

Matematica Liceo Scientifico

Mario Marchi

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$[1] \quad \int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x) dx = -5.$$

a) Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^1 f(2x) dx,$$

dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

b) Posto:

$$f(x) = ax^3 + bx + c,$$

dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1].

c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.

d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata -4 .

e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

2. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a .

a) Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.

b) Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.

c) Condotto il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che α secchi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.

d) Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x = \frac{a}{2}$.

3. Il candidato dimostri i seguenti enunciati:

a) Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

b) Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (**fattoriale di n**) e il suo legame con i suoi coefficienti binomiali.

Risoluzione

Problema 1

a) Per calcolare gli integrali proposti è necessario effettuare un cambiamento di variabili che permetta di utilizzare le relazioni espresse dalle formule [1], qualora ciò risulti possibile.

Con la sostituzione $x = 2t$, che implica $dx = 2dt$, si ottiene:

$$\int f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int 2f(t) dt.$$

Tenuto poi conto che per $x = 0$ si ha $t = 0$, per $x = 1$ si ha

$t = \frac{1}{2}$, per $x = 2$ si ha $t = 1$ e per $x = 4$ si ha $t = 2$, i primi tre integrali proposti diventano:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{1/2} 2f(t) dt = 2 \int_0^{1/2} f(t) dt,$$

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 2f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt,$$

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_1^2 2f(t) dt = 2 \int_1^2 f(t) dt - 2 \int_0^1 f(t) dt.$$

Discende di qui che il primo integrale proposto non è calcolabile in base alle relazioni [1] assegnate. Per quanto riguarda il secondo e il terzo integrale proposto, indicando nuovamente con x la variabile indipendente e tenendo conto delle [1] si ha:

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 4,$$

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \left(\int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right) = -14.$$

In modo analogo si può procedere anche per il quarto integrale proposto. Effettuata la sostituzione $2x = t$, che implica $2 dx = dt$ e fa corrispondere $t = 2$ al valore $x = 1$, ricordando le [1] si ottiene:

$$\int_0^1 f(2x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} f(t) dt = -\frac{5}{2}.$$

b) Posto

[2] $f(x) = ax^3 + bx + c$

si ha $\int f(x) dx = \frac{1}{4} ax^4 + \frac{1}{2} bx^2 + cx + d$

da cui, ricordando le [1]:

$$2 = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} b + c,$$

$$-5 = \int_0^2 f(x) dx = 4a + 2b + 2c.$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 8 \\ 4a + 2b + 2c = -5. \end{cases}$$

Esplicitando, per esempio rispetto al parametro c , si ottiene la famiglia di curve di equazione

[3] $y = \frac{2c - 13}{3} x^3 + \frac{37 - 14c}{6} x + c,$

essendo $2c - 13 \neq 0$.

c) Per determinare gli eventuali punti di flesso delle curve della famiglia [2] si calcoli

[4] $f'(x) = 3ax^2 + b, f''(x) = 6ax, f'''(x) = 6a.$

Poiché per ipotesi $a \neq 0$, ogni curva della famiglia [2] ha un unico punto di flesso per $x = 0$, cioè nel punto F di coordinate $(0, c)$.

Si consideri ora la simmetria centrale di equazioni

$$\begin{cases} \bar{x} = -x \\ \bar{y} = -y + 2c \end{cases}$$

avente il punto F come punto unito.

Tale simmetria trasforma ogni curva della famiglia [2], avente equazione $y = f(x)$, nella curva

$$f(\bar{x}) = -ax^3 - bx + c = -f(x) + 2c = -y + 2c = \bar{y}$$

che è ancora la curva stessa scritta nella forma $\bar{y} = f(\bar{x})$. Si è così dimostrato che F è centro di simmetria.

d) Ricordando quanto visto discutendo il quesito (c) si conclude che la curva di equazione [3], avente il flesso nel punto di coordinate $(0, -4)$, si ottiene in corrispondenza al valore del parametro $c = -4$.

e) Dalle [4] si ha

$$f'(x) = 0 \text{ se e solo se } 3ax^2 + b = 0 \text{ cioè } x^2 = -\frac{b}{3a}.$$

Le curve che presentano punti estremanti (per $x \neq 0$) sono dunque quelle per cui è $-\frac{b}{3a} > 0$ cioè $b < 0$ e $3a > 0$ oppure $b > 0$ e $3a < 0$.

Ricordando la [3], poiché $a = \frac{2c - 13}{3}$ e $b = \frac{37 - 14c}{6}$, si conclude che vi sono punti estremanti per

$$c > \frac{13}{2} \text{ oppure } c < \frac{37}{14};$$

al contrario non si hanno punti estremanti per $\frac{37}{14} \leq c < \frac{13}{2}$.

Problema 2

a) Dette a, b le lunghezze dei lati rispettivamente maggiore AB e minore BC del rettangolo, la condizione di similitudine imposta si traduce nella relazione

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$$

il che implica $b = a \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Detti rispettivamente H ed M i punti medi dei lati AD e BC del rettangolo e detto γ l'angolo $\widehat{H\hat{M}V}$ si ha così $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{13}}$ e quindi $\tan \gamma = \frac{3}{2}$ (v. fig. 1).

Indicata con $\overline{VH}$ la lunghezza del segmento VH nel triangolo rettangolo VHM si ottiene

$$\overline{VH} = a \tan \gamma = \frac{3}{2} a.$$

Poiché $\overline{VH}$ è l'altezza della piramide di vertice V e base $ABCD$, il volume V di tale piramide risulta:

$$V = \frac{1}{3} (a b) \cdot \overline{VH} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

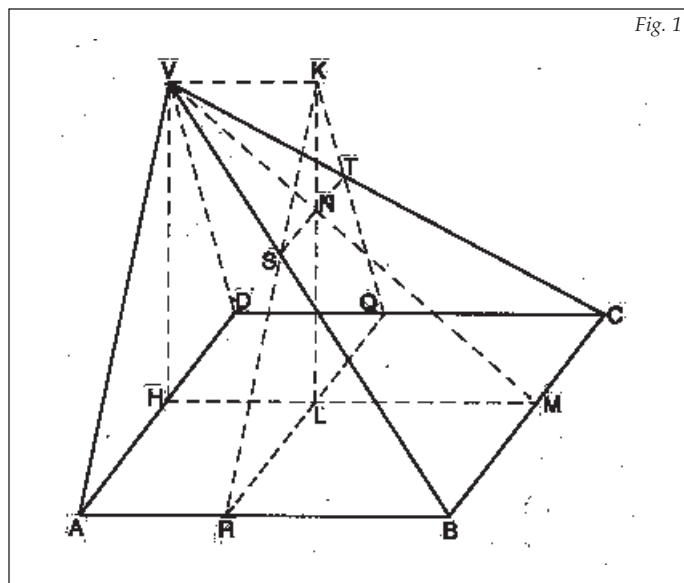


Fig. 1

c) Indicato con R un punto variabile sul segmento AB , il piano α richiesto è il piano passante per R e parallelo al piano VAD . Siano quindi S, T, Q i punti intersezione di α con i segmenti rispettivamente VB, VC, CD ; si richiede di calcolare l'area del quadrilatero $RSTQ$ al variare della lunghezza $\overline{AR}$ (che indicheremo con x) del segmento AR . Dal parallelismo dei piani α e VAD discende il parallelismo tra le rette: $VA//SR, VD//TQ, ST//RQ$ e quindi, essendo $\overline{VA} = \overline{VD}$, il quadrilatero $RSTQ$ è un trapezio isoscele. Detti L, N rispettivamente i punti medi delle basi maggiore e minore del trapezio (cioè dei segmenti RQ ed ST), ne discende che $NL//VH$ e $\overline{NL}$ è l'altezza del trapezio stesso.

Nel triangolo rettangolo VHM si ha dunque

$$\overline{NL} = \overline{LM} \operatorname{tg} \gamma = (\overline{HM} - \overline{HL}) \operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2} (a - x),$$

e inoltre
$$\frac{\overline{VM}}{\overline{VN}} = \frac{\overline{HM}}{\overline{HL}} = \frac{a}{x}.$$

Nel triangolo VBC si ha:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{VM}}{\overline{VN}} \text{ cioè } \overline{ST} = \frac{b \cdot x}{a}.$$

L'area A del trapezio $RSTQ$ risulta dunque:

$$A = \frac{1}{2} (\overline{RQ} + \overline{ST}) \cdot \overline{NL} = \frac{1}{2} \left(b + \frac{bx}{a} \right) \cdot \frac{3}{2} (a - x) = \frac{3}{8} (a^2 - x^2) \sqrt{2}.$$

d) Il piano α divide la piramide $VABCD$ nei due solidi:

$$S = VARSTQD \quad \text{e} \quad T = SRBCQT.$$

Il volume V_o di S si può ottenere come somma dei volumi, che indicheremo rispettivamente V_1 e V_2 , delle due piramidi $P_1 = VARQD$ e $P_2 = VRSTQ$.

