

# MATEMATICA

Ferdinando Arzarello, Ornella Robutti

All'interno di tutte le novità offerte dall'esame di stato dello scorso anno scolastico (variazioni nella prova di italiano, terza prova scritta, colloquio, valutazione), possiamo dire che le prove di matematica invece costituiscono un esempio di continuità con il passato, perché la loro tipologia ricalca una

tradizione ormai consolidata, anche negli indirizzi sperimentali.

Nel seguito dell'articolo prendiamo in esame le singole prove del liceo scientifico tradizionale, liceo scientifico sperimentale P.N.I. e istituto magistrale, risolvendole e commentandole.

## Liceo Scientifico

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto  $x_0$ .

a) Dire se la condizione  $f'(x_0) = 0$  è:

- necessaria ma non sufficiente,
- sufficiente ma non necessaria,
- necessaria e sufficiente

per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto  $x_0$ . Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

b) Posto  $f(x) = \frac{x^3}{ax+b}$ , dove  $a, b$  sono

parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva  $\gamma$  di equazione cartesiana  $y = f(x)$  abbia un estremo relativo nel punto di coordinate  $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right)$ .

c) Controllato che la curva  $\gamma$  cercata si ottiene per  $a = 2$ , studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

d) Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva  $\gamma'$  di equazione  $y = f'(x)$ , dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a  $\gamma$  e  $\gamma'$ .

e) Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di  $\gamma$  e quello di  $\gamma'$ . Quale?

2. In un piano  $\alpha$  sono assegnate una circonferenza  $k$  di raggio di lunghezza data  $r$  ed una parabola  $p$  passante per gli estremi  $A, B$  di un diametro di  $k$  e avente come asse di simmetria l'asse del segmento  $AB$ . L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola  $p$  e dal segmento  $AB$  è  $\frac{8}{3} r^2$ .

Dopo aver riferito il piano  $\alpha$  ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della circonferenza  $k$ ;

b) determinare l'equazione della parabola  $p$ ;

c) trovare le coordinate dei punti comuni a  $k$  e  $p$ ;

d) calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola  $p$  divide il cerchio delimitato da  $k$ ;

e) stabilire per quale valore di  $r$  la maggiore di tali aree è uguale a  $\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$ .

3. Considerato il quadrato  $ABCD$ , sull'arco di circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$ , contenuto nel quadrato, si prenda un punto  $T$  in modo che l'angolo  $T\hat{A}B$  misuri  $2x$  radianti. Si conduca quindi per  $T$  la retta tangente alla circonferenza e si chiamino  $P$  e  $Q$  i punti in cui essa sega le rette  $BC$  e  $CD$  rispettivamente.

a) Esprimere in funzione di  $x$  il rapporto:

$$f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}.$$

b) Studiare la funzione  $f(x)$  ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile  $x$  dalla questione geometrica, e disegnarne il grafico in un piano cartesiano ai fini della risoluzione del punto c).

c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare  $x$  in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale  $k$  assegnato.

d) Verificare che il rapporto  $f(x)$  può essere scritto nella seguente forma:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x + 1}.$$

e) Stabilire che risulta

$$\lg \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

## Primo problema

La condizione  $f'(x_0) = 0$  è necessaria ma non sufficiente per concludere che la funzione ammette un estremo relativo nel punto  $x_0$ . Infatti, è necessaria perché, se una funzione ha un estremo relativo in quel punto, allora in esso la sua derivata è nulla: questo è uno dei teoremi che si dimostrano solitamente nel corso del quinto anno. La condizione non è sufficiente perché, se una funzione ha derivata prima nulla in un punto, potrebbe avere un flesso a tangente orizzontale, come accade ad esempio per la funzione  $y = x^3$  se  $x_0 = 0$ .

Imponendo che il punto  $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right)$  appartenga alla curva  $\gamma$  e che sia un estremo relativo, si ottiene il sistema che fornisce le condizioni sui parametri  $a$  e  $b$ :

$$\begin{cases} \frac{27}{16(3a+4b)} = \frac{27}{32} \\ \frac{27\left(\frac{a}{2}+b\right)}{16\left(\frac{3}{4}a+b\right)^2} = 0 \end{cases}$$

il quale, risolto, ha come soluzione  $a = 2$  (che conferma l'informazione del testo) e  $b = -1$ .

La curva  $\gamma$  ha quindi equazione  $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$ .

Si tratta di una funzione razionale fratta definita in  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ . Passa per l'origine  $O(0, 0)$  e in tale punto interseca l'asse delle ascisse con molteplicità 3, perciò presenta un flesso. La funzione  $f(x)$  è positiva per  $x < 0 \vee x > \frac{1}{2}$ .

Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è dato dai limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x^3}{2x-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x-1} = +\infty.$$

La funzione ammette un asintoto verticale di equazione  $x = \frac{1}{2}$ , non ammette asintoti orizzontali e nemmeno obliqui.

La derivata prima è:  $f'(x) = \frac{x^2(4x-3)}{(2x-1)^2}$ , si annulla per  $x = 0$  (con molteplicità 2) e per  $x = \frac{3}{4}$ , è positiva per  $x > 3/4$ . La funzione

ammette dunque un punto di minimo in  $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right)$  e un flesso a tangente orizzontale in  $(0, 0)$ . La derivata seconda risulta:  $f''(x) = \frac{2x(4x^2-6x+3)}{(2x-1)^3}$  e si annulla solo per

$x = 0$ , è positiva per  $x < 0 \vee x > \frac{1}{2}$ . Il grafico della curva  $\gamma$  è in figura 1.

I punti comuni a  $\gamma$  e  $\gamma'$  si trovano dal sistema di equazioni delle due curve, che ha come risolvete:  $(2x^2 - 5x + 3)x^2 = 0$ . Di qui si individuano così i punti  $(0, 0)$  e  $(\frac{3}{2}, \frac{27}{16})$ .

La curva  $\gamma'$  è il grafico della derivata prima di  $f(x)$ , pertanto ha equazione cartesiana  $f'(x) = \frac{(4x-3)x^2}{(2x-1)^2}$ . Tale funzione è definita in  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$  e passa per i punti  $(0,0)$ , in cui è tangente all'asse  $x$ , e  $(\frac{3}{4}, 0)$ . Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è dato dai limiti:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{(4x-3)x^2}{(2x-1)^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x-3)x^2}{(2x-1)^2} = +\infty.$$

La  $f'(x)$  ammette un asintoto verticale di equazione  $x = \frac{1}{2}$ . Poiché il numeratore supera di un solo grado il denominatore, la funzione ammette anche un asintoto obliquo di equazione  $y = mx + q$  con

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x^2}{4x^3 - 4x^2 + x} = 1 \quad e$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^3 - 3x^2}{4x^2 - 4x + 1} - x \right) = \frac{1}{4}.$$

La derivata seconda di  $f(x)$ , (derivata prima di  $f'(x)$ ) è  $f''(x) = \frac{2x(4x^2 - 6x + 3)}{(2x-1)^3}$ . La  $f'(x)$

ha un punto di massimo relativo in  $O(0, 0)$ , dove la  $f(x)$  ha un punto di flesso.

La derivata seconda di  $f'(x)$  è:

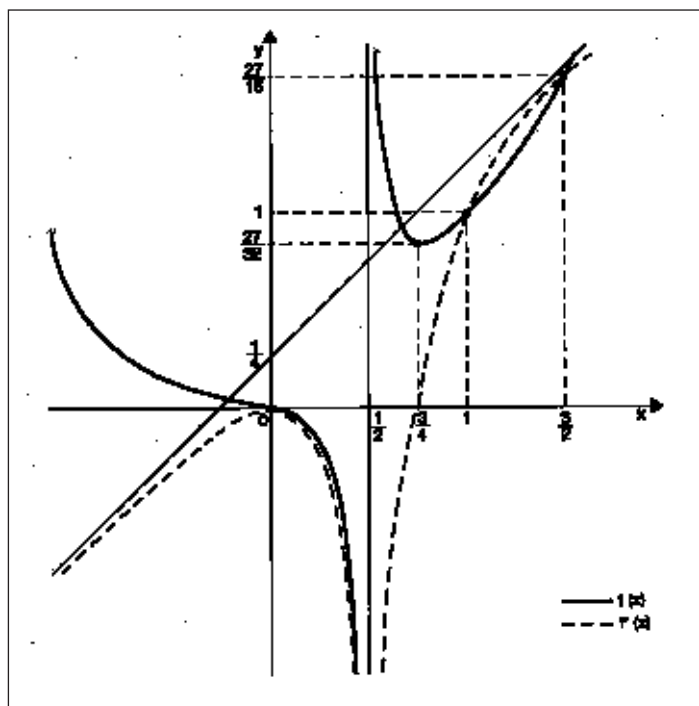
$f'''(x) = -\frac{6}{(2x-1)^4}$ , non si annulla mai ed è sempre negativa, pertanto la curva  $\gamma'$  non ammette flessi e volge sempre la concavità verso il basso. Il suo grafico è rappresentato in figura 1.

