

Matematica

Liceo Scientifico

Ornella Robutti

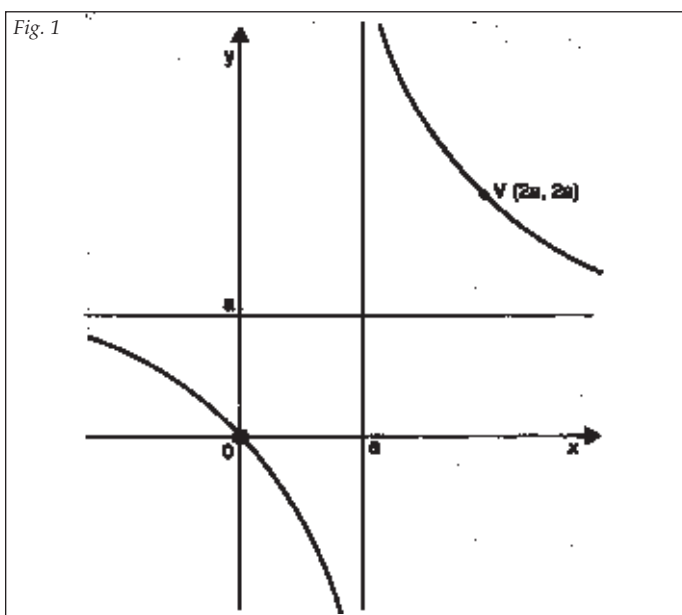
Ha avuto il via quest'anno la nuova struttura della seconda prova scritta di matematica dell'Esame di Stato nei licei scientifici di ordinamento e sperimentali. La prova consta di due problemi e dieci quesiti e richiede agli studenti di risolvere un problema e cinque quesiti. Ciascun problema si presenta con una descrizione di una situazione, seguita da quattro o cinque domande; mentre ogni quesito affronta una situazione problematica più breve, e presenta una sola domanda.

Gli argomenti toccati nella prova dei licei scientifici di ordinamento riguardano i programmi del triennio. Dopo una traccia di risoluzione di problemi e quesiti, in questo articolo presenteremo alcuni commenti sulla prova.

Problema 1

Il primo problema si orienta sulla geometria analitica e presenta una famiglia di curve da analizzare, rappresentare e determinare in casi particolari.

a) Esplicitando la y come variabile indipendente, si ottiene il fascio di funzioni: $y = \frac{ax}{x-a}$, che sono iperboli equilateri, di vertici $V(2a, 2a)$ e $O(0,0)$, di cui una rappresentazione cartesiana è in figura 1. A causa della forma dell'espressione for-



Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.

c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1,1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t .

e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k .

Problema 2

Considerato un qualunque triangolo ABC , siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE .

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC .

b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $\hat{A}BC$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a$, $\overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C .

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC .

Questionario

1. Indicare con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò

(segue a pag. successiva)

(continua da pag. precedente)

è sufficiente per concludere che $f(a) = 1$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA' , BB' , CC' , DD' , in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB . I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h(B + b + \sqrt{Bb}).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- a) area massima e perimetro massimo;
- b) area massima e perimetro minimo;
- c) area minima e perimetro massimo;
- d) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

- a) è uguale a 0;
- b) è uguale ad 1;
- c) è un valore diverso dai due precedenti;
- d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $\frac{x + \sin x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \rightarrow +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

nita dal testo, x e y devono essere contemporaneamente diversi da zero, quindi O non appartiene alle curve del fascio. L'asintoto verticale di equazione $x = a$ varia nel primo e quarto quadrante, come imposto dalla condizione $a > 0$.

Le iperboli sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

La relazione data tra x e y è nota anche come *legge dei punti coniugati*, viene utilizzata in ottica nella riflessione da specchi sferici o nella rifrazione da lenti sottili per legare le distanze (da specchio o rispettivamente da lente) di una sorgente e della sua immagine.

b) Dal sistema delle due curve: $\begin{cases} x + y = 4 \\ y = \frac{ax}{x - a} \end{cases}$ si ottiene l'equazione risolvente, di secondo grado, a cui imporre le condizioni sul discriminante ($\Delta > 0$ corrisponde a curva secante e $\Delta = 0$ corrisponde a curva tangente). Si ottengono le condizioni sul parametro a : $a \leq 1$ che, aggiunte a quella di partenza, forniscono: $0 < a \leq 1$. La condizione di tangenza può anche essere determinata con considerazioni geometriche, tenendo conto che anche la retta data è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, dunque deve passare per il vertice $(2a, 2a)$: $2a + 2a = 4$, cioè $a = 1$.

c) La circonferenza richiesta può essere determinata noti il suo centro e il suo raggio. Dato il centro, l'equazione sarà: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = r^2$, anch'essa simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Il raggio può essere determinato da condizioni geometriche.

In figura 2 si applica il teorema di Pitagora al triangolo PCH , determinando PC (il raggio), noti PH (dato dal testo) e CH (distanza centro-retta): $PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = 2$. La circonferenza k pertanto ha equazione: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

Si osserva che vale la relazione: $PC = \frac{PQ}{\sqrt{2}}$, quindi l'angolo PCQ è retto.

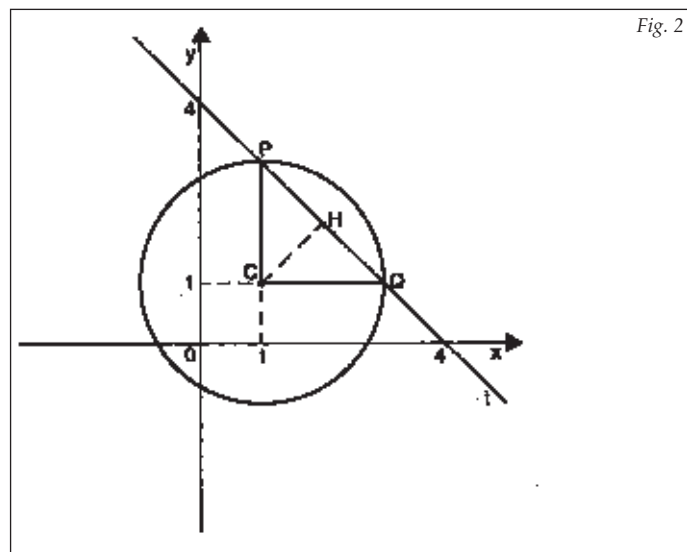


Fig. 2

d) Per ottenere le due aree occorre calcolarne una come area di un segmento circolare, e determinare l'altra per differenza. In figura 3 sono rappresentate le due regioni, le cui aree sono rispettivamente: $\pi - 2$ e $3\pi + 2$.

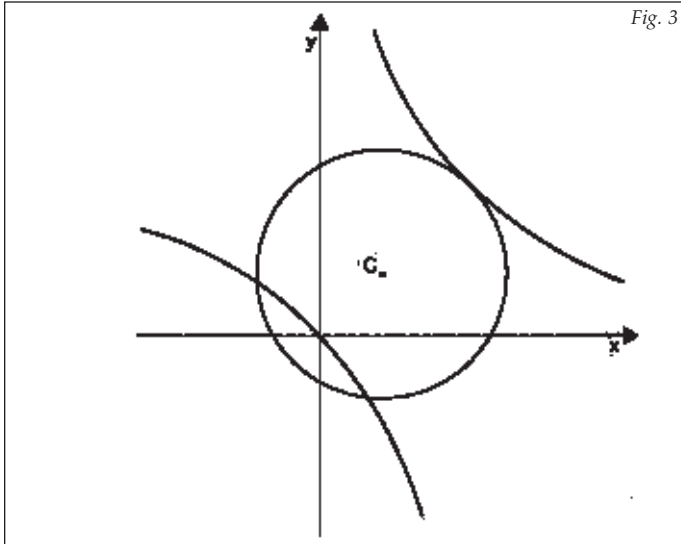


Fig. 3

e) Vista la situazione di simmetria della figura rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, per imporre la tangenza tra un'iperbole del fascio e la circonferenza, è possibile utilizzare la tangenza tra la circonferenza e la retta tangente al fascio nel vertice V. Oppure è possibile sfruttare la situazione di simmetria imponendo che la distanza tra il centro della circonferenza e il vertice V sia uguale al raggio:

$\sqrt{2(2a-1)^2} = 2$. Per a si ottiene il valore $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (l'altra soluzione non è accettabile perché negativa).

Problema 2

Il secondo problema si orienta sulla geometria euclidea e analitica e si conclude con la richiesta di un'area in cui si utilizza l'analisi.

a) In figura 4 sono rappresentati il triangolo ABC e il quadrilatero DENM. Detta k l'area di ABC, l'area di DENM sarà:

$$(DE + MN) \frac{1}{2} \frac{1}{2} AH = \frac{1}{6} k + \frac{1}{12} k = \frac{1}{4} k$$

sfruttando i dati e un corollario al teorema di Talete applicato al triangolo ADE. MN infatti è la metà di DE perché è il segmento che unisce i punti medi dei lati AD e AE del triangolo ADE.