Per la piramide P_1 di vertice V , base $ARQD$ e altezza $\overline{VH}$, ricordando la condizione $x = a/2$ si ha:

$$V_1 = \frac{1}{3} (\overline{AR} \cdot \overline{AD}) \cdot \overline{VH} = \frac{a^3}{8} \sqrt{2}.$$

Nella piramide P_2 di vertice V e base $RSTQ$, l'altezza è data dal segmento VK , essendo K il piede della perpendicolare condotta da V al piano α . La condizione di parallelismo dei piani α e VAD implica

$$\overline{VK} = \overline{HL} = \overline{AR} = x = a/2;$$

l'area A del trapezio $RSTQ$ è già stata calcolata nel precedente punto (c), pertanto si ha:

$$V_2 = \frac{1}{3} A \cdot \overline{VK} = \frac{3}{64} a^3 \sqrt{2}.$$

In conclusione si ottiene

$$V_o = V_1 + V_2 = \frac{11}{64} a^3 \sqrt{2}.$$

Per quanto riguarda il volume V_3 del solido T si ha:

$$V_o + V_3 = V$$

e quindi

$$V_3 = \frac{5}{64} a^3 \sqrt{2}.$$

Problema 3

a) La dimostrazione di questo enunciato si ottiene immediatamente mediante facili considerazioni di geometria elementare. Basta infatti ricordare che tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa assegnata AB si possono inscrivere (a meno di una isometria) in una semicirconferenza C di diametro AB . Considerando per ciascuno di questi triangoli l'ipotenusa come base, avente lunghezza costante, ne consegue che il triangolo (o i triangoli!) di area massima corrisponde (o corrispondono) al valore massimo dell'altezza relativa all'ipotenusa. Tale valore massimo è uguale alla lunghezza r del raggio di C e si ottiene, come è evidente, in corrispondenza al triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa AB .

b) Indichiamo con Σ la sfera assegnata, O il suo centro, α il piano di base di un cono Γ circoscritto a Σ e V il vertice di tale cono. Detto M il punto di contatto di α con Σ , poiché il cono Γ è retto, la retta VM passerà per O e risulterà perpendicolare ad α . Indichiamo ancora con C la circonferenza di base del cono circolare Γ : avremo che C giace su α avendo il punto M come centro (v. fig. 2).

Detto A un punto generico di C , l'area laterale A di Γ risulta:

$$A = \frac{1}{2} (2 \pi \overline{AM}) \cdot \overline{AV}.$$

Tenendo conto della richiesta del problema, indichiamo con x la distanza di V da Σ cioè, se N è il punto di intersezione (diverso da M) della retta VM con Σ , poniamo $x = \overline{VN}$.

Per calcolare $\overline{AV}$ e $\overline{AM}$ in funzione di x , detto H il punto di contatto della retta VA con Σ , si può osservare che i triangoli OHV e AMV sono simili e quindi si ha:

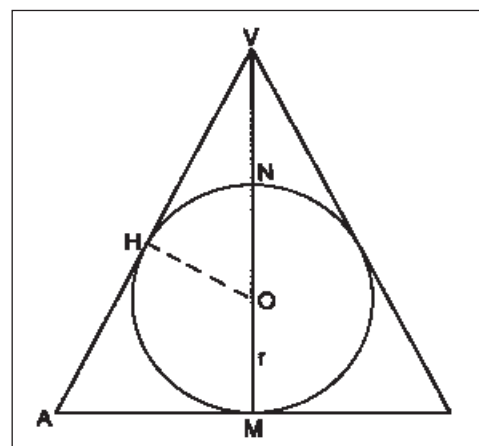


Fig. 2

$$\overline{OV} : \overline{HV} = \overline{AV} : \overline{MV} \quad , \quad \overline{OV} : \overline{OH} = \overline{AV} : \overline{AM}.$$

Indicato con $r = \overline{OH}$ il raggio di Σ , si ha quindi:

$$\begin{aligned} A &= \pi \overline{AM} \cdot \overline{AV} = \pi \frac{\overline{OH}}{\overline{OV}} \overline{AV}^2 = \pi \frac{\overline{OH} \cdot \overline{OV}}{\overline{HV}^2} \overline{MV}^2 = \\ &= \frac{r\pi}{x} (r+x)(2r+x). \end{aligned}$$

L'area A è dunque una funzione della lunghezza x del segmento VN : indichiamo con $f(x)$ tale funzione e cerchiamo gli eventuali punti di minimo, limitandoci al campo di variabilità $x > 0$ (a causa del particolare significato geometrico di x). Si ha quindi:

$$f'(x) = r\pi \left(1 - \frac{2r^2}{x^2}\right) \quad , \quad f''(x) = \frac{4r^3\pi}{x^3},$$

da cui

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \pm r\sqrt{2}.$$

Tenendo conto delle limitazioni imposte alla variabile x si ha allora:

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = r\sqrt{2}$$

e dunque

$$f''(r\sqrt{2}) > 0.$$

In conclusione per $x = r\sqrt{2}$ l'area A assume un valore minimo e questo è ciò che si voleva dimostrare.

c) È ben noto che, per ogni numero intero $n > 0$ per definizione è

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Si pone inoltre, pure per definizione,

$$0! = 1.$$

È pure noto che $n!$ è il numero dei diversi *allineamenti* (permutazioni) di n oggetti distinti.

Per ogni intero k (con $0 \leq k \leq n$) si chiama *coefficiente binomiale*, e si indica col simbolo $\binom{n}{k}$, il numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ indica il numero delle *combinazioni* di n oggetti distinti presi a k a k , cioè il numero delle diverse *collezioni* di k oggetti scelti tra n oggetti distinti assegnati.

Commento

Il Tema di esame che abbiamo appena studiato presenta l'amaro sapore di una occasione perduta.

In effetti una prima lettura, rapida e superficiale, dei quesiti proposti poteva far pensare di trovarsi davanti un Tema nuovo, che richiedeva per la sua soluzione essenzialmente intelligenza e capacità critica di riflessione.

Autorizzava queste speranze la lettura del quesito (a) del 1° e del 3° problema, nonché la presenza di un problema di geometria dello spazio (2° problema) che poteva apparire agile e stimolante.

C'è un vecchio aforisma, paradossale ma profondo, che definisce la matematica (e in particolare la geometria, vorrei dire) come «l'arte di *non fare i conti*».

Quello che si vuol dire con questa affermazione è che lo studioso, il quale affronta un qualsiasi problema utilizzando lo strumento matematico, deve usare tale strumento per ottenere i risultati cercati come conseguenza, caso particolare, applicazione, di qualche teoria generale nella quale il problema proposto può inquadrarsi. Se al contrario la risoluzione del problema posto richiede di «perdersi» in argomentazioni, calcoli, operazioni formali ripetitive, lunghe, concettualmente insignificanti ma operativamente tortuose, si deve riconoscere che non si sta facendo veramente matematica.

Può darsi che questo «perdersi» sia conseguenza del fatto che non si è stati capaci di inserire il problema affrontato in un contesto teorico matematico adeguato, però può anche darsi che il problema stesso richieda per sua natura l'applicazione meccanica e a-critica di procedure formali prefabbricate e ripetitive.

In fondo questo semplice aforisma ci dice che la matematica, quella vera, sarà sempre distinta e diversa dalle procedure informatiche che cercano invece sempre più di accreditarsi come sostitutive del pensiero matematico. Le procedure informatiche infatti non sono altro che un modo (a volte anche molto sofisticato) per «fare i conti»; il pensiero matematico è, invece, esattamente il contrario: *un modo di pensare*.

In conclusione, se la scuola liceale vuol essere formativa di una capacità di pensiero, la verifica delle abilità matematiche si dovrà fare valutando nei giovani la loro capacità di riflettere e muoversi criticamente nell'ambito del pensiero matematico e non limitandosi a controllare la eventuale esistenza di un qualche addestramento operativo di tipo ripetitivo.

Come abbiamo detto, alcuni quesiti del Tema d'esame proposto sembravano muoversi nella direzione auspicata.

Il quesito (a) del 1° problema richiede, per una corretta risposta, che il candidato sia concettualmente padrone della fondamentale nozione di integrale definito. Nota che sia questa nozione, la risoluzione del quesito (a) è immediata e richiede solo pochi e banali calcoli numerici.

Analogamente, nel caso del quesito (a) del 3° problema, per chi possieda una certa dimestichezza con le immagini mentali della geometria risulta facile intuire una traccia di soluzione che non richieda alcun tipo di computazione.

Purtroppo, poi, per i rimanenti quesiti l'Estensore del Tema sembra non aver voluto rimanere all'altezza del livello di qualità già raggiunto. Ci si trova così in presenza di quesiti inutilmente ripetitivi o che richiedono noiosi e laboriosi calcoli numerici.

È questo il caso ad esempio del quesito (b) del 1° problema, in cui i valori richiesti dei parametri a , b , c hanno espressioni

inutilmente contorte. Non si capisce perché invece non siano stati scelti i dati numerici iniziali, in modo da avere per tali parametri espressioni semplici e rassicuranti.

Una critica analoga si può fare al problema 2° nel suo complesso. Non si capisce, per esempio in questo caso, quali informazioni sulla maturità intellettuale dei candidati si possano ottenere chiedendo loro di calcolare il volume di *tre* distinte piramidi. Se un candidato è in grado di calcolare il volume di *una* piramide, è probabile che saprà poi ripetere il procedimento quante altre volte si vuole!

Per concludere è naturale chiedersi se sia possibile formulare indicazioni utili per preparare gli studenti in modo sempre più adeguato all'Esame di Stato del prossimo anno. A questa ragionevole e doverosa domanda non si può però dare, in questo momento, una risposta sicura in quanto il Ministero sta attualmente predisponendo modifiche alla struttura della prova scritta dell'Esame di Stato.

La nuova prova scritta di matematica dell'anno scolastico 2000-2001 sarà costituita da due *problemi* (articolati al loro interno in almeno tre quesiti, possibilmente indipendenti tra loro) e da un *questionario* contenente altri quesiti (da un minimo di 6 a un massimo di 10) riguardanti argomenti del programma. Il candidato sarà tenuto a risolvere uno dei due problemi proposti a scelta e circa la metà dei quesiti del questionario. L'intenzione del Ministero è che «la tipologia delle questioni poste sia tale da offrire ai candidati le più ampie opportunità di esprimere conoscenze, competenze e capacità acquisite

nel corso degli studi». Inoltre è sempre intenzione del Ministero che «l'articolazione delle questioni sia ispirata al criterio di una complessità graduale e a quello della non necessaria interdipendenza tra loro».

