 4A

EDITRICE LA SCUOLA