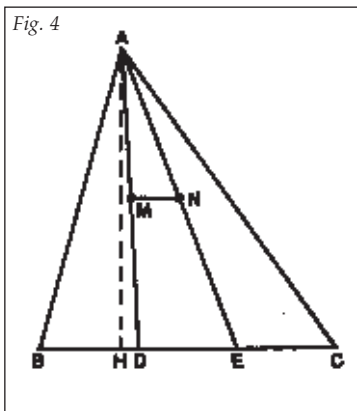


Fig. 4

b) Data l'area di DENM, si ha l'area di ABC per il risultato di cui al punto a). Essa vale $90a^2$, da cui si deduce che l'altezza AH del triangolo ABC vale $12a$, e che la proiezione di AB su BC (cioè il segmento BH) misura $5a$. Ma dai dati si sa che il segmento BD, terza parte di BC, misura $5a$. Quindi l'altezza AH coincide con il lato AD del triangolo ADE, cioè il trapezio DENM è rettangolo.

c) Scelto il punto M come centro del sistema di assi cartesiani (figura 5), la parabola ha equazione: $y = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x$, ottenibile facilmente imponendo il passaggio per i tre punti

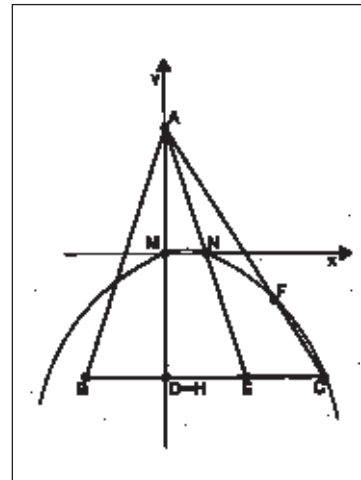


Fig. 5

$M(0,0)$, $N\left(\frac{5}{2}a, 0\right)$ e $C(10a, -6a)$.

d) Il lato AC (di equazione $y = -\frac{6}{5}x + 6a$) e la parabola si intersecano anche nel punto F di ascissa $\frac{15}{2}a$.

La prima area si ottiene dall'integrale:

$\int_0^{\frac{15}{2}a} \left(-\frac{6}{5}x + 6a + \frac{2}{25a}x^2 - \frac{1}{5}x\right) dx = \frac{135}{8}a^2$. L'altra area si ottiene per differenza dall'area del triangolo ADC, che misura $60a^2$, e vale: $\frac{345}{8}a^2$.

Questionario

1. Il fatto che una funzione ammetta limite in un punto non è sufficiente per poter affermare che il suo valore in quel punto sia il valore del limite, perché la funzione potrebbe essere non continua o non definita in quel punto. Per esempio, la funzione $\begin{cases} y = x^3 & \text{per } x \neq 0 \\ y = 4 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

ammette limite 0 nel punto O, ma tale valore non corrisponde a $f(0)$, che vale 4.

2. Applicando il teorema di De L'Hôpital al limite dato, si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2e^x(x+1)} = 1.$$

3. Facendo l'ipotesi che lo spigolo del cubo abbia lunghezza unitaria, in figura 6 si vedono i piani che secano il piano di base ABCD.

Dalla figura 6, si vede che il cubo risulta essere composto da quattro prismi retti. Poiché il volume di un prisma si ottiene moltiplicando l'area di base per la sua altezza, e i prismi hanno tutti la stessa altezza, è possibile semplificare la dimo-

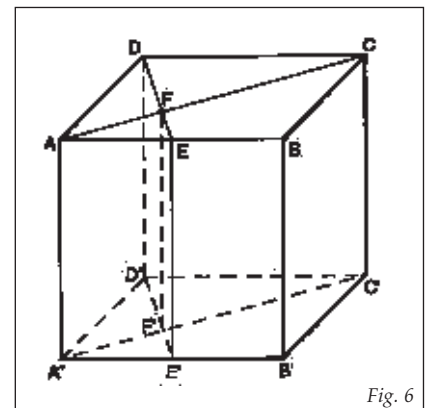
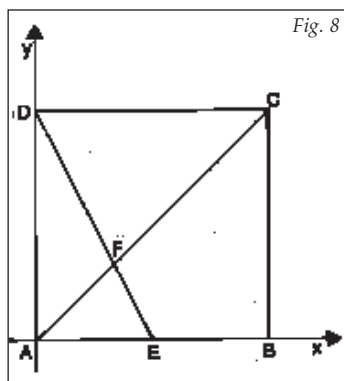
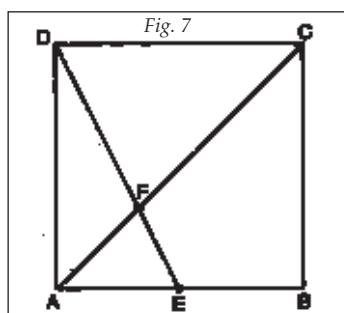


Fig. 6

strazione riferendola alle sole aree di base dei prismi, perché il loro rapporto è pari al rapporto dei volumi dei corrispondenti prismi. In *figura 7* si vede la proiezione della configurazione sulla faccia ABCD.

Bisogna dimostrare che l'area di FCBE è quintupla di quella di AFE. Data l'addittività dell'area, è sufficiente dimostrare che l'area di AFE è la sesta parte dell'area del triangolo ABC, (che è la metà dell'area della faccia del cubo, quindi vale $\frac{1}{2}$, essendo lo spigolo unitario). Pensando a un sistema di coordinate (*figura 8*) centrato in A e con assi coincidenti con due lati del quadrato (AD e AB), il problema si risolve semplicemente intersecando le due rette: DE, di equazione $y = -2x + 1$ e AC di equazione $y = x$. Il punto F, così ottenuto, ha coordinate $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Il triangolo AFE ha quindi area pari a $\frac{1}{12}$, cioè $\frac{1}{6}$ dell'area di ABC.



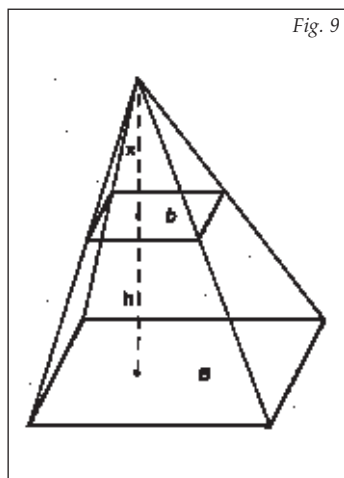
4. Un tronco di piramide di altezza h può essere visto come la differenza tra due piramidi con lo stesso vertice, una ottenuta dall'altra per proiezione centrale, come in *figura 9*. Detta x l'altezza della più piccola, e $h+x$ l'altezza della maggiore, allora il volume del tronco vale:

$V_T = \frac{1}{3} [B(h+x) - bx]$, sapendo che l'area della piramide si

ottiene dal terzo del prodotto dell'area di base per l'altezza. Per via della proiezione centrale su piani paralleli, è possibile scrivere la proporzione: $B : b = (h+x)^2 : x^2$, da cui si ricava (scegliendo la soluzione positiva):

$$x = \frac{bh + \sqrt{Bbh}}{B - b}$$

che, sostituita nel volume del tronco, dà il risultato cercato.



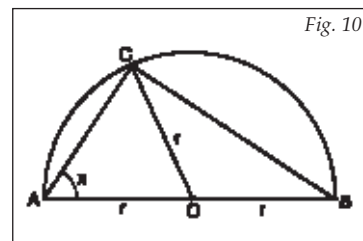
5. La funzione a derivata nulla in tutte le x di un intervallo chiuso è costante perché, in caso contrario (nel caso in cui la funzione localmente non sia costante), la sua derivata ammetterebbe valori diversi da zero.

6. Si sfrutta la definizione di coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \text{ I calcoli sono:}$$

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)![(n-k) + k]}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

7. La risposta corretta è la a). Ha l'area massima perché i triangoli inscritti in una circonferenza hanno tutti la stessa base e altezza variabile tra 0 e il raggio: quello isoscele ha l'altezza pari al raggio e quindi area massima. Ha il perimetro massimo perché, se lo esprimiamo in funzione di x , dove con x abbiamo indicato uno dei due angoli alla base, come in *figura 10*, allora il perimetro vale: $f(x) = 2r(1 + \sin x + \cos x)$. La sua derivata $f'(x)$ si annulla per $x = \frac{\pi}{4}$, che corrisponde al triangolo isoscele.



8. Si tratta di una cubica, che ha una funzione derivata prima di secondo grado. La derivata prima si annulla in due punti se il suo discriminante è maggiore di zero. Ciò accade se: $a < -\frac{9}{4}$ o $a > 0$. Nell'insieme complementare: $-\frac{9}{4} \leq a < 0$ la cubica non ha punti estremanti. (Il valore $a = 0$ è escluso perché altrimenti non si tratta di una cubica).

9. Quando x tende all'infinito $\cos x$ e $\sin x$ non ammettono un limite, ma infiniti valori limite, (tali valori sono limitati, perché appartengono all'intervallo $[-1,1]$). Quindi il limite del numeratore non esiste. In questo caso però, poiché il denominatore tende all'infinito, il rapporto ammette limite, che è zero, perché rapporto di una quantità limitata per una che tende all'infinito. Quindi la risposta corretta è la a).

10. Il limite per x che tende all'infinito vale 1, perché sia il numeratore che il denominatore sono asintotici a x , essendo uguali alla somma di x con funzioni limitate. Non è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital, in quanto, derivando numeratore e denominatore, si ottiene una funzione che non ammette limite all'infinito.

Commenti a problemi e quesiti

Nei vari siti di discussione sul web, in cui sono intervenuti docenti e studenti, i commenti sono stati per lo più favorevoli alla nuova struttura e alle domande della prova d'esame (riferita al liceo scientifico tradizionale e sperimentale), perché non presentavano trabocchetti, insidie, errori di presen-

« La prova d'esame tende a verificare la capacità di applicare le procedure acquisite ».

tazione. Il commento di uno studente sul Forum di Repubblica è stato: «la prova di matematica (sia quella del pni che ho fatto io, sia quella normale che ho visto) era stra FACILE!!!!», e un altro gli ha risposto: «soprattutto la prova di matematica del pni era ridicola (direi anche un po' più facile di quella dello scientifico tradizionale)».