Enunciati tutti questi buoni propositi, il Ministero della Pubblica Istruzione sta presentando, nel proprio sito internet, diversi esempi di traccia di prove d'esame redatti secondo le caratteristiche del nuovo modello.

Esamineremo prossimamente, su questa Rivista, gli esempi che il Ministero ci propone, cercando di riconoscere le possibili indicazioni che da essi provengono.

Non possiamo comunque chiudere queste riflessioni, senza ribadire con forza la nostra opinione e cioè che le scelte culturali e l'impegno per una formazione del pensiero sono, in questi tempi, solamente decisioni personali del singolo Insegnante, frutto di un patto educativo che lui solo come persona, e nessun altro, stringe con gli allievi che lo vogliono seguire.

Mario Marchi - Università Cattolica, Brescia

MATEMATICA: ESAME DI STATO A.S. 2000-2001

La nuova struttura della prova scritta di matematica

Questo è il testo – pubblicato sul sito del Ministero della Pubblica Istruzione – che propone modifiche alla prova scritta di Matematica a partire dall'anno scolastico 2000-2001. Ad esempi e commenti su questo argomento verrà dato ampio spazio sui prossimi numeri della rivista.

La inadeguatezza della struttura tradizionale della prova scritta di matematica all'esame di Stato, da tempo segnalata dai docenti della disciplina e da esperti del mondo accademico e non, ha evidenziato l'esigenza di affrontare la questione e di prospettare la soluzione.

Dopo un lungo dibattito che ha visto la attiva partecipazione di esperti universitari, rappresentanti delle diverse Associazioni scientifiche, di Ispettori tecnici del settore e docenti, si è giunti alla definizione del nuovo modello di prova che viene qui allegato.

Problemi e quesiti, predisposti in stretta coerenza con il piano di studi seguito, saranno impostati e formulati in modo agile e snello, al fine di rendere più agevole la scelta da parte del candidato.

La articolazione delle questioni sarà ispirata al criterio di una complessità graduale e a quello della non necessaria interdipendenza tra loro. Tali requisiti della prova, oltre a favorire il primo approccio del candidato alle questioni proposte, consentiranno alle Commissioni giudicatrici di saggiare lo studente su un più ampio spettro di argomenti e di definire criteri di revisione validi per una valutazione quanto più possibile oggettiva degli elaborati dei candidati. Esempi di

traccia redatti secondo le caratteristiche previste dal nuovo modello, saranno presentati nel sito a brevissima scadenza. Ispettori tecnici ed esperti del settore forniranno risposte collegiali ad eventuali richieste di chiarimenti avanzate da docenti e studenti interessati.

Nulla è innovativo per i corsi di Istituto magistrale in via di esaurimento.

Criteri di formulazione. Corsi di: Ordinamento; Piano Nazionale Informatica; Progetti «Brocca»; «Proteo» indirizzi: scientifico e scientifico-tecnologico.

Finalità. Con riferimento alla matematica studiata nell'intero corso di studi la prova scritta è intesa ad accertare: le conoscenze specifiche; le competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti; le capacità logiche e argomentative.

Struttura della prova. Il testo è costituito da due problemi (articolati al loro interno in almeno tre quesiti, possibilmente indipendenti tra loro) e da un questionario contenente altri quesiti (da un minimo di 6 a un massimo di 10) riguardanti argomenti del programma.

La tipologia delle questioni poste è tale da offrire al candidato le più ampie opportunità di esprimere conoscenze, competenze e capacità acquisite nel corso degli studi.

Il candidato è tenuto a risolvere uno dei due problemi proposti a scelta e circa la metà dei quesiti del questionario.

Durata della prova e materiale consentito. La durata massima della prova è di sei ore.

Nel corso della prova è consentito l'uso di calcolatrici non programmabili.

Matematica

Corso sperimentale - P.N.I.

Alfredo Marzocchi

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:

$$f(x_0) > 0, \quad f'(x_0) > 0, \quad f''(x_0) = 0,$$

dove x_0 è un particolare valore reale.

- Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0 .
- Trovare almeno tre funzioni polinomiali $f(x)$, di grado superiore al 1°, aventi andamenti diversi in $x_0 = 0$, tali che:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0.$$

- Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione $y = x + 1$.
- A completamento del problema dimostrare la formula che esprime la derivata, rispetto ad x , della funzione x^n , dove n è un intero qualsiasi non nullo.

2. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti: A (0, 2), B (1, 1), C (1, 0).

e) Trovare l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB.

f) Determinare le equazioni dell'affinità α che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A.

g) Calcolare l'area del triangolo CAA', dove A' è il punto trasformato di A nell'affinità α .

h) Stabilire se l'affinità α ha altri punti uniti, oltre ad O e C, e trovare le sue rette unite.

i) Stabilire quali, fra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a γ .

3. Assegnata la funzione:

$$f(x) = a \log^2 x + b \log x$$

dove il logaritmo si intende in base e, il candidato:

- Determini per quali valori di a e b la $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto $(\sqrt{e}; -\frac{1}{4})$.
- Disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di a e di b così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x .

Calcoli infine la probabilità che, lanciando un dado cinque volte, esca per tre volte lo stesso numero.

Esempio di risoluzione

Problema 1

Notiamo innanzitutto che le condizioni date implicano che la funzione f sia crescente in x_0 . Non è invece detto, come vedremo più avanti, che f abbia un flesso in x_0 .

A questo punto non risulta ben chiaro dal testo se i valori di $f(x_0)$ e $f'(x_0)$, che sono positivi per definizione, debbano considerarsi assegnati o semplicemente le «condizioni» alle quali si riferisce il testo esprimono il fatto che f è positiva e crescente in x_0 , ma senza specificarne il valore. In questo secondo caso la risposta è banale perché ogni funzione di primo grado del tipo

$$f(x) = mx + q$$

ha andamenti diversi per valori diversi di m . Pertanto supporremo valida la prima ipotesi, che è anche la più plausibile in vista del successivo quesito b), e cioè che andamenti diversi di f vadano ricercati fra quelli che mantengono gli stessi valori (positivi) di $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ (e, ovviamente, la condizione $f''(x_0) = 0$).

a) Supponiamo che f_1 e f_2 siano funzioni definite su uno stesso intorno (arbitrariamente scelto) di x_0 e che soddisfino le condizioni date. Allora la differenza

$$f(x) = f_2(x) - f_1(x)$$

verifica le condizioni

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0.$$

Ne segue che, se f non è identicamente nulla, allora

$$f_1 \text{ e } f_2 (\text{con } f_2 = f_1 + f)$$

sono diverse ma verificano le stesse condizioni date. Pertanto vi possono essere tanti andamenti diversi nell'intorno dato quante sono le funzioni f verificanti le tre uguaglianze scritte sopra. Poiché esistono infinite funzioni diverse (per esempio, le funzioni $f(x) = a(x - x_0)^3$ al variare di $a \neq 0$) che si annullano in x_0 con le loro derivate prima e seconda, se ne deduce che le condizioni date non sono sufficienti a determinare l'andamento della funzione in un intorno di x_0 .

Osserviamo che la domanda chiede comunque di spiegare *perché* ciò avviene. Una prima risposta è che se si considerano, ad esempio, funzioni polinomiali del tipo

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

si devono specificare $n + 1$ condizioni (che possono essere i valori della funzione e delle sue derivate fino all'ordine n in x_0) per definire l'andamento di P_n in punti diversi da x_0 . Dunque, se n è superiore a due, non sarà possibile stabilire tutti i coefficienti della funzione, e dunque il suo andamento.

Naturalmente tutto ciò prelude alla dimostrazione della formula di Taylor, che permette inoltre di non limitarsi a funzioni polinomiali. Più precisamente, per una funzione derivabile due volte in x_0 vale lo sviluppo di Taylor col resto di Peano

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + R_3(x; x_0)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_3(x; x_0)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Pertanto, volendo fissare i valori di $f(x_0)$, $f'(x_0)$ e $f''(x_0)$, si hanno tanti andamenti diversi quante sono le funzioni infinitesime in x_0 di ordine superiore a due.

b) Per quanto visto nel precedente punto a), le prime due condizioni dicono che funzioni del tipo

$$g(x) = 1 + x + f(x) \quad (1)$$

con

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$$

risolvono il problema. Per avere un esempio, quindi, basta scegliere opportunamente la funzione f . Una possibilità è

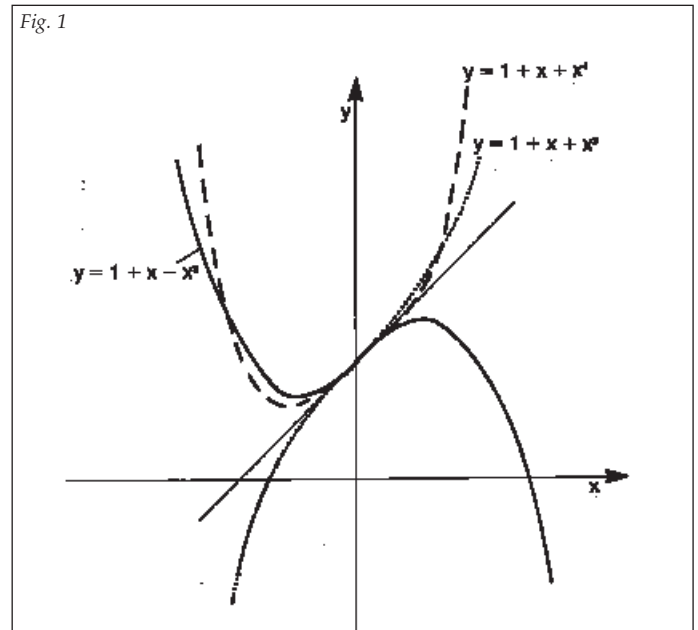
$$f_1(x) = 1 + x + x^3, \quad f_2(x) = 1 + x - x^3, \quad f_3(x) = 1 + x + x^4.$$

I grafici delle tre funzioni sono riportati nella figura 1. Osserviamo che f_3 , pur avendo la derivata seconda nulla in $x_0 = 0$, non ammette in questo punto un punto di flesso (ossia di cambio di concavità). Infatti

$$f_3''(x) = 12x^2 \geq 0.$$

Osserviamo infine che non vi possono essere funzioni del tipo richiesto di secondo grado, in quanto la derivata seconda di tali funzioni è costante e non nulla.