Tra gli andamenti delle curve  $\gamma$  e  $\gamma'$  sussistono tutte le relazioni valide tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata prima: si riconosce così che agli zeri della seconda corrispondono gli estremi relativi della prima e che in  $x = 0$  le due curve sono tangenti in quanto tale punto è un flesso a tangente orizzontale per  $\gamma$  e un massimo per  $\gamma'$ .

## Secondo problema

In un sistema di assi cartesiani in cui l'origine coincida con il centro della circonferenza  $k$ , quest'ultima ha equazione  $x^2 + y^2 = r^2$ , con  $r > 0$ . Assumendo come diametro quello

Fig. 1



di estremi i due punti  $A(-r, 0)$  e  $B(r, 0)$ , la parabola  $p$  presenta come asse di simmetria l'asse delle ordinate, perciò la sua equazione è del tipo  $y = ax^2 + c$ . Per determinare il valore dei parametri  $a$  e  $c$  bisogna imporre il passaggio per  $A$  e per  $B$  e porre uguale a  $\frac{8}{3}r^2$  l'area del segmento parabolico delimitato da  $AB$ . Dal sistema:

$$\begin{cases} ar^2 + c = 0 \\ \frac{2}{3}2r|c| = \frac{8}{3}r^2 \end{cases}$$

$$\text{si ottiene: } \begin{cases} c = \pm 2r \\ a = \mp \frac{2}{r} \end{cases}$$

Scegliendo la parabola con concavità rivolta verso il basso, si ha per  $p$  l'equazione:

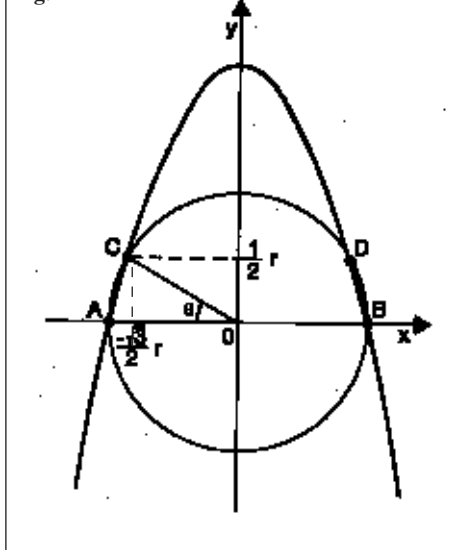
$$y = -\frac{2}{r}x^2 + 2r \quad \text{con } r > 0.$$

Le coordinate dei punti comuni a  $k$  e a  $p$  sono:  $A(-r, 0)$ ,  $B(r, 0)$ ,  $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{1}{2}r)$ ,  $D(\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{1}{2}r)$ .

Dalle coordinate di  $C$  risulta che l'angolo  $\vartheta$  indicato nella figura 2 ha ampiezza tale per cui:  $\tan \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , cioè  $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ . Di conseguenza la minore delle regioni in cui la parabola  $p$  divide il cerchio delimitato da  $k$  ha area data da:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} r^2 - \left( \frac{1}{2} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}r \right| \cdot \frac{1}{2}r + \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \left( -\frac{2}{r}x^2 + 2r \right) dx \right) = \frac{2\pi - 32 + 15\sqrt{3}}{24} r^2.$$

Fig. 2



L'altra area si ottiene per differenza dall'area di tutta la circonferenza, notando che le regioni di area pari ad  $A_1$  sono due per simmetria della figura:

$$A_2 = \pi r^2 - 2A_1 = \frac{32 + 10\pi - 15\sqrt{3}}{12} r^2.$$

Il valore di  $r$  cercato si ottiene imponendo l'uguaglianza tra  $A_2$  e l'area fornita dal testo:

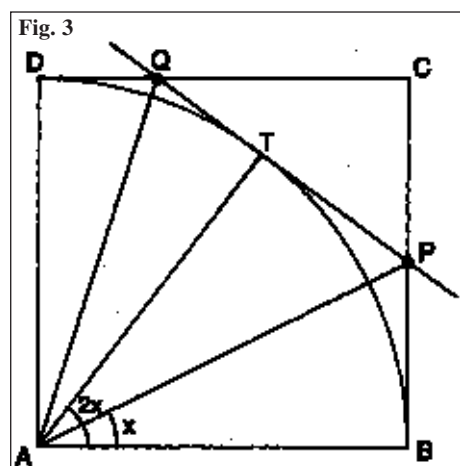
$$r = 2 \sqrt{\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{32 + 10\pi - 15\sqrt{3}}} \text{ cm.}$$

## Terzo problema

Riferendosi alla *figura 3*, detta  $l$  la lunghezza del lato del quadrato, si