La mia opinione è che non bisogna confondere la semplicità della prova con il giudizio positivo che si può dare su di essa: non sempre le due voci devono essere strettamente correlate. Certamente, un problema facile e risolvibile da tutti gli studenti consente ai commissari di dare un'alta percentuale di valutazioni positive, così come, all'opposto, un problema estremamente difficile o mal formulato, per esempio quello di statistica proposto alcuni anni fa (Nolli, Robutti, 1996), rende prossima a zero la percentuale di valutazioni positive. Ma entrambi questi casi andrebbero evitati in una prova d'esame nazionale. Occorrerebbe un giusto equilibrio tra richieste a livello basso (mi riferisco per esempio alla tassonomia di Bloom, tanto per intenderci) e richieste a livello più alto, in modo da offrire un ampio spettro di possibilità sia agli studenti per evidenziare le loro capacità, conoscenze e competenze, sia agli insegnanti per utilizzare ampiamente la scala di valutazione. Il rischio altrimenti, è che la valutazione si appiattisca su valori molto bassi se la prova è troppo difficile, o su valori molto alti se la prova è troppo facile, senza riuscire a differenziare i livelli delle competenze raggiunti. Quest'anno, per esempio, se la prova di matematica ha consentito a un grande gruppo di studenti di livello basso o medio di raggiungere risultati positivi, non è riuscita, in alcuni casi, a differenziare nell'insieme gli studenti di livelli medio-alto, alto ed eccellente.

Certo non è facile trovare questo equilibrio tra facile e difficile, per esempio si potrebbero porre, nei problemi, domande a difficoltà crescente, non necessariamente indipendenti le une dalle altre, mirate non solo a verificare la capacità di applicare procedure acquisite, ma anche a mostrare di avere consapevolezza di proprietà, procedure, significati di oggetti matematici, come si era fatto rilevare su esempi concreti in un precedente articolo (Arzarello, Robutti, 2001). Si diceva in quell'articolo: «Ci si potrebbe chiedere quali tipi di competenze sia più opportuno perseguire nella preparazione degli studenti in un curriculum di matematica del liceo scientifico, sia esso di ordinamento o sperimentale. ... È più opportuno che lo studente sappia applicare l'algoritmo di calcolo delle derivate oppure che possieda il significato di derivata e sappia utilizzarlo in vari contesti problematici?». A questo proposito, mi pare che i problemi della prova di ordinamento (e anche quelli della prova P.N.I.) propendano un po' troppo

verso il primo tipo di competenze, lasciando in ombra il secondo. La mia opinione è che, nelle prove d'esame future, occorrerebbe cercare di raggiungere l'equilibrio di cui si diceva.

I quesiti sono apprezzabili, sia per la chiarezza di formulazione, sia per lo sforzo (che si percepisce) che è stato fatto al fine di renderli piuttosto omogenei tra di loro, per livello di difficoltà. I dubbi che permangono riguardano la tipologia delle domande, a volte troppo orientate su aspetti meccanici di calcolo (si pensi per esempio alla 4 o alla 6), piuttosto che di esplorazione e ragionamenti. Le altre domande rivelano un orientamento verso gli aspetti teorici della matematica, non puramente come esercizio di ripetizione di argomenti studiati, bensì di giustificazione di risultati da ricavare, alla luce delle ipotesi assunte.

Per fare un esempio di problema di esplorazione, il settimo quesito poteva essere posto in forma più aperta, richiedendo di esplorare la variazione di area e perimetro dei triangoli inscritti in una circonferenza, descrivendo situazioni di minimo e di massimo. L'esplorazione, se effettuata con un software di geometria dinamica come Cabri, fornisce l'opportunità di visualizzare configurazioni geometriche contemporaneamente a variabilità numerica e, volendo, anche alla funzione rappresentativa della variabile dipendente (area o perimetro), come in figura 11.

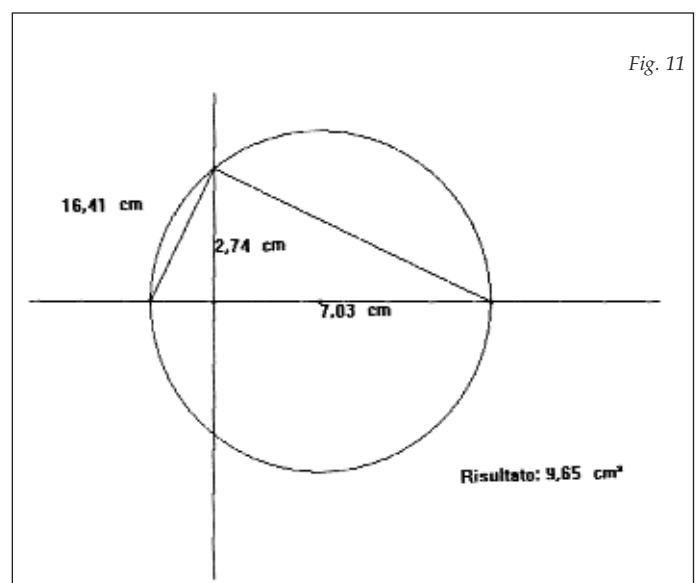
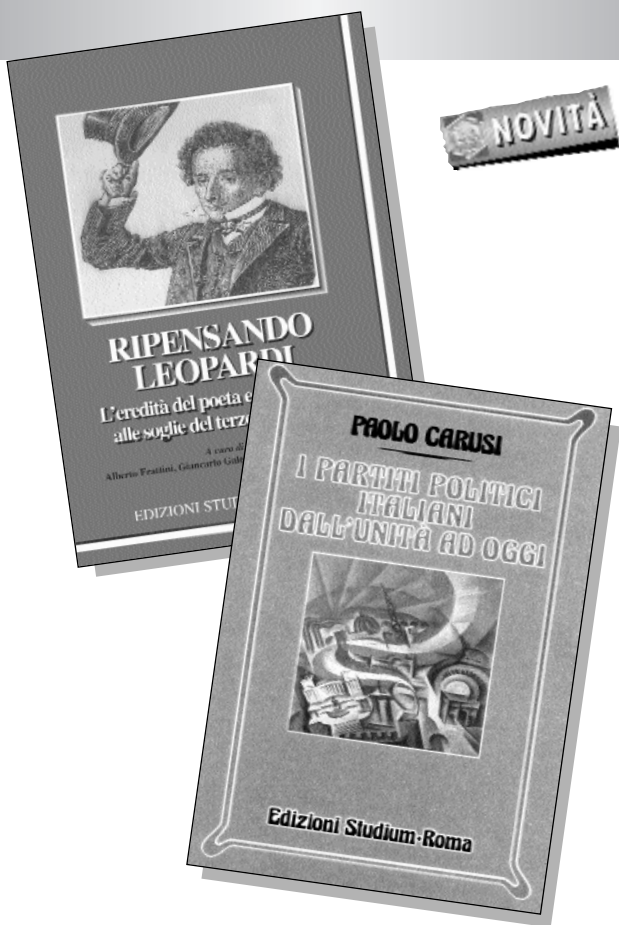


Figura 11. Il numero in alto a sinistra, espresso in cm, rappresenta la misura del perimetro, mentre quello in basso a destra, espresso in cm², rappresenta la misura dell'area del triangolo inscritto.



RIPENSANDO LEOPARDI

**L'eredità del poeta e del filosofo
alle soglie del terzo millennio**

a cura di A. Frattini - G. Galeazzi
S. Sconocchia

23871 - pp. 466, L. 65.000 - € 33,57

«Ripensare Leopardi» tenendo presente sia la nuova configurazione che si riconosce al Recanatese come poeta e filosofo, sia la peculiarità del nostro tempo postmoderno: questo lo scopo del **secondo Convegno Leopardiano di Ancona, i cui atti appaiono in questo volume.**

Paolo Carusi I PARTITI POLITICI ITALIANI DALL'UNITÀ AD OGGI

23874 - pp. 286 - L. 35.000 - € 18,08

La storia dei partiti italiani viene qui ripercorsa, nei suoi passaggi fondamentali, attraverso lo svolgimento cronologico delle diverse fasi politiche: dai problemi e le questioni emerse all'indomani dell'unificazione, passando attraverso la crisi del liberalismo e l'avvento dei partiti di massa, superando la soppressione della vita democratica messa in atto dal regime fascista, e arrivando, infine, alla creazione, al consolidamento e alla crisi del sistema dei partiti dell'Italia repubblicana.



Edizioni **STUDIUM**
in distribuzione esclusiva dall'**EDITRICE LA SCUOLA**

NS01 4E

Questo non significa affatto che il software dimostra al posto dello studente, ma semplicemente che aumenta le sue possibilità di esplorazione di formulazione di congetture. Lo studente, convintosi della validità delle sue congetture, può poi giustificarle. Una prova d'esame in una scuola a indirizzo scientifico oggi dovrebbe consentire l'uso della tecnologia, perché questa non potrà mai sostituirsi allo studente, al suo pensiero razionale e argomentativo. Si potrebbe prevedere eventualmente anche la possibilità, come per esempio negli esami in Olanda, che una parte dell'esame consenta l'uso della tecnologia, e un'altra parte no.

Esistono ancora alcuni problemi aperti in questo esame di Stato di matematica, che si spera con gli anni vengano superati. Come giustamente ha fatto osservare un insegnante sulla lista di discussione *cabrinews*, (in cui sono comparsi numerosi interventi sia prima che durante gli esami di Stato): «E allora, va tutto bene in questa nuova struttura della prova di matematica? In realtà rimangono aperte le questioni (non di poco conto) già più volte sottolineate in questa lista:

- dello sfondo non ben definito dei programmi (per usare un eufemismo), nei quali non sono precisate le conoscenze e le competenze obbligatorie da raggiungere (su cui costruire la prova d'esame);
- dell'uso delle calcolatrici programmabili e simbolico-grafiche ancora vietato (anche nei licei sperimentali PNI);
- della valutazione della prova (che a mio parere dovrebbe essere standardizzata a livello nazionale, per evitare di creare troppe disparità tra le commissioni)».

Un'osservazione vale la pena di ripetere, ed è la formulazione delle domande, connessa con la possibilità di utilizzare la tecnologia. Se le domande fossero formulate in maniera un po' più aperta, non fornendo cioè la tesi, sarebbe possibile consentire agli studenti di utilizzare qualunque tipo di strumento tecnologico (perché non anche calcolatrici programmabili o grafico-simboliche?). Tale strumento non fornirebbe certamente le risposte alle domande, ma consentirebbe un'ampia esplorazione orientata a determinare risultati, formulare congetture, convincersi della loro validità. La giustificazione di tali congetture alla luce della teoria ancora non verrebbe fornita dallo strumento tecnologico, ma dovrebbe essere costruita dallo studente, come dimostrazione.