Fig. 1



c) Si tratta, se possibile, di trovare le soluzioni delle equazioni

$$f_1'(x) = 1, \quad f_2'(x) = 1, \quad f_3'(x) = 1.$$

La prima e la seconda sono

$$3x^2 + 1 = 1 \quad 1 - 3x^2 = 1$$

e ammettono la sola soluzione $x = 0$, che corrisponde alla retta tangente data $y = x + 1$. La terza è invece

$$4x^3 + 1 = 1$$

che pure ammette la sola soluzione $x = 0$.

A questo punto ci si può chiedere se esistano funzioni che ammettono tangenti parallele alla retta data diverse da $y = x + 1$. Ciò è possibile, ma a patto di aumentare il grado della funzione polinomiale. Infatti le condizioni $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ implicano che nella (1) f deve avere almeno tre soluzioni nulle coincidenti. Dunque la sua derivata deve avere due soluzioni nulle coincidenti, e per avere altre soluzioni, essa deve essere almeno di terzo grado. Ne segue che la funzione f deve essere almeno di quarto grado con tre soluzioni coincidenti in $x = 0$. Esempi di tali f , per limitarsi ai più semplici, sono

$$f(x) = x^3(x + a) \quad (2)$$

con $a \neq 0$ da determinarsi. Quindi, per esempio,

$$f_1(x) = 1 + x + x^3(x + 1), \quad f_2(x) = 1 + x + x^3(x - 1), \\ f_3(x) = 1 + x + x^3(x - 2)$$

soddisfano a questa ulteriore richiesta, forse più nella direzione dei desideri degli estensori del testo. Risolvendo le tre equazioni

$$1 + x + f_1'(x) = 1, \quad 1 + x + f_2'(x) = 1, \quad 1 + x + f_3'(x) = 1,$$

si trova (oltre alle soluzioni nulle)

$$x_1 = -\frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_3 = -\frac{3}{2}$$

e le corrispondenti tangenti sono

$$y = x + \frac{229}{256} \text{ per le prime due funzioni,}$$

$$y = x - \frac{11}{16} \quad \text{per la terza.}$$

d) La dimostrazione classica, che fa uso della definizione di derivata, si trova in tutti i testi scolastici di Matematica. Proponiamone una versione meno usuale, basata sul principio di induzione. La formula da dimostrare è

$$D [x^n] = n x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Per $n = 1$ si ha, dalla definizione di derivata,

$$D[x] = 1.$$

Supposta valida la formula per $n \geq 1$, abbiamo, dalla formula della derivata del prodotto e dall'ipotesi induttiva,

$$D[x^{n+1}] = D[x^n \cdot x] = x D[x^n] + x^n D[x] = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

e quindi la formula da dimostrare è vera per $n + 1$. Dal principio di induzione si trae che essa è vera per ogni $n \geq 1$. Per quanto riguarda i negativi (infatti il testo parla di interi), dimostriamo ora che

$$D [x^{-n}] = -n x^{-1-n} \quad n \geq 1, x \neq 0.$$

Sempre per definizione di derivata, si ha che la derivata di una costante è zero. Pertanto, per la regola di derivazione del prodotto,

$$\begin{aligned} 0 = D[1] &= D[x^n \cdot x^{-n}] = x^{-n} D[x^n] + x^n D[x^{-n}] = \\ &= nx^{n-1} x^{-n} + x^n D[x^{-n}]. \end{aligned}$$

Da quest'ultima uguaglianza segue

$$x^n D [x^{-n}] = -nx^{-1}$$

che implica quanto si voleva dimostrare.

Problema 2

a) Con riferimento alla *figura 2*, risulta evidente che il centro della circonferenza cercata deve trovarsi sulla retta di equazione

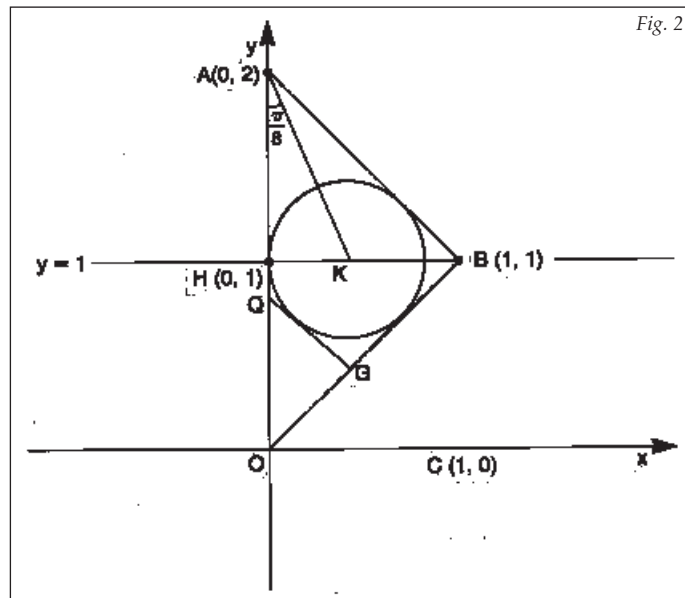


Fig. 2

$y = 1$, essendo questa la bisettrice dell'angolo $\widehat{OBA}$. Per trovare l'equazione di una seconda bisettrice, possiamo procedere con le usuali formule che forniscono le bisettrici di una coppia di rette, oppure seguire una strada più breve osservando che, posto $H(0, 1)$, la bisettrice cercata lo è tanto del triangolo dato quanto del triangolo AHD . Per il teorema della bisettrice dell'angolo interno, essa deve dividere il lato BH in parti proporzionali agli altri due lati, il cui rapporto è $\sqrt{2}$, essendo AOB un triangolo rettangolo isoscele. Ma allora, detto $\overline{HK} = x$, deve essere

$$x + \sqrt{2}x = 1,$$

da cui segue immediatamente, razionalizzando, che le coordinate del centro sono

$$K(\sqrt{2}-1, 1).$$

Dalla figura segue poi che il raggio della circonferenza cercata è x , per cui in definitiva l'equazione richiesta è

$$(x - \sqrt{2} + 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$$

oppure, svolgendo i calcoli,

$$x^2 + y^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x - 2y + 1 = 0.$$

(Naturalmente si sarebbe ulteriormente abbreviato il calcolo sapendo che

$$\overline{HK} = \overline{HA} \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1,$$

ma un tale valore difficilmente si ricorda a memoria).

b) L'equazione generale di un'affinità è

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

e il quesito consiste nel trovare a, b, c, d, e, f in modo che i punti vengano trasformati come indicato nel testo. Innanzitutto, imponendo che O sia unito abbiamo

$$x'_o = e = 0, \quad y'_o = f = 0$$

e dunque l'affinità si semplifica in

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy. \end{cases}$$

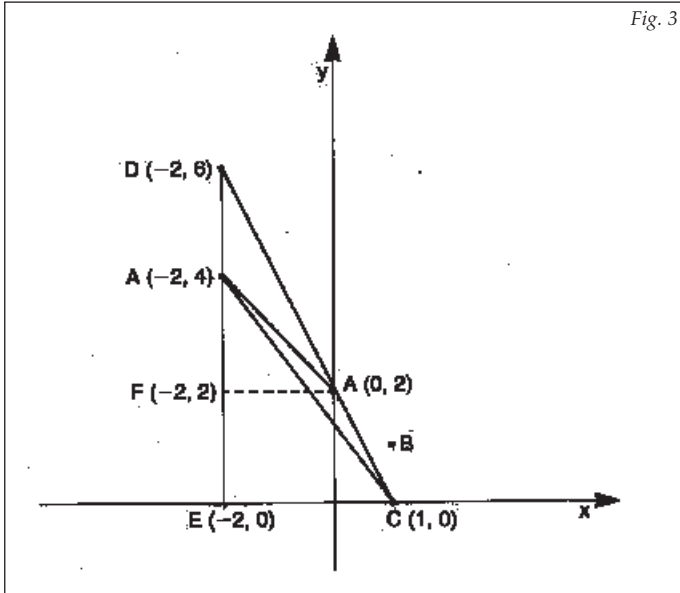


Fig. 3

Procedendo allo stesso modo per C abbiamo

$$x'_c = a = 1, \quad y'_c = c = 0$$

per cui $a = 1, c = 0$ e l'affinità si semplifica ulteriormente in

$$\begin{cases} x' = x + by \\ y' = dy. \end{cases}$$

Infine, il trasformato di B (1, 1) ha coordinate $x' = 1 + b, y' = d$ e, dovendo risultare pari a quelle di A (0, 2), deve essere

$$1 + b = 0, \quad d = 2.$$

L'affinità richiesta è quindi

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2y. \end{cases} \quad (4)$$

c) Abbiamo innanzitutto che A (0, 2) diviene A' (-2, 4), sostituendo le coordinate nella trasformazione α . Introduciamo i punti D (-2, 6), E (-2, 0) e F (-2, 2), e osserviamo che D, A, C sono allineati. Con riferimento alla figura 3, l'area di EDC è pari a $6 \cdot 3/2 = 9$, mentre le aree di EA'C e A'DA sono rispettivamente $4 \cdot 3/2 = 6$ e

$$\frac{A'D \cdot AF}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

Ne segue, per differenza, che l'area richiesta è $9 - 6 - 2 = 1$. In alternativa, naturalmente, si poteva calcolare la distanza $\overline{CA'}$ e la distanza di A dalla retta CA'.

d) Calcoliamo tutti i punti uniti di α ponendo $x' = x, y' = y$ nella (4). Si trova

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

che dice che tutti i punti dell'asse x sono uniti, e che non ve ne sono altri. Da ciò segue immediatamente che l'asse x è anche una retta unita (punto per punto).

Per cercare le rette unite, iniziamo dapprima invertendo l'affinità ricavando, dalla (4), x, y in funzione di x', y' . Si trova subito

$$\begin{cases} x = x' + \frac{y'}{2} \\ y = \frac{y'}{2}. \end{cases}$$

A questo punto sia

$$ax + by + c = 0 \quad (5)$$

l'equazione di una generica retta; l'equazione della trasformata risulta allora

$$a \left(x' + \frac{y'}{2} \right) + b \frac{y'}{2} + c = 0$$

che è equivalente a

$$ax' + \frac{a+b}{2} y' + c = 0. \quad (6)$$

Ora, la retta (5) e la retta (6) coincidono se e solo se

$$a = \frac{a+b}{2}$$

ossia, se e solo se $a = b$. Non potendosi avere il caso $a = b = 0$, possiamo ricavare y e trovare

$$y = -x + q \quad (7)$$

dove $q = -c/a$ è arbitrario. Pertanto tutte le rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante sono unite (in quanto rette).

e) La retta unita $y = 0$ risulta esterna alla circonferenza γ , così come le rette del fascio improprio (7) con $q > 2$, ossia situate sopra AB, e quelle sotto la tangente inferiore alla circonferenza. Per determinare la sua equazione, osserviamo che la distanza fra questa retta e la retta AB è pari a $2(\sqrt{2} - 1)$, e che dunque, con riferimento alla figura 2, $\overline{OG} = \sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$. Per il teorema di Talete risulta allora

$$\overline{OQ} : \overline{OA} = \overline{OG} : \overline{OB}$$

ossia

$$q : 2 = (2 - \sqrt{2}) : \sqrt{2}$$

e quindi

$$q = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

In definitiva, le rette del fascio (7) con $2(\sqrt{2} - 1) < q < 2$ intersecano la γ , quelle con $q = 2(\sqrt{2} - 1)$ e $q = 2$ sono ad essa tangenti e le rimanenti sono esterne.

Problema 3

a) Innanzitutto imponiamo il passaggio per l'assegnato punto $(\sqrt{e}, -1/4)$, ottenendo

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Deriviamo poi la funzione, trovando

$$f'(x) = 2a \frac{\log x}{x} + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} (2a \log x + b)$$

e imponiamo che la funzione abbia un punto stazionario per $x = \sqrt{e}$, ossia che la sua derivata si annulli in tale punto. Troviamo

$$a + b = 0.$$

In definitiva, a e b devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = 0. \end{cases}$$

Sottraendo ora la seconda equazione dalla prima troviamo

$$b = -1$$

e quindi $a = 1$. In definitiva la funzione cercata è

$$f(x) = \log^2 x - \log x,$$

a patto di verificare che il punto $(\sqrt{e}, -1/4)$ è effettivamente di minimo. Per fare questo basta calcolare la derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} (2 \log x - 1) + \frac{1}{x^2}$$

e sostituiamo il valore $x = \sqrt{e}$. Il primo prodotto si annulla e rimane dunque

$$f''(\sqrt{e}) = \frac{1}{e} > 0$$

e dunque il punto richiesto è effettivamente di minimo.

b) La funzione f è definita per $x > 0$. Il suo segno si ricava dalla disequazione

$$\log^2 x - \log x \geq 0$$

per cui la funzione è positiva se $\log x \leq 0$ o se $\log x \geq 1$, ossia se $0 < x \leq 1$ o se $x \geq e$, e negativa se $1 \leq x \leq e$. Essa si annulla se $x = 1$ o $x = e$.

Abbiamo poi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log^2 x - \log x) = +\infty$$

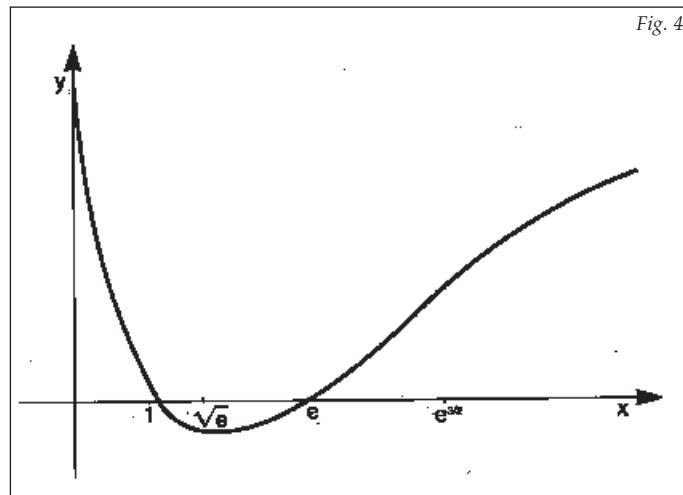
mentre il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log^2 x - \log x)$$

si presenta sotto la forma indeterminata $\infty - \infty$. Ponendo $\log x = y$ e osservando che anche $y \rightarrow +\infty$, esso si riduce a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (y^2 - 2y) = +\infty.$$

Dunque $x = 0$ è un asintoto verticale per la funzione. Vediamo



se esiste un asintoto obliquo. Poiché la funzione è derivabile per ogni $x > 0$, abbiamo

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

per la regola dell'Hôpital. Dunque f non ammette asintoti obliqui.

Abbiamo poi, come già calcolato nel caso generale,

$$f'(x) = \frac{1}{x} (2 \log x - 1)$$

e, poiché nel dominio il primo fattore è strettamente positivo, f sarà crescente se

$$2 \log x - 1 \geq 0$$

ossia se $x \geq \sqrt{e}$. Ne segue che f è decrescente se $0 < x < \sqrt{e}$, e che ammette minimo per $x = \sqrt{e}$ già imposto al punto precedente.

La derivata seconda è poi

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} (2 \log x - 1) + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2x^2} (3 - 2 \log x).$$

Pertanto f ha la concavità rivolta verso l'alto se

$$3 - 2 \log x \geq 0$$

ossia se $0 < x \leq e^{3/2}$, e concavità rivolta verso il basso se $x \geq e^{3/2}$. Pertanto essa ammette un flesso (decrescente) nel punto $(e^{3/2}, -3/4)$.

Il grafico di f è tracciato nella figura 4.

Calcoliamo l'area della regione compresa fra la curva e l'asse x . Essa vale, essendo la regione situata sotto l'asse x ,

$$A = \int_e^1 (\log^2 x - \log x) dx.$$

Abbiamo, integrando per parti,

$$\begin{aligned} A &= \int_e^1 \log^2 x dx - \int_e^1 \log x dx = \\ &= x \log^2 x \Big|_e^1 - 3 \int_e^1 \log x dx = -e - 3 x \log x \Big|_e^1 + 3 \int_e^1 dx = \\ &= -e + 3e + 3 - 3e = 3 - e. \end{aligned}$$

Calcoliamo infine la probabilità richiesta. Trattandosi di lanci di un dado, possiamo supporre equiprobabilità, e quindi la probabilità cercata è semplicemente il numero dei casi favorevoli diviso per il numero dei casi possibili.

Il numero dei casi possibili è semplicemente $6^5 = 7776$, in quanto si tratta delle disposizioni con ripetizione di sei og-

« Come riabilitare il più possibile l'aspetto logico-dimostrativo della Matematica? »

getti a 5 a 5. Valutiamo ora il numero dei casi favorevoli, nei quali esattamente tre numeri sono uguali. Innanzitutto valutiamo quanti sono i sottoinsiemi di tre elementi che si possono estrarre dal gruppo di 5. Essi sono (la dimostrazione di questo fatto verrà data più avanti)

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10.$$

Per ciascuno di questi sottoinsiemi, che rappresentano le tre volte in cui esce un dato numero, vi sono 6 risultati possibili, e dunque 60 sottoinsiemi di tre risultati uguali. Ora, per ciascuno di questi 60 gruppi di tre risultati, dobbiamo calcolare in quanti modi si possono disporre gli altri due risultati. A questo punto, la loro collocazione all'interno dei cinque risultati è fissata, e quindi il loro numero è pari alle disposizioni con ripetizione di cinque numeri (perché non possiamo ammettere più di tre risultati uguali) a due a due, e cioè $5^2 = 25$. Pertanto, in conclusione, vi sono $60 \cdot 25 = 1500$ risultati favorevoli. La probabilità cercata è dunque

$$\frac{1500}{7776} = \frac{125}{648} \approx 19\%.$$

Resta da dimostrare che il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono formare con $n \geq k$ elementi è proprio $\binom{n}{k}$. Dimostriamo questo fatto per induzione su n . Se $n = 0$, abbiamo il solo sottoinsieme vuoto e quindi

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Supponiamo vera la relazione per n elementi (cioè, che per ogni k da 0 a n il numero cercato sia il coefficiente binomiale) e consideriamo un insieme di $n + 1$ elementi «aggiungendo» un nuovo elemento a quelli già presenti. Consideriamo un sottoinsieme di k elementi di questo nuovo insieme. Ora, esso conterrà solo «vecchi» elementi, oppure anche quello nuovo. Nel primo caso, esso è un sottoinsieme del «vecchio» insieme, e di questi, per ipotesi induttiva, ve ne sono $\binom{n}{k}$. Nel secondo caso, tolto l'elemento «nuovo», resta un sottoinsieme di $k - 1$ elementi scelto dagli n «vecchi» elementi, e di questi, sempre per ipotesi induttiva, ve ne sono $\binom{n}{k-1}$. In definitiva, quindi, si hanno

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

sottoinsiemi di k elementi dell'insieme di $n + 1$ elementi e, per la proprietà dei coefficienti binomiali, questo numero è proprio pari a

$$\binom{n+1}{k},$$

col che la formula è vera per $n + 1$. Per il principio di induzione si deduce che essa è vera per ogni n .