Ornella Robutti - Dip. di Matematica, Università di Torino

BIBLIOGRAFIA

N. Nolli, O. Robutti, *Matematica PNI. Maturità scientifica sperimentale*, Nuova Secondaria, 7, XIII, La Scuola, Brescia, pp. 83-87.

F. Arzarello, O. Robutti, *Matematica. La prova scritta del liceo scientifico all'esame di Stato*, Nuova Secondaria, 9, XVIII, La Scuola, Brescia, pp. 86-94.

Matematica

Liceo Scientifico - P.N.I.

Alessandro Rabuzzi

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Problema 1

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) :

- si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{PA}{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;
- si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45° ;
- posto X , appartenente a γ , in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = (XB/XA)^2$ e $x = \tan \alpha$.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) , è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

- Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;
- si studi e si disegni Γ ;
- si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x ;
- si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;
- si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a \log(x + b)|$$

Questionario

1. Provare che una sfera è equivalente ai $2/3$ del cilindro circoscritto.

2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0.$$

3. Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

4. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \arcsen x + \arccos x.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

5. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x} dx.$$

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

7. Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

9. Spiegare il significato di sistema assiomatico con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema del valor medio o di Lagrange, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

Problema 1

Conviene fissare l'origine nel punto C e disporre l'asse x secondo il segmento AB , in modo che si abbia $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $C(0,0)$, con $a > 0$.

a) Posto $P(x,y)$, si determina direttamente l'equazione del luogo richiesto: infatti si ha $\overline{PA} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$,

$\overline{PB} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ e perciò la condizione $\frac{PA}{PB} = k$, ossia $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = k^2$, si interpreta analiticamente mediante l'equazione:

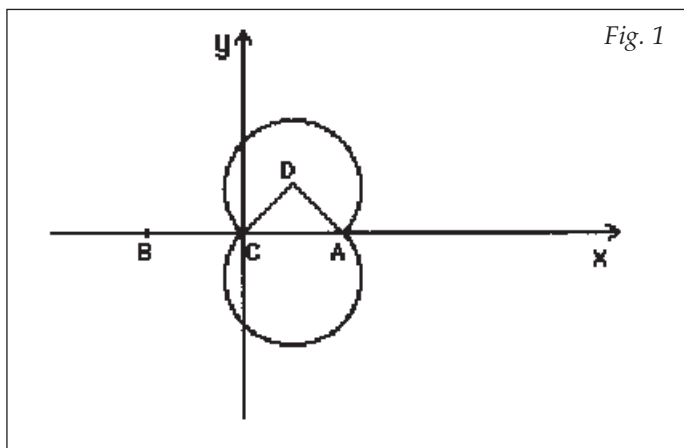
$$(x-a)^2 + y^2 = k^2 [(x+a)^2 + y^2].$$

Si ottiene così l'equazione del luogo:

$$x^2(1-k^2) + y^2(1-k^2) - 2ax(1+k^2) + a^2(1-k^2) = 0.$$

Per $k \neq 1$ essa si può scrivere come $x^2 + y^2 - \frac{2a(1+k^2)}{(1-k^2)}x + a^2 = 0$ e pertanto rappresenta la circonferenza avente il centro nel punto di coordinate $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0\right)$ e il raggio uguale a $\frac{2a|k|}{|1-k^2|}$; per $k = 1$ l'equazione diviene $x = 0$ e il luogo degenera nell'asse y .

b) Ricordiamo la definizione di arco circolare capace di un angolo α , come l'arco di circonferenza tale che gli angoli inscritti in esso sono uguali ad α (si veda ad es. il testo *Elementi di Geometria* di Enriques - Amaldi, Zanichelli, Bologna, Vol I, p. 176) e il teorema relativo (*op. cit.* p. 177) che afferma: «Il luogo geometrico dei punti del piano, da cui un segmento è visto sotto un dato angolo, è l'insieme dei due archi capaci di questo angolo, che hanno come corda comune il segmento dato». Sulla base di ciò, risulta che il luogo richiesto è costituito dall'arco di circonferenza di centro $D\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, avente come corda il segmento CA (infatti i punti dell'arco suddetto vedono il segmento CA sotto un angolo di 45° , dato che l'angolo al centro $\hat{C}\hat{D}$ è retto), e dal suo simmetrico rispetto alla corda CA .

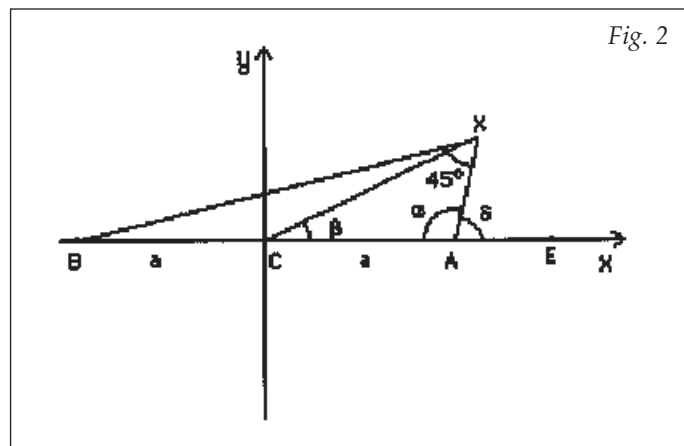


Data la scarsa consuetudine degli studenti con metodi puramente geometrici, conviene indicare anche un procedimento analitico.

Nel sistema di coordinate cartesiane già fissato, si osserva che la curva luogo è simmetrica rispetto all'asse x e che, pertanto, si può limitare l'indagine al semipiano delle ordinate positive, considerando un punto $X(x, y)$, con $y \geq 0$.

Posti $\hat{XCE} = \beta$ e $\hat{XAE} = \delta$ (come in Fig. 2), si ha $\delta = \beta + 45^\circ$ per il teorema dell'angolo esterno, e quindi $\tan \delta = \tan(\beta + 45^\circ) = \frac{\tan \beta + 1}{1 - \tan \beta}$.

Adesso, ponendo $\tan \beta = m$ e $\tan \delta = m'$, il punto X si individua come intersezione delle rette CX e AX , di equazione rispettivamente $y = mx$ e $y = m'(x - a)$. L'equazione cartesiana della curva luogo (per $y \geq 0$) si determina mediante l'eliminazione dei parametri m e m' fra le equazioni:



$$y = mx; y = m'(x - a); m' = \frac{m + 1}{1 - m}.$$

Si ricavano m e m' nelle prime due equazioni e, sostituendo nella terza, si ha:

$$\frac{y}{x - a} - \frac{y^2}{x(x - a)} = \frac{y}{x} + 1.$$

Da essa, riportando a forma intera, si ottiene l'equazione che rappresenta la curva relativamente ai punti con ordinata positiva:

$$x^2 + y^2 - ax - ay = 0, y \geq 0.$$

Il luogo richiesto risulta costituito dalla curva precedente unita alla sua simmetrica rispetto all'asse x , che ha equazione:

$$x^2 + y^2 - ax + ay = 0, y \leq 0.$$

c) Poiché nel triangolo ACX l'angolo in X è di 45° , l'angolo $\hat{XAC} = \alpha$ può variare da 0° (con $X \equiv B$) a 135° (con $X \equiv A$); quest'ultimo valore va escluso perché nel rapporto $\frac{\overline{XB}^2}{\overline{XA}^2}$ il denominatore assume valore nullo; pertanto $0^\circ \leq \alpha < 135^\circ$. Per il teorema dei seni, applicato al triangolo ACX , si ha $\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AX}}{\sin(135^\circ - \alpha)}$, ossia $\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{AX}}{\sin(45^\circ + \alpha)}$.

Allora $AX = a \sqrt{2} \sqrt{2}/2 (\cos \alpha + \sin \alpha) = a (\cos \alpha + \sin \alpha)$. Dal teorema di Carnot, applicato al triangolo ABX , deriva

$$\overline{XB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \overline{AX} \cdot \overline{AB} \cos \alpha$$

e, con semplici calcoli, si ottiene

$$\overline{XB}^2 = a^2 (5 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha).$$

Dunque $\frac{\overline{XB}^2}{\overline{XA}^2} = \frac{5 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}.$

Dividendo per $\cos^2 \alpha$ e ponendo $x = \tan \alpha$, si ha

$$y = f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2}.$$

Le condizioni geometriche su α comportano le seguenti limitazioni per x : $x < -1$, $x \geq 0$.

Lo studio della funzione razionale fratta $y = f(x)$ non presenta difficoltà: il dominio è $\mathbf{R} - \{-1\}$; il grafico (riportato in Fig. 3) ha asintoto verticale di equazione $x = -1$ ed asintoto orizzontale di equazione $y = 5$, presenta il minimo assoluto nel punto $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e un flesso nel punto $F(1, 1)$.

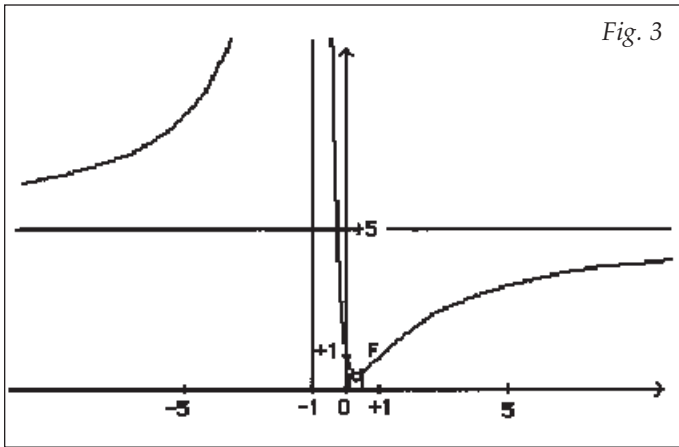


Fig. 3

Problema 2

a) Il grafico passa per l'origine se e solo se $a \cdot \log b = 0$; perciò, essendo $a \neq 0$, si deve avere $\log b = 0$ e quindi $b = 1$. La derivata della funzione assegnata è $y' = 2x + \frac{a}{x+1}$ e si annulla

per $a = -4$; questa rappresenta la condizione necessaria affinché $x = 1$ sia punto di minimo.