Commento alla prova

La prova pare, nel complesso, più semplice di quella degli anni precedenti, in quanto più aderente alla parte tradizionale del programma del Liceo Scientifico e non gravata da calcoli pesanti. Fatta eccezione per la piccola perplessità sul

significato del termine “condizione” nel prologo del primo problema, evidenziata sopra e che non costituiva in ogni caso un ostacolo, la prova si presenta chiara: inoltre, il problema 2 è interessante per la sua formulazione in termini di affinità generali. Infine, il quesito sulla probabilità, slegato dal resto del problema 3 (forse per non introdurre un quarto problema), si riduce a un esercizio di calcolo combinatorio.

Suggerimenti in prospettiva

La prova, viste anche quelle degli anni precedenti, sembra dare un chiaro segnale nella direzione delle trasformazioni geometriche, già consolidato da tempo anche in altri tipi di corsi. La prova di quest'anno ha avuto, in questo senso, addirittura uno spiccato carattere analitico, in quanto non risultavano evidenti le proprietà geometriche dell'affinità trovata, ma si richiedevano soltanto informazioni ottenibili attraverso la Geometria analitica. Pertanto è chiaro il suggerimento di impadronirsi, oltre che del significato geometrico delle singole trasformazioni, anche delle tecniche (spesso molto semplici) analitiche per trovare punti uniti, rette unite e quant'altro.

Per il resto, la prova si riferisce a contenuti standard di Analisi matematica, col loro consueto ampio ventaglio di concetti e tecniche: inutile dire che esse non vanno trascurate, neanche nelle parti che consistono di dimostrazioni. Un interessante spunto che nasce dalla prova è la dimostrazione della (o di una versione ridotta della) formula di Taylor, proprio partendo dall'idea di voler trovare funzioni aventi valore uguale (in un punto) a quello di una funzione data assieme ai valori delle sue derivate.

Ma il punto più interessante in questa sezione è la riforma della prova di matematica dell'esame di maturità. Essa prevede, come forse è noto, la risoluzione di uno fra due problemi e cinque fra dieci quesiti di un questionario. A questo proposito si possono fare alcune considerazioni. Innanzitutto, verrà di norma assegnata una quantità doppia di quesiti rispetto a quanto richiesto per la sufficienza, e per i problemi ciò diventa meno restrittivo, in quanto a volte se ne chiedevano due su tre. Mentre sembra ragionevole che i problemi che verranno proposti avranno una struttura analoga a quelli dati finora, è altrettanto ragionevole che una vera novità, se ci sarà, starà nei quesiti, che sono tutto sommato un'incognita. Infatti la loro brevità (imposta per ragioni di buon senso) può suggerire strade diverse per la loro com-

posizione. Una prima strada è quella di richiedere una dimostrazione, cosa già richiesta negli anni precedenti. Una seconda è quella di un quesito a risposte chiuse, mentre una terza potrebbe essere l'esecuzione di un calcolo breve, come il calcolo di un limite o di un integrale. Sembra plausibile però che la prima opzione sia quella più probabile, per cui molto probabilmente gli studenti della prossima prova si troveranno una maggiore richiesta di dimostrazioni, e in ogni caso dovranno fare «mente locale» almeno sei volte (ma diciamo pure che saranno dodici) invece di quattro o cinque.

Da questo punto di vista, quindi, riteniamo che complessivamente la prova di Matematica risulterà più difficile che negli anni precedenti, in quanto diverrà anche più difficile «chiudere un occhio» su alcuni errori quando le domande saranno più circoscritte.

Il suggerimento è quindi: per gli insegnanti, riabilitare il più possibile l'aspetto logico-dimostrativo dei contenuti (che oltretutto è ciò che rende interessante la Matematica), e, per gli studenti, variare la tipologia di esercizi per evitare di ripetere tecniche sempre uguali trascurando aspetti concettualmente diversi. Per esempio, lo studio di funzione, con annessi estenuanti ripetizioni di disequazioni, spesso ripetuto fino alla noia, rischia di distogliere l'attenzione da aspetti ritenuti secondari (successioni, induzione, concetto di continuità, ecc.) che invece potrebbero facilmente rientrare in uno dei quesiti.

Oltre alla già citata attenzione per l'argomento delle trasformazioni geometriche e delle tecniche per operare con esse, conviene sempre menzionare il principio di induzione. Esso si applica ad argomenti sparsi su tutti gli anni, è esteticamente appagante e richiede un certo grado di comprensione della logica della dimostrazione.

Per citare, infine, la presenza sempre massiccia degli argomenti di Analisi matematica, mi sento di convenire con coloro che già da anni anticipano questi contenuti prima del quinto anno di corso.

Con riferimento a quanto detto per la nuova prova di Matematica, è chiaro che le considerazioni fatte valgono ugualmente, se non di più, quando si ha a disposizione più tempo per orientare gli studenti. Dunque, la parola d'ordine per noi è: variare. Con una varietà ampia di esercizi e problemi dovrebbe essere più facile acquisire migliori obiettivi quali: l'interesse degli studenti, un migliore riscontro delle loro reali capacità (per esempio, chi non sa – o non ama – risolvere disequazioni, a nostro parere non riuscirà mai bene in matematica. Ma, ammesso che sia vero, è proprio giusto? Si sa di molti matematici illustri che non le sanno risolvere!), una maggiore elasticità nel riconoscere analogie, per citare solo alcuni. Chiaramente i primi anni saranno «di assestamento» (anche per chi preparerà i problemi e i quesiti), ma crediamo che a regime questa prova diventerà maggiormente indicativa della preparazione dei candidati.

Per citare, infine, la presenza sempre massiccia degli argomenti di Analisi matematica, ci sentiamo di convenire con coloro che già da anni anticipano questi contenuti prima del quinto anno di corso.

Alfredo Marzocchi

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi, Brescia

Informatica

Gianfranco Metelli

Testo valevole per i corsi di ordinamento, per i corsi dei progetti assistiti «ABACUS», «BROCCA», «SIRIO», «PROGETTO TECNOLOGICO» e per i corsi sperimentali autonomi

La società di servizi turistici «Vacanze» vuole condurre una indagine sul gradimento dei 10 «pacchetti» di vacanze organizzate che costituiscono il suo catalogo.

Ogni indagine si basa su un questionario a struttura fissa, che viene fatto compilare a un campione di agenzie di viaggi:

- sezione 1: dati anagrafici dell'agenzia (provincia di residenza, n° dipendenti, n° di offerte di «Vacanze» vendute nell'anno);
- sezione 2: M domande generali su tutto il catalogo a cui l'agenzia intervistata deve rispondere con un valore numerico da 1 a 5;

- sezione 3: N domande specifiche, ripetute per ciascun pacchetto, a cui l'agenzia intervistata deve rispondere con un sì o con un no.

Si desidera organizzare l'indagine con l'aiuto di un sistema informatico che supporti le seguenti funzioni:

- a) emissione di una lettera rivolta alle agenzie con preghiera di compilazione;
- b) compilazione del questionario da parte delle agenzie direttamente mediante la tastiera della stazione di lavoro;
- c) raccolta delle risposte e creazione del relativo archivio;

Le possibilità di risoluzione sono diverse, consentendo l'utilizzo di diversi programmi informatici. Per tale motivo, i punti in cui è suddiviso il tema esame possono essere svolti in diverse modalità, come presentato di seguito.

a) Emissione di una lettera

La lettera può essere semplicemente scritta con un editor di testi, ad esempio Word, che permette anche una adeguata formattazione del testo, per una presentazione formale di una lettera con intestazione e corpo contenente la preghiera di compilazione del questionario allegato.

Per l'emissione della lettera si possono seguire diversi canali.

Dato che la società «Vacanze» possiede gli indirizzi postali delle agenzie, è possibile informatizzare la spedizione con le seguenti due modalità.

Prima modalità. Utilizzando il foglio elettronico Excel, è possibile progettare un piccolo database in cui vengono archiviati i dati anagrafici di ogni agenzia sottoposta all'indagine. Con questa scelta, si può utilizzare la funzione «Modulo Dati» per aggiornare i record del database. Successivamente si crea una procedura attraverso una semplice macro, che offre la possibilità di stampare delle etichette postali da sfruttare per la spedizione del materiale alle agenzie.

Seconda modalità. Una possibilità migliore viene offerta dal programma per database relazionali Access. Innanzitutto si crea una tabella per memorizzare l'indirizzario delle agenzie. Attraverso poi la funzione per l'«autocomposizione etichette», è immediata la costruzione di etichette postali pronte per la spedizione.

Notiamo ora che le precedenti due modalità risultano limitate perché:

- la lettera rivolta alle agenzie deve essere scritta in Word;
- le etichette postali vengono stampate separatamente con un altro programma;
- si deve procedere ad una spedizione postale della lettera;
- dato che il tema esame richiede che il questionario venga compilato mediante tastiera, ovvero direttamente su compu-

ter e non per via cartacea, il questionario, da preparare nel punto successivo, deve essere spedito eventualmente su floppy per essere compilabile su pc.

Per questo motivo, si propongono altre alternative che sfruttano al meglio lo strumento informatico.

Terza modalità. Si utilizza interamente l'applicativo Access, evitando l'uso di Word per la stesura della lettera. Innanzitutto, come per la *seconda modalità*, si predispone la tabella dell'indirizzario delle agenzie.

Secondariamente, è possibile scrivere direttamente nella struttura di un nuovo report (da creare) il corpo della lettera da inviare alle agenzie. Se tale report viene poi collegato alla tabella precedente, è possibile automatizzare la scrittura dell'intestazione della lettera, che varia con l'indirizzo di ogni agenzia.

Infine si stampano i report e le etichette per la spedizione.

Quarta modalità. La società «Vacanze» è in possesso anche dell'indirizzo di posta elettronica delle agenzie campione. Per tale motivo è più logico che la spedizione postale della lettera e del questionario venga sostituita e velocizzata con la spedizione elettronica.

Se le lettere da spedire sono state scritte in Word, è possibile spedire alle agenzie una e-mail che abbia in attachment la lettera.

Ancora meglio è rimanere nell'ambiente Access, tenendo presente ciò che è stato già definito nella *terza modalità*. Supponiamo ora che nella tabella degli indirizzi postali venga riservato anche un campo per inserire l'indirizzo di posta elettronica delle agenzie. Con l'utilizzo di una macro, è possibile informatizzare la spedizione elettronica. Ovvero, configurando Access con Outlook (applicativo per la gestione della posta elettronica), la lettera scritta con il report può essere inviata direttamente alla casella postale dell'agenzia considerata.

In tal modo, la spedizione postale viene totalmente eliminata e l'intera operazione di scrittura e emissione della lettera viene gestita con Access, con il solo ausilio di Outlook per la spedizione fisica del materiale.

b) Compilazione del questionario

Seguendo le richieste del tema esame, l'agenzia NON deve compilare il questionario manualmente, ma direttamente su computer.

d) analisi dei dati e stampe.

Si dispone dell'archivio delle agenzie da intervistare con i relativi indirizzi postali e di posta elettronica.

Il candidato, fatte tutte le ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie

1. indichi come propone di organizzare le funzioni a) b) c) d) e con quali strumenti informatici e programmi intende supportarle;
2. proponga e illustri la struttura degli archivi e lo schema generale del sistema;
3. illustri in particolare la realizzazione di una parte del sistema relativa alle funzioni b) e c).

Per tale motivo c'è da precisare che, se la spedizione della lettera avviene tramite posta manuale, il questionario deve comunque giungere eventualmente su floppy disk in allegato alla lettera, in modo che l'agenzia possa visualizzarne il contenuto e compilare le varie sezioni sul computer. Questo è il caso considerato nelle prime due modalità seguenti. Ma, come auspicabile, si consiglia di sfruttare la posta elettronica per la spedizione dell'intero pacchetto dell'indagine (lettera e questionario).

Prima modalità. Nella peggiore delle ipotesi, si potrebbe rimanere nell'ambiente Word. Ovvero la società «Vacanze» spedisce (via floppy o, meglio, via e-mail) il questionario in formato documento per essere aperto in Word. Tutte le sezioni vengono compilate in ambiente editor e il tutto viene rispedito alla società. Questa modalità è sicuramente svantaggiosa per la società che conduce l'indagine, in quanto supporta una successiva difficoltà nell'analisi dei dati raccolti dalle agenzie, dato che non può gestire a livello informatico i risultati del sondaggio, ma deve limitarsi allo spoglio manuale dei documenti.

Seconda modalità. Lavoriamo ancora con l'applicativo Access. In questo ambiente è possibile creare un database molto funzionale, in cui il questionario può essere compilato attraverso l'utilizzo di uno o più pannelli di controllo, mentre i dati vengono direttamente memorizzati all'interno di tabelle predisposte per la loro raccolta. L'agenzia non deve fare altro che ricevere il database e rispedirlo compilato tramite posta elettronica.

Vediamo nel dettaglio come può essere costruito il questionario.

Innanzitutto l'agenzia ricevente lavora esclusivamente su maschere a video (pannelli di controllo) che non permettono di manipolare la struttura del database, ma semplicemente consentono l'inserimento e l'eventuale correzione dei dati.

Si possono creare tre maschere per ciascuna sezione in cui è diviso il questionario.

La prima maschera permette di compilare i dati anagrafici dell'agenzia, che vengono salvati in una prima tabella.

Successivamente, la seconda maschera permette di rispondere alle M domande della sezione 2. Le risposte devono semplicemente essere un valore numerico da 1 a 5. Per facilitare l'inserimento di tale range di valori e per evitare di introdurre un numero non valido, si possono creare menu a tendina per obbligare la scelta delle risposte dal numero 1 al numero 5. In alternativa, Access permette di introdurre il

range di numeri anche evitando il menu a tendina, ma forzando l'inserimento agendo sulle proprietà dei dati e obbligando l'input del solo dato numerico da 1 a 5. A questo livello, le risposte vengono memorizzate in una seconda tabella.

Infine, l'agenzia dispone di una terza maschera per rispondere alla sezione 3. In particolare, la maschera può essere organizzata in due parti: nella prima si specifica il pacchetto vacanza (dato che questa sezione del sondaggio è da ripetere per dieci pacchetti), nella seconda parte (sottomaschera), si predispongono le risposte per le N domande. Dato che queste ultime accettano solamente dati del tipo sì/no, è utile utilizzare la proprietà del campo Sì/No di cui Access dispone, facendo apparire delle caselle di controllo sulle quali basta cliccare per renderle attive al valore SÌ, o mantenerle vuote per lasciare il valore predefinito a NO.

PACCHETTO NUM. ...
<i>Domande relative al pacchetto indicato</i>
Domanda 1 ... ☐
Domanda 2 ... ☐
...
Domanda N ... ☐

Le risposte di questa sezione vengono memorizzate in due tabelle relazionate. La prima tabella memorizza i dati del pacchetto vacanze, la seconda salva le N risposte sì/no di tutti i pacchetti. Grazie alla relazione e all'inserimento delle risposte avvenuto tramite una maschera con sottomaschera, comunque, nella seconda tabella non esiste il rischio di mescolare le $10 \cdot N$ risposte (N per ogni pacchetto); la relazione riconosce correttamente le N risposte del rispettivo pacchetto.

Al termine della compilazione del questionario, l'agenzia rispedisce il responso alla società tramite la posta elettronica.

Terza modalità. Risulta molto interessante poter sfruttare la potenzialità della rete. Dato che siamo in possesso degli indirizzi di posta elettronica, questo significa che sia la società «Vacanze» che le agenzie hanno la possibilità di accedere alla rete internet.

Supponiamo anche che la società che sottopone il sondaggio possa pubblicare pagine web su un proprio server. Con tale ipotesi, si fa in modo che la società «Vacanze» crei sul proprio sito internet le pagine relative al questionario, raggiungibile solo con accesso autorizzato tramite login e password (a conoscenza delle agenzie).

In tal modo la lettera rivolta alle agenzie con l'invito alla compilazione del questionario può essere inviata tramite posta elettronica, indicando anche come raggiungere il questionario in rete.

La convenienza di questa modalità di lavoro sta nel fatto che l'agenzia compila i dati sempre tramite computer, senza bisogno di ricevere il questionario via e-mail, né di installarlo sul proprio computer. Inoltre, dopo aver risposto alle do-

« Possibilità di risoluzioni diverse consentono l'utilizzo di programmi informatici diversi ».

mande, l'invio dei dati è immediato e subito raccolto dalla società che propone il sondaggio.

Il linguaggio HTML (o un editor più visuale tipo FrontPage) permette di costruire le pagine web specificate, per creare le tre sezioni in cui è suddiviso il questionario. HTML consente in particolare di impostare un modulo (*form*) on-line il cui corpo è costituito da campi per l'inserimento dei dati, che successivamente vengono inviati e raccolti da un programma residente sul server.

I campi consentono di inserire stringhe alfanumeriche, utili per la sezione 1; per quanto riguarda la sezione 2 si possono creare campi con menu a tendina (*select*), che vincola la risposta al range numerico tra 1 e 5. Infine, per la terza sezione con le N domande di tipo Sì/No, si definiscono delle caselle di controllo da attivare o meno, validi appunto per il Sì/No.

Compilato l'intero questionario sulla pagina web, le risposte vengono inviate immediatamente alla società tramite un clic su un pulsante «INVIA DATI», predisposto per l'invio dei dati del modulo compilato.

c) Raccolta delle risposte e creazione dell'archivio

Prima modalità. Rimanendo ancora nel caso più limitato, ovvero considerando la possibilità che l'agenzia compili il questionario usando l'editor Word, l'agenzia stessa deve rispedire il documento alla società «Vacanze», alla quale non resta altro che sfogliare tutti i documenti compilati.

In questo caso poi si può creare un nuovo documento riassuntivo con il quadro di tutte le risposte pervenute, ma tutta la procedura risulta essere evidentemente lunga e sfrutta poco le tecnologie informatiche per la creazione dell'archivio dei dati dell'indagine.

Seconda modalità. Risulta sicuramente più conveniente sfruttare l'applicativo Access, se già utilizzato per operare nei punti precedenti.

Supponiamo che le agenzie, come già descritto, abbiano risposto al questionario tramite opportune maschere; in tal modo i dati sono stati memorizzati nelle tabelle indicate. A questo punto, l'agenzia può rispedire il database in attachment alla posta elettronica all'indirizzo della società «Vacanze».

Ora il lavoro spetta alla società che deve creare l'archivio di tutti i dati pervenuti dalle singole agenzie.

Una prima possibilità, utilizzando funzioni di Access, è quella di creare una tabella in cui vengono importati i dati delle tabelle pervenute (utilizzando appunto la funzione *importa tabella*). In tal modo, si costruisce una prima maxi tabella contenente i dati anagrafici delle agenzie (dati prelevati dalle sezioni 1 dei questionari); con lo stesso procedimento si crea una seconda maxi tabella, relazionata alla precedente, in cui si archiviano le M risposte pervenute da ogni agenzia campione. Ugualmente, si può infine creare una terza maxi tabella relazionata in cui si inseriscono tutte le N risposte delle sezioni 3, suddivise per pacchetto vacanza.

Con tale organizzazione, il risultato è l'implementazione di un unico database che raccoglie tutte le risposte di tutte le agenzie e sul quale è semplice effettuare vari tipi di indagini e di analisi dei dati.

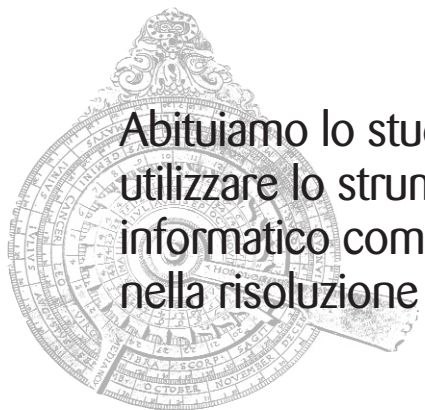
Concludiamo dicendo che quest'ultima procedura di assemblamento dei dati pervenuti in diverse tabelle, può essere automatizzata maggiormente creando una macro all'interno di Access che, con alcune istruzioni in Visual Basic, permette di velocizzare l'importazione delle tabelle.

Terza modalità. Riprendiamo la terza modalità del punto c, che considera la compilazione del questionario inserendo i dati in un modulo on-line. Supponiamo che la società «Vacanze» possieda il server sul quale è stato scritto il modulo compilabile dalle agenzie e che tale server sia la locazione in cui giungono i dati inviati dalle agenzie.

Innanzitutto, si predispone che la pagina del questionario presenti al termine un pulsante che permetta di inviare i dati. In tal modo, grazie al linguaggio HTML, si definisce una funzione (*submit*) che consente la comunicazione dei dati al server, richiedendo un URL codificato (indirizzo del browser destinatario). È possibile addirittura fare in modo che i dati puntino sul server di destinazione ad un programma specifico, che permetta di elaborarli. Il tutto avviene tramite un'interfaccia di comunicazione, che sul server riconosce i dati ricevuti, passandoli immediatamente al programma che li può elaborare.

La modalità di raccolta delle risposte potrebbe essere la seguente. Quando l'agenzia le invia attraverso il modulo compilato on-line, il server ricevente elabora i dati e li salva in un file di tipo testo. In tale file, i dati vengono scritti in corrispondenza di opportuni campi relativi alle domande del questionario.

Se questa procedura viene riservata ad ogni agenzia, quando tutte avranno compilato e inviato il modulo, il server troverà in una directory specificata tutti i file delle risposte corri-



Abituiamo lo studente ad utilizzare lo strumento informatico come supporto nella risoluzione di problemi.

spondenti ciascuno alle agenzie campione. A questo punto la società «Vacanze» non deve fare altro che utilizzare un altro programma (per esempio un eseguibile scritto in linguaggio C o Java) che apre tutti i file delle risposte e assembla i dati in un unico file (identifichiamolo con il nome ARCHIVIO). Quest'ultimo poi deve essere trattato da un programma opportuno per elaborare i risultati, come richiesto nel successivo **punto d**.

Per concretizzare questo procedimento, si può scegliere che la creazione del file ARCHIVIO avvenga in ambiente Access. Ovvero, dopo che le risposte delle singole agenzie sono giunte sul server e memorizzate in diversi file di tipo testo, una macro costruita in Access può aprire i file testo specifici e assemblare tutti i dati all'interno di campi in tabelle opportunamente studiate, come già descritto nella precedente *seconda modalità*.

d) Analisi dei dati e stampe

Prima modalità. Abbiamo già detto più volte che se i dati pervenissero come documento Word, la società dovrebbe, come già spiegato, sfogliare manualmente tutti i documenti e predisporre uno nuovo per la presentazione e la stampa del quadro riassuntivo dell'indagine. Ma il tutto si mostra alquanto «poco» informatizzato.

Seconda modalità. Risulta conveniente a questo punto analizzare i dati raccolti dall'indagine attraverso l'applicativo Access, programma già utilizzato per la raccolta delle risposte delle agenzie (**punto c**) sia per la *seconda* sia per la *terza modalità*. Inoltre, essendo Access un programma per database, esso permette di raggruppare i dati in modo ragionevole all'interno di tabelle, di analizzarli in modo adeguato e di stamparli, come richiesto.

Riprendiamo quanto descritto nel **punto c** riguardo a come possono essere organizzati i dati in un unico database deno-

minato ARCHIVIO. Servendosi delle funzionalità dell'applicativo, sono diverse le opportunità di analisi dei dati. Grazie a strumenti come *query* e *report*, grazie a funzioni matematiche applicabili in Access, è possibile interrogare l'ARCHIVIO e condurre analisi statistiche sui dati raccolti. In questo modo, sono individuabili diversi modi di lettura e varie analisi dei dati (ne diamo solo alcuni esempi):

1. Nel caso più semplice, stampare le risposte dei questionari suddivisi per agenzia.
2. Effettuare una stampa delle risposte suddivise per sezione.
3. Svolgere un'indagine statistica: per esempio, rispetto alla sezione 3 del questionario, in base ad un calcolo sui risultati, visualizzare i pacchetti vacanze maggiormente graditi, in ordine di preferenza.
4. Rispetto alla sezione 2, mostrare quali sono le proposte più valide del catalogo sottoposto all'indagine.
5. Interrogare il database ARCHIVIO: per esempio, scegliere una qualsiasi domanda del questionario e visionare come hanno risposto le agenzie alla domanda prescelta.

Commento alla prova

A nostro giudizio, la prova d'esame sottoposta non risulta essere particolarmente difficoltosa. Al contrario, permette allo studente di proporre la risoluzione in diverse modalità, come abbiamo precedentemente descritto. Si può presentare una risoluzione molto semplicistica, come il banale utilizzo dell'editor Word, fino al più conveniente e moderno sfruttamento delle potenzialità della rete.

Abbiamo pensato di proporre diverse modalità di risoluzione essenzialmente per due motivi:

1. Innanzitutto, leggendo il tema esame, si fa richiesta di organizzare la risoluzione specificando «... quali strumenti informatici e programmi si intende supportare». Questo, a nostro parere, deve stimolare lo studente a mostrare quali applicativi sono a sua conoscenza, quali sono le competenze a riguardo e come sa opportunamente gestire varie situazioni. Ciò ovviamente non deve far pensare che lo studente debba inserire nella risoluzione tutti i pacchetti informatici di sua conoscenza, ma, tra questi, i più adatti all'organizzazione del lavoro proposto.
2. Qualcuno potrebbe criticare il fatto che, tra le diverse modalità di risoluzione dell'esame, abbiamo proposto anche l'utilizzo del solo editor Word. Siamo d'accordo sul fatto che non sia la scelta migliore tra quelle proposte, ma la descrizione di tale procedura può essere letta come la possibilità di mettere a disposizione la compilazione del questionario anche a quelle agenzie che possiedono risorse informatiche limitate. Ovvero, lo studente si mette nelle condizioni reali di una situazione «poco informatizzata» e mostra, tuttavia, una possibile conduzione del lavoro in una sorta di caso limite. Con questo riteniamo che la prova proposta consenta di operare con un libero raggio di azione, in quanto non vincola all'utilizzo di un particolare software o di un particolare stru-

mento informativo, ma mette in condizione di scegliere un percorso a scelta del candidato, oppure più modalità di risoluzione, come proposto.

Tutto questo fa pensare che lo studente e, così, l'insegnante non devono fissarsi su un unico applicativo. Durante l'anno o gli anni scolastici, è giusto dimostrare una certa elasticità nell'utilizzo di software e altri strumenti, ovvero apprendere che nella realtà esistono diversi pacchetti informatici. Ciò significa che non ci si deve «fossilizzare» su un unico applicativo, ma sull'ampia gamma di strumenti esistenti, facendo attenzione a quello che è conveniente utilizzare, sia in relazione alle potenzialità software che si vogliono raggiungere, sia in relazione alle risorse hardware in possesso, tra cui la possibilità di sfruttare la rete se si dispone di un collegamento. Inoltre, si deve far osservare che diversi applicativi possono interagire tra loro e i risultati di un'elaborazione possono essere l'input per una seconda applicazione e così via.

Se a questo punto dovessimo consigliare un insegnante a fare delle scelte per predisporre un piano di lavoro che abbia un'impostazione didattica anche di tipo informatico, potremmo suggerire di:

1. Utilizzare sicuramente il laboratorio informatico della scuola, dato che, ormai, tutti gli istituti sono più o meno aggiornati nell'allestimento di un'aula informatica.

2. In relazione ai tempi didattici a disposizione, non è necessario guidare gli studenti all'apprendimento di un numero elevato di applicativi, ma si deve premettere che se si impara un determinato tipo di software, non bisogna vincolarsi ad esso. Per fare un esempio, se si acquisisce competenza con un linguaggio di programmazione (per esempio il Pascal, in uso frequente nelle scuole per le sue caratteristiche didattiche), si deve sapere che esso non è l'unico linguaggio esistente, ma, appresa la tecnica di programmazione e acquisite le abilità per la stesura di un algoritmo, gli altri linguaggi differiscono prevalentemente per le istruzioni, mantenendo invariata la logica di programmazione.

3. Abituare lo studente ad utilizzare lo strumento informatico non come necessario, ma come coadiuvante e supporto allo svolgimento e alla risoluzione di determinati problemi.

Gianfranco Metelli - Università Cattolica, Brescia