La funzione $y = f(x) = x^2 - 4 \log(x+1)$ soddisfa le condizioni imposte.

b) $f(x)$ è funzione trascendente; il dominio è l'intervallo aperto $(-1, +\infty)$; il grafico passa per l'origine e ha asintoto verticale di equazione $x = -1$, non presenta asintoto orizzontale né obliquo.

La derivata prima, espressa da $y' = 2x - \frac{4}{x+1}$ si annulla

per $x = 1$; lo studio della monotonia assicura che $x = 1$ è punto di minimo, in cui la funzione assume valore $1 - 4 \cdot \log 2$, e che la funzione è strettamente crescente per $x > 1$; la derivata seconda, espressa da $y'' = 2 + \frac{4}{(x+1)^2}$ è positiva in tutto il dominio, quindi la funzione è convessa.

La ricerca delle intersezioni con l'asse x comporta di risolvere l'equazione $x^2 - 4 \log(x+1) = 0$, cosa che si può effettuare solo per via approssimata, come richiesto nel punto c del problema.

Intanto, seguendo un procedimento grafico, l'equazione si può scrivere come $\frac{x^2}{4} = \log(x+1)$ e si possono interpretare le sue soluzioni come ascisse dei punti comuni alle curve di equazione $y = \frac{x^2}{4}$ e $y = \log(x+1)$. La prima è una parabola

con il vertice nell'origine e la concavità rivolta verso l'alto, l'altra si ottiene dalla curva logaritmica $y = \log x$ mediante una traslazione di ampiezza 1 nel verso negativo dell'asse x .

Tracciando i due grafici nello stesso sistema di assi cartesiani, si individuano i loro punti di intersezione e si può dare una valutazione approssimata delle loro ascisse. Come si vede nella Fig. 4, le due curve si incontrano, oltre che nell'origine, anche in un punto che ha ascissa compresa fra 2 e 3.

Detta α l'ascissa di questo punto, si può affermare che il grafico della funzione $f(x)$ incontra l'asse x , oltre che nell'origine, anche nel punto $(\alpha, 0)$, con $2 < \alpha < 3$.

Dal confronto dei grafici della Fig. 4, si può desumere anche il segno di $f(x)$: infatti $x^2 - 4 \log(x+1) > 0$ se e solo se

$\frac{x^2}{4} > \log(x+1)$ e quest'ultima disequazione è verificata per $-1 < x < 0$ e per $x > \alpha$.

Il grafico della funzione $y = f(x)$ è riportato nella Fig. 5.

c) Nell'intervallo $[2,3]$ si può applicare il metodo delle tangenti per approssimare l'intersezione di Γ con l'asse x ; infatti si ha $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [2,3]$. Il punto di partenza è $x_1 = 3$; il primo passo della formula ricorsiva è $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, che dà una prima approssimazione dell'intersezione: $x_2 = 3 - \frac{9 - 4 \log 4}{5} \approx 2,3$.

d) Le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta $y = 1 - 4 \log 2$ sono: $x' = x$; $y' = -y + 2(1 - 4 \log 2)$. Da esse, scambiando gli apici, si ottengono le equazioni della simmetria inversa: $x = x'$; $y = -y' + 2(1 - 4 \log 2)$ che consentono, sostituendo al posto di x e y nell'equazione della curva Γ , di determinare l'equazione della curva trasformata Γ' . Dopo semplici passaggi si ha $y' = -x'^2 + 4 \log(x' + 1) + 2 - 8 \log 2$. Poiché l'equazione di Γ' è riferita allo stesso sistema cartesia-

Fig. 4

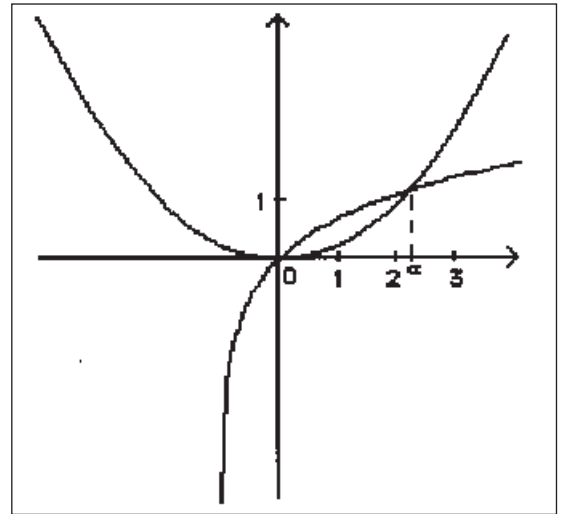
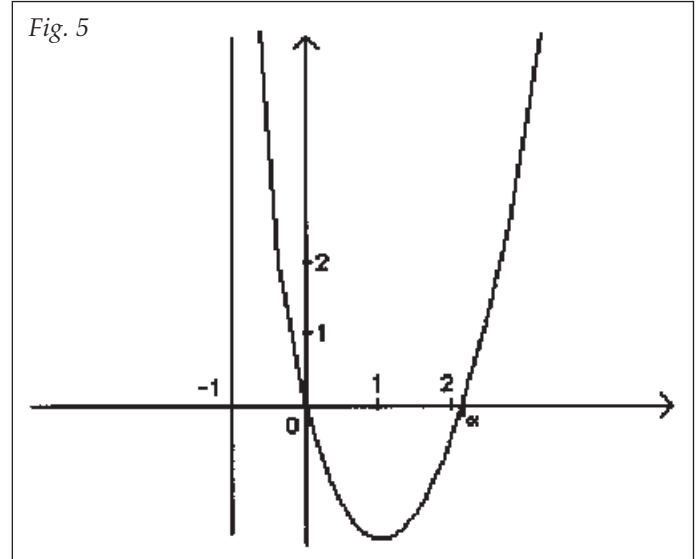


Fig. 5



$\frac{x^2}{4} > \log(x+1)$ e quest'ultima disequazione è verificata per $-1 < x < 0$ e per $x > \alpha$.

Il grafico della funzione $y = f(x)$ è riportato nella Fig. 5.

c) Nell'intervallo $[2,3]$ si può applicare il metodo delle tangenti per approssimare l'intersezione di Γ con l'asse x ; infatti si ha $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [2,3]$. Il punto di partenza è $x_1 = 3$; il primo passo della formula ricorsiva è $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, che dà una prima approssimazione dell'intersezione: $x_2 = 3 - \frac{9 - 4 \log 4}{5} \approx 2,3$.

d) Le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta $y = 1 - 4 \log 2$ sono: $x' = x$; $y' = -y + 2(1 - 4 \log 2)$. Da esse, scambiando gli apici, si ottengono le equazioni della simmetria inversa: $x = x'$; $y = -y' + 2(1 - 4 \log 2)$ che consentono, sostituendo al posto di x e y nell'equazione della curva Γ , di determinare l'equazione della curva trasformata Γ' . Dopo semplici passaggi si ha $y' = -x'^2 + 4 \log(x' + 1) + 2 - 8 \log 2$. Poiché l'equazione di Γ' è riferita allo stesso sistema cartesia-

no di Γ , possiamo togliere gli apici da x' e y' e riscrivere l'equazione nelle variabili x e y . Pertanto Γ' ha equazione:

$$y = -x^2 + 4 \log(x+1) + 2 - 8 \log 2.$$

e) Ricordando la definizione del valore assoluto, il grafico della funzione $y = |f(x)|$ si ottiene da quello di $y = f(x)$ applicando all'arco del grafico che giace sotto l'asse x , la simmetria rispetto a quello stesso asse e conservando per il resto il grafico inalterato.

Questionario

1) Per via puramente geometrica, si può provare (si veda ad esempio il testo di Enriques - Amaldi già citato, Vol. II, p. 412) che, se dal cilindro circoscritto ad un emisfero si sottrae l'emisfero, si ottiene un solido, detto scodella di Galileo, che è equivalente a $\frac{1}{3}$ del cilindro suddetto.

Altrimenti, per via analitica, si possono considerare la sfera e il cilindro, come solidi ottenuti dalla rotazione attorno all'asse x di un semicerchio e del rettangolo ad esso circoscritto e calcolare i loro volumi mediante integrali definiti.

2) La funzione derivata di $y = f(x) = x e^x + x e^{-x} - 2$ si può porre nella forma $y' = \frac{1}{e^x} [(e^{2x} + 1) + x (e^{2x} - 1)]$, dalla quale si rileva facilmente che essa è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ (basta osservare che il prodotto $x (e^{2x} - 1)$ ha entrambi i fattori positivi per $x > 0$ ed entrambi negativi per $x < 0$). Pertanto la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$; inoltre essendo $f(0) = -2$, $f(1) = e + \frac{1}{e}$, essa assume valore 0 in un punto dell'intervallo $(0,1)$. Dunque l'equazione assegnata ha una sola soluzione, che risulta compresa fra 0 e 1.

3) Siano x_1, x_2 , con $x_1 < x_2$, due radici di $p(x)$, cioè numeri tali che $p(x_1) = p(x_2) = 0$. $p(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[x_1, x_2]$, perciò esiste almeno un numero c , $x_1 < c < x_2$, tale che $p'(c) = 0$.

4) $f(x)$, definita e continua nell'intervallo $[-1,1]$, è derivabile nell'intervallo aperto $(-1,1)$ con derivata nulla. Per il teorema di Lagrange, essa è costante in $[-1,1]$. Essendo $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, si può affermare che $f(x) = \frac{\pi}{2}$ in $[-1,1]$.

$$5) \int \frac{\log x}{x} dx = \int \log x d(\log x) = \frac{\log^2 x}{2} + c.$$

6) Applicando il metodo dei trapezi, con la partizione di $[0,\pi]$ in 4 intervalli di uguale ampiezza, si ha:

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sin 0}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} (\sqrt{2} + 1) \approx 1,896. \text{ Il valore esatto dell'integrale è } 2.$$

7) In riferimento alla funzione $y = f(x) = x - e^{-x}$, si ha $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ e $f''(x) = -e^{-x} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Queste condizioni sono sufficienti per affermare che l'equazione data ammette una e una sola soluzione nell'intervallo $(0,1)$. La soluzione si può determinare in maniera approssimata applicando, ad esempio, il metodo delle tangenti. Il punto di partenza

$$\text{è } x_1 = 0; \text{ il primo passo della formula ricorsiva è } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Pertanto una prima approssimazione della soluzione è data da $x_2 = 0 - \frac{-1}{2} = 0,5$.

8) L'evento equivale all'estrazione, senza reinserimento, per tre volte consecutive, di un maschio dalla classe di 12 ragazzi e 4 ragazze. Si deve perciò calcolare la probabilità composta di tre eventi non indipendenti; essa è data da

$$\frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28} \approx 0,39.$$

9) Il quesito è formulato in modo da lasciar libero lo studente di esporre le sue conoscenze sull'argomento. Necessariamente dovrà indicare il carattere ipotetico - deduttivo della Geometria, mostrare di conoscere il concetto moderno di assioma e il ruolo essenziale del sistema di assiomi, come insieme di affermazioni iniziali da cui si deducono i teoremi; dovrà inoltre esporre le caratteristiche di coerenza, completezza e indipendenza di un sistema di assiomi e accennare al fatto che gli assiomi danno la definizione implicita degli enti primitivi della teoria.

10) In un sistema cartesiano t, s , con il tempo t in ore e la posizione s in km, si indicano con t_0, s_0 l'istante e la posizione di partenza e con t_1, s_1 l'istante e la posizione finale. Se la velocità media è di 60 km/h, la retta che congiunge il punto $A(t_0, s_0)$ con il punto $B(t_1, s_1)$ ha pendenza 60° .

Supponendo la legge del moto continua in $[t_0, t_1]$ e derivabile in (t_0, t_1) , per il teorema di Lagrange, esiste almeno un istante $c \in (t_0, t_1)$ in cui la retta tangente al grafico della legge del moto è parallela alla retta AB; perciò al tempo c la velocità istantanea è di 60 km/h.

Commento

I contenuti della prova si riferiscono ad argomenti che si studiano nell'ultimo anno o che ne rappresentano indispensabili prerequisiti. E' dato ampio spazio all'Analisi numerica, talora con domande ripetute (sulla risoluzione approssimata di equazioni). Non sono presenti applicazioni dell'informatica, neppure nella forma di brevi programmi in linguaggio evoluto, come negli anni scorsi. Il ruolo riservato alla Geometria dello spazio e al Calcolo delle probabilità è assolutamente secondario.

I due problemi, sia ad una prima lettura, sia nella loro effettiva risoluzione, presentano livelli di difficoltà diversi fra loro. Il primo è più impegnativo per la qualità delle domande (in particolare il punto b chiede la determinazione di un luogo geometrico, difficile da interpretare sia dal punto di vista sintetico, sia da quello analitico) e per le osservazioni di carattere geometrico indispensabili al corretto svolgimento algebrico (ad esempio le limitazioni di α e di $\tan \alpha$ nel punto c). Il secondo problema, ordinario nell'impostazione, non ri-

serva sorprese nella risoluzione: esso richiede nozioni su vari aspetti del programma dell'ultimo anno, senza particolari approfondimenti o considerazioni.

Anche se il primo problema appare più stimolante, è probabile che la maggior parte dei candidati abbia optato per l'altro, sicuramente più facile e meno rischioso.

Il questionario tocca punti importanti del programma obbligatorio del P.N.I. e i quesiti nel loro complesso consentono di valutare il possesso di conoscenze, competenze e capacità degli studenti. Ciascuno di essi pone una singola domanda e la risposta non richiede lunga elaborazione.

Però il livello di difficoltà non è omogeneo e il candidato, dovendo rispondere solo a cinque dei dieci quesiti, può scegliere quelli più facili (il quarto, il quinto, il sesto e l'ottavo sono particolarmente semplici).

Nelle sei ore concesse per la prova (a mio parere troppe!), lo studente ha il tempo di sondare la totalità del testo ministeriale e scegliere il 50% su cui cimentarsi. Se sceglie il secondo problema e include fra i quesiti i quattro indicati sopra, si trova a svolgere una prova sicuramente facile, troppo facile rispetto al corso di Matematica che ha seguito nel quinquennio.

La nuova struttura del tema di Matematica, con quesiti articolati e indipendenti fra loro, appare più rispondente alle caratteristiche dell'Esame di Stato, perchè consente un migliore rilevamento della preparazione dei candidati e una valutazione più oggettiva della loro prestazione.

Anche la scelta di conservare il problema, frazionato in parti che comunque fanno capo ad una sola tematica, è apprezzabile perché salvaguarda una tradizione della nostra cultura matematica. La prova nella sua nuova veste si avvicina ai

modelli europei, ma non tradisce il gusto tipicamente italiano della risoluzione del problema, che per noi rappresenta l'obiettivo e il banco di prova delle abilità matematiche.

E' probabile che la struttura non sia soggetta a cambiamenti di rilievo nei prossimi anni e che resti questo lo schema con cui gli studenti si dovranno confrontare: un problema articolato in più punti e alcuni quesiti aperti a risposta rapida, con un certo margine di scelta. Sarà bene perciò tenerne conto nelle verifiche scritte durante il triennio, per abituare gli studenti a questo tipo di prova.

Non sembra opportuno trarre indicazioni dai contenuti del tema: l'insistenza sui quesiti di Analisi numerica può essere casuale e le domande poste sono comunque di tipo consueto; parimenti casuale si spera che sia lo scarso ruolo riservato alla Geometria dello spazio e al Calcolo delle probabilità. Del resto, la prova di quest'anno conferma ancora una volta che sarebbe riduttivo e didatticamente scorretto finalizzare il corso di studi del triennio all'Esame di Stato. Non solo, ma sarebbe anche improprio che il Ministero si servisse delle prove di esame per dare indicazioni sul programma da svolgere. Le innovazioni verranno dalla riforma dei programmi e dei curricoli, mentre l'esame deve adeguarsi al programma in vigore, della cui attuazione rappresenta un importante momento di verifica.

Alessandro Rabuzzi - Liceo Scientifico «A. di Savoia», Pistoia

Matematica

Istituto Magistrale

Nerina Rumi

Corso di Ordinamento

Problema 1

La soluzione dell'equazione:

$$(x-1)^3 + x^2 = x(x-1)^2 + 4 \text{ è: } x = \frac{5}{2}.$$

Perciò il raggio della sfera misura $R = 2,5$ dm.

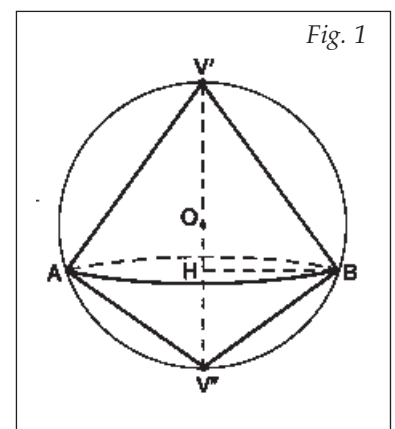
Nella sfera sono inscritti due coni circolari retti con la base comune e le superficie laterali nel rapporto $\frac{3}{4}$: (v. fig. 1)

$$\frac{S_{\text{lat}}(\text{cono vertice } V'')}{S_{\text{lat}}(\text{cono vertice } V')} = \frac{3}{4}.$$

Da cui:

$$\frac{2\pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{V''B}}{2\pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{V'B}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\overline{V''B}}{\overline{V'B}} = \frac{3}{4}; \quad \overline{V''B} = \frac{3}{4} \overline{V'B}.$$



Il candidato risolva i seguenti problemi:

1. La misura, in decimetri, del raggio di una sfera è data dalla soluzione dell'equazione:

$$(x - 1)^3 + x^2 = x(x - 1)^2 + 4.$$

Nella sfera sono inscritti due coni circolari retti aventi la base comune e le superfici laterali nel rapporto $\frac{3}{4}$.

Il candidato calcoli:

- il rapporto tra i volumi dei due coni;
- la misura del raggio della base comune dei coni;
- il peso, approssimato ai grammi, del solido costituito dai due coni, supposto che sia realizzato con legno di noce di peso specifico 0,82.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:

a) Se a e b sono numeri diversi da zero e diversi tra loro, si ha:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2. \quad (1)$$

Come va corretta la (1) se si elimina la condizione per a e b di essere «diversi tra loro»?

b) Il numero decimale periodico misto $1,2\bar{3}$ (periodo 3) ha $\frac{118}{99}$ come frazione generatrice.

c) Un numero di tre cifre tutte uguali è divisibile per 37.

Ponendo: $\overline{V'B} = x \quad \overline{V''B} = \frac{3}{4}x.$

Il triangolo $V'V''B$ è rettangolo perché inscritto nella semicirconferenza di diametro $V'V''$. Quindi, applicando il teorema di Pitagora al triangolo $V'V''B$ si ottiene:

$$\overline{V'V''}^2 = \overline{V'B}^2 + \overline{V''B}^2.$$

$$25 = x^2 + \frac{9}{16}x^2 \quad x = 4.$$

Quindi: $\overline{V'B} = x = 4 \text{ dm}$

$$\overline{V''B} = \frac{3}{4}x = 3 \text{ dm}.$$

Il raggio HB della base comune ai due coni è l'altezza del triangolo $V'V''B$ relativamente alla base $V'V''$: perciò, utilizzando la formula inversa dell'area:

$$\overline{HB} = \frac{2\mathcal{A}_{V'V''B}}{\overline{V'V''}} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ dm}.$$

$\overline{V'H}$ si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo $V'HB$:

$$\overline{V'H} = \sqrt{\overline{V'B}^2 - \overline{HB}^2} = 3,2 \text{ dm}$$

da cui:

$$\overline{V''H} = \overline{V'V''} - \overline{V'H} = 1,8 \text{ dm}.$$

I volumi dei due coni misurano:

$$V_1 = V_{\text{cono vertice } V'} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{HB}^2 \cdot \overline{V'H} = 6,144\pi \text{ dm}^3$$

$$V_2 = V_{\text{cono vertice } V''} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{HB}^2 \cdot \overline{V''H} = 3,456\pi \text{ dm}^3.$$

Per cui il rapporto tra i due volumi vale:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{3,456\pi}{6,144\pi} = 0,5625 = \frac{9}{16}.$$

Il rapporto tra i due volumi può essere ottenuto anche senza conoscere il valore dei singoli volumi.

Infatti:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi \overline{HB}^2 \cdot \overline{V''H}}{\frac{1}{3}\pi \overline{HB}^2 \cdot \overline{V'H}} = \frac{\overline{V''H}}{\overline{V'H}} = \frac{1,8}{3,2} = 0,5625 = \frac{9}{16}.$$

Sapendo, infine, che il peso specifico del legno vale:

$$p_s = 0,82 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 820 \frac{\text{g}}{\text{dm}^3}$$

si ottiene:

$$P_1 = \text{Peso}_{\text{cono } V_1} = V_1 \cdot p_s = 6,144\pi \cdot 820 \text{ g} = 5038,08\pi \text{ g}$$

$$P_2 = \text{Peso}_{\text{cono } V_2} = V_2 \cdot p_s = 3,456\pi \cdot 820 \text{ g} = 2833,92\pi \text{ g}$$

$$P_{\text{tot solido}} = P_1 + P_2 = 7872\pi \text{ g}.$$

Problema 2

a) Il quesito risulta mal posto, infatti, a e b sono numeri, ma che numeri? naturali? interi negativi? razionali? reali? Supposto che a e b siano numeri naturali, diversi tra loro, allora da:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

si deduce:

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} > 0$$

$$\frac{(a - b)^2}{ab} > 0$$

che risulta vera per ogni valore di a e b , con $a \neq b$. Di conseguenza:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ risulta vera per a e b naturali, con $a \neq b$.

Tale relazione risulta vera anche per a e b reali, con $a \neq b$, purché a e b concordi (infatti, in tal caso $ab > 0$); se inoltre $a = b$, la relazione diventa:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2.$$

Quindi, per a e b numeri reali qualsiasi, purché tra loro concordi, vale la relazione:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Tale relazione risulta falsa per a e b discordi.

b) Per verificare se il numero periodico $1,2\bar{3}$ ha $\frac{118}{99}$ come frazione generatrice basta eseguire la divisione:

$$118 : 99 = 1,191919... = 1,1\bar{9}.$$

Dunque la frazione generatrice di $1,2\bar{3}$ non è $\frac{118}{99}$, e l'enunciato risulta falso.

Qual è allora la frazione generatrice di $1,2\bar{3}$?

$$\begin{aligned} 1,2\bar{3} &= 1,23333... = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + ... = \\ &= 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...) \text{ in cui } (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...) \\ &\text{è progressione geometrica di ragione } q = \frac{1}{10} \text{ la cui somma} \\ &\text{vale: } S = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Perciò:

$$1,2\bar{3} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} \left(\frac{10^1}{9} \right) = 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{30} = \frac{37}{30}.$$

c) Il minore tra i numeri di tre cifre tutte uguali è 111.
Si ha:

$$111 = 37 \cdot 3$$

111 è perciò divisibile per 37.

Gli altri numeri con tre cifre tutte uguali sono: 222, 333, ..., 999, che risultano tutti multipli di 111:

$$222 = 111 \cdot 2$$

$$333 = 111 \cdot 3$$

...

$$999 = 111 \cdot 9.$$

Quindi, poiché 111 è divisibile per 37, sono divisibili per 37 anche questi suoi multipli.

L'enunciato risulta quindi vero.

Commento

1. Il problema è di geometria solida, semplice sia nella costruzione che nel calcolo. Implica la conoscenza delle formule per la determinazione di superficie e volume, il teorema di Pitagora (o di Euclide), la capacità di impostare una equazione, con opportuna scelta dell'incognita.

Rispetto alla risoluzione proposta, i calcoli sarebbero stati assai più laboriosi se la relazione $\frac{S_{\text{lat } V''}}{S_{\text{lat } V'}} = \frac{3}{4}$ fosse stata utilizzata non come condizione preliminare per determinare $\overline{V''B} = \frac{3}{4} \overline{VB}$, ma come equazione risolvente, ponendo come incognita x la misura del raggio $\overline{HB}$ della base comune ai due coni. In tal caso si sarebbe ottenuta la seguente equazione risolvente:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi \cdot x \cdot \sqrt{5(2,5 - \sqrt{6,25 - x^2})}}{2} &= \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi \cdot x \cdot \sqrt{5(\sqrt{6,25 - x^2} + 2,5)}}{2} \end{aligned}$$

con soluzione: $x = 2,4$.

Elementare l'ultima richiesta, sul calcolo del peso totale del solido. Sarebbe stato tuttavia utile specificare l'unità di misura del peso specifico: $p_s = 0,82 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

2. a) La consegna risulta imprecisa, in quanto non viene spe-

cificato a quale insieme numerico appartengono a e b . È probabile che debba intendersi:

$$a, b \in \mathbb{N},$$

ma questo non va affatto sottinteso!

b) Basta una semplice divisione (118:99) per accorgersi che la questione proposta è falsa.

Non è richiesta la determinazione della frazione generatrice corretta, il cui calcolo (volendo evitare di utilizzare e giustificare la consueta regola) risulta impegnativo, perché richiede la conoscenza delle progressioni geometriche.

c) Il quesito è «esageratamente» semplice, perché, anche senza nessun ragionamento, può essere risolto con un numero finito di verifiche, dividendo i nove numeri con 3 cifre tutte uguali per 37 e controllando che tali divisioni risultino esatte.

Corso sperimentale P.N.I.

Il candidato risolva le seguenti questioni:

1. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, si ha: $\overline{AB} = 2\overline{AC}$, $\overline{BC} = a$, essendo a una lunghezza nota.

a) Stabilire se la bisettrice AD e la mediana CE del triangolo sono perpendicolari o no e darne esauriente spiegazione.

b) Dopo aver riferito il piano del triangolo ABC ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare le coordinate dei punti A, B, C e del punto in cui si secano le rette AD e CE.

c) Preso un punto F sulla retta condotta per E perpendicolarmente al piano del triangolo ABC in modo che sia $\overline{EF} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$, calcolare la distanza del punto A dal piano BCF.

d) Dell'angolo formato dai due piani BCF e ABC calcolare l'ampiezza espressa in gradi sessagesimali e approssimata a meno di un grado.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri o falsi motivando esaurientemente ogni risposta:

a) Posto che a sia un numero reale qualsiasi, risulta:

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1} = a + 1.$$

b) Risulta: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = 0$.

c) Si considera l'esperimento del lancio di una moneta «Testa-Croce» con le due facce che hanno le stesse possibilità di uscita. La probabilità che in 4 lanci esca «Testa» al più due volte è minore di quella che esca «Testa» almeno due volte.

Questione 1

Posto $\overline{AC} = x$ e $\overline{AB} = 2x$, e utilizzando il teorema di Pitagora come equazione risolvibile, si ottiene:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \quad x^2 + 4x^2 = a^2 \quad x = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Quindi i lati del triangolo misurano:

$$\overline{AC} = \frac{a}{\sqrt{5}}; \quad \overline{AB} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; \quad \overline{BC} = a.$$

a) Tracciata la mediana $\overline{CE}$ relativa ad $\overline{AB}$, il triangolo ACE risulta rettangolo isoscele: infatti $\overline{AC} = \overline{AE} = \frac{a}{\sqrt{5}}$ (v. fig. 2),

perciò la bisettrice AD dell'angolo retto $\hat{A}$ risulta anche mediana ed altezza relativamente a CE: in particolare $AD \perp CE$.

b) È opportuno scegliere un sistema di assi cartesiani che abbia l'origine nel punto A, vertice dell'angolo retto, l'asse x sul cateto AC e l'asse y sul cateto AB (v. fig. 3).

Perciò $A = (0;0)$

$$B = (0; \frac{2a}{\sqrt{5}})$$

$$C = (\frac{a}{\sqrt{5}}; 0)$$

equazione retta AD : $y = x$

equazione retta CE :

$$y = -x + \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Il punto H, intersezione delle rette AD e CE, ha per coordinate la soluzione del sistema:

$$H: \begin{cases} y = x \\ y = -x + \frac{a}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$H = \left(\frac{a}{2\sqrt{5}}; \frac{a}{2\sqrt{5}} \right).$$

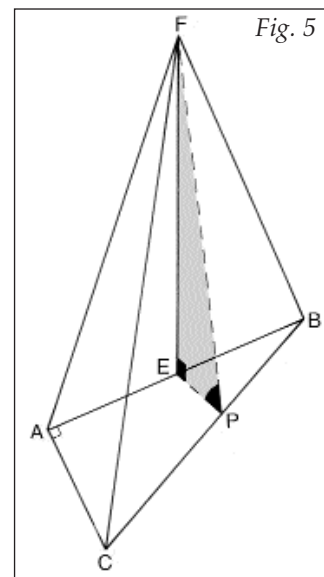
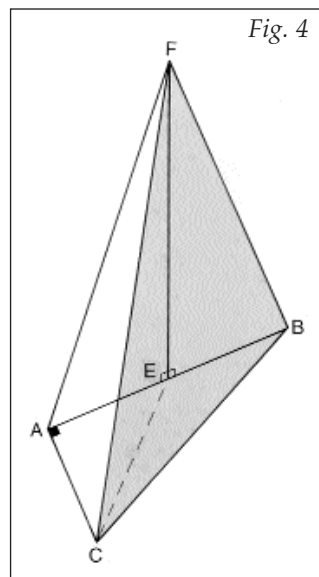
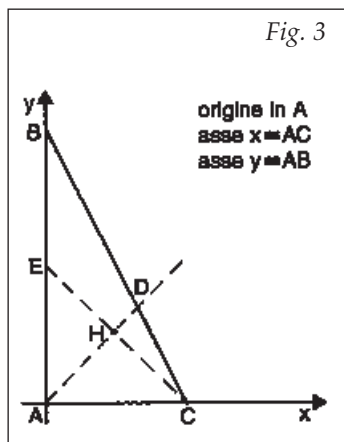
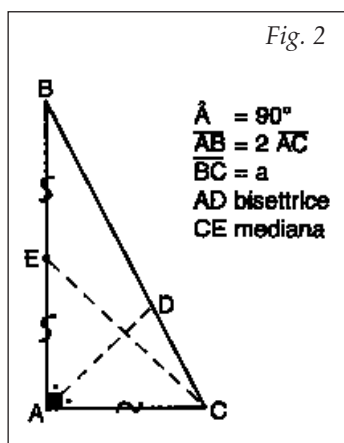
c) La distanza $\overline{AK}$ del punto A dal piano BCF è l'altezza della piramide di vertici ABCF, relativamente alla base BCF (v. fig. 4), perciò tale distanza $\overline{AK}$ può essere calcolata utilizzando la formula inversa del volume della piramide:

$$\overline{AK} = \frac{3 V_{\text{piramide}}}{\mathcal{A}_{\text{BCF}}}.$$

Il volume V della piramide, considerando come base il triangolo ABC e come altezza $\overline{EF}$, vale:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \right) \cdot \overline{EF} = \frac{4}{15\sqrt{5}} a^3.$$

L'area della base BCF può essere calcolata utilizzando il teorema di Erone, dopo aver calcolato le misure dei lati $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$.



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo BEF si ottiene:

$$\overline{BF} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{4a}{\sqrt{5}} \right)^2} = \sqrt{\frac{17}{5}} a.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo CEF si ottiene:

$$\overline{CF} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{4a}{\sqrt{5}} \right)^2} = \sqrt{\frac{18}{5}} a.$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{BCF}} &= \sqrt{p(p - \overline{BC})(p - \overline{BF})(p - \overline{CF})} = \\ &= \sqrt{\frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{17}{5}} + \sqrt{\frac{18}{5}} \right) \cdot \frac{a}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{17}{5}} + \sqrt{\frac{18}{5}} \right) \cdot \frac{a}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{17}{5}} + \sqrt{\frac{18}{5}} \right) \cdot \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{17}{5}} - \sqrt{\frac{18}{5}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{a^4}{16} \left[\left(\sqrt{\frac{17}{5}} + \sqrt{\frac{18}{5}} \right)^2 - 1 \right] \cdot \left[1 - \left(\sqrt{\frac{17}{5}} - \sqrt{\frac{18}{5}} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\mathcal{A}_{\text{BCF}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{18}{5} = \frac{9}{10} a^2.$$

$$\text{Quindi: } \overline{AK} = \frac{3V}{\mathcal{A}} = \frac{3 \cdot \frac{4}{15\sqrt{5}} a^3}{\frac{9}{10} a^2} = \frac{8}{45} \sqrt{5} a.$$

d) L'angolo diedro tra i due piani BCF e ABC è l'angolo $\hat{FPE}$, con $FP \perp BC$, $PE \perp BC$ (v. fig. 5).

L'angolo $\hat{FPE}$ si ottiene calcolando il valore di una sua funzione goniometrica, ad esempio:

$$\text{tg } \hat{FPE} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EP}}.$$

Si ha:

$$\text{sen } \hat{ABC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

perciò:

$$\overline{EP} = \overline{BE} \cdot \text{sen } \hat{ABC} = \frac{a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a}{5};$$

quindi:

$$\text{tg } \hat{FPE} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EP}} = \frac{\frac{4a}{\sqrt{5}}}{\frac{a}{5}} = 4\sqrt{5},$$

da cui: $\hat{FPE} = \text{tg}^{-1}(4\sqrt{5}) = 83,6206 \approx 84^\circ$.

Questione 2

a) Per a numero reale qualsiasi, la relazione:

$\sqrt{a^2 + 2a + 1} = a + 1$ è falsa.

Infatti:

$\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a + 1)^2} =$

$= |a + 1| \begin{cases} = a + 1 & \text{per } a \geq -1 \\ = -a - 1 & \text{per } a < -1 \end{cases}$

Ad esempio:

per $a = 7$ l'espressione $\sqrt{(a + 1)^2} = a + 1$ diventa $7 + 1 = 8$;

per $a = -7$ l'espressione $\sqrt{(a + 1)^2} = -a - 1$ diventa $-(-7) - 1 = 7 - 1 = 6$.

b) Per calcolare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$

è necessario calcolare la somma della progressione aritmetica $1 + 2 + 3 + \dots + n$, con $n \rightarrow \infty$.

Tale somma vale: $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$.

Perciò:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n + 1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Perciò l'enunciato è falso.

c) I possibili risultati «Testa-Croce» ottenibili lanciando quattro volte una moneta possono essere visualizzati attraverso un grafo ad albero (v. fig. 6) o attraverso una tabella (v. fig. 7).

Si ottengono $2^4 = 16$ diverse combinazioni.

Le possibilità che in 4 lanci esca «Testa» al più 2 volte sono:

- esca testa 0 volte = 1
- esca testa 1 volta = 4
- esca testa 2 volte = 6

in totale 11 volte.

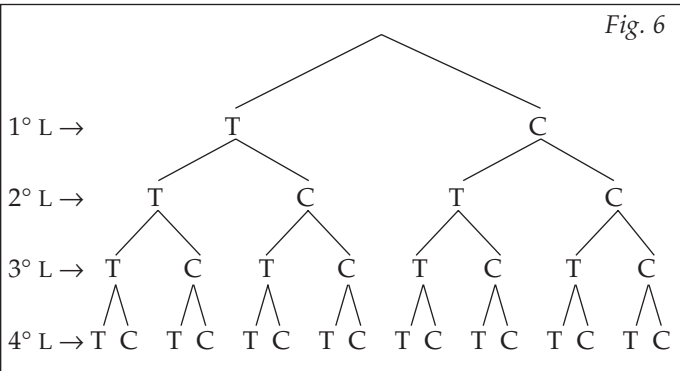


Fig. 6

Le possibilità che in 4 lanci esca «Testa» almeno 2 volte sono:

- esca testa 2 volte = 6
- esca testa 3 volte = 4
- esca testa 4 volte = 1

in totale 11 volte.

I due eventi hanno la stessa probabilità, pari a $\frac{11}{16}$, di verificarsi.

L'enunciato risulta perciò falso.

Fig. 7

1° L	2° L	3° L	4° L
T	T	T	T
T	T	T	C
T	T	C	T
T	T	C	C
T	C	T	T
T	C	T	C
T	C	C	T
T	C	C	C
C	T	T	T
C	T	T	C
C	T	C	T
C	T	C	C
C	C	T	T
C	C	T	C
C	C	C	T
C	C	C	C

Commento

1. Il problema è decisamente impegnativo perché richiede conoscenze in ambiti diversi:

a) la geometria euclidea, per dimostrare la perpendicolarità tra AD e CE;

b) la geometria analitica, con la scelta di un opportuno sistema di riferimento cartesiano, e la «ricollocazione» della questione da un ambito geometrico ad un nuovo ambito algebrico;

c) la geometria solida, con la capacità di vedere spazialmente un solido non regolare (una piramide), di cui la distanza richiesta rappresenta l'altezza relativa alla faccia BCF, altezza che viene determinata attraverso la formula inversa del volume. Tale questione non è affatto di semplice risoluzione, sia concettualmente che nel calcolo, assai laborioso;

d) la trigonometria, per determinare l'ampiezza dell'angolo diedro, determinato dai piani ABC e BCF.

2. a) Il quesito, di semplice risoluzione, implica la conoscenza che ogni radice quadrata venga interpretata in senso aritmetico. La falsità del risultato può essere anche verificata in modo diretto, sostituendo alla variabile reale a almeno un valore positivo e un valore negativo, e calcolando il risultato della radice, che sarà diverso da quello proposto.

b) Il limite della successione si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e il suo calcolo richiede la determinazione della somma di tutti i numeri naturali da 1 a $+\infty$, cioè:

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2 + 3 + \dots + n),$

cioè la somma di una progressione aritmetica di ragione $d = 1$, che vale $\frac{n(n + 1)}{2}$.

Dal confronto tra il grado di infinito del numeratore e del denominatore, che sono uguali, si deduce il risultato.

c) Si tratta di un semplice calcolo delle probabilità, che può essere effettuato calcolando tutte le combinazioni possibili ottenute dal lancio, ripetuto 4 volte, di una moneta T/C.

Tali combinazioni vengono individuate o attraverso una tabella o un grafo ad albero, che permettono direttamente il conteggio dei casi favorevoli.

Confrontando i due temi di matematica, per l'indirizzo tradizionale e per l'indirizzo sperimentale, si notano tra di essi sostanziali differenze, sia nel tipo di richieste che nel grado di complessità: semplici, quasi elementari, nel primo, articolate e che necessitano di approfondite competenze in ambiti diversi, nel secondo.

Nerina Rumi - Liceo Scientifico «G. Galilei»,
Palazzolo S/O (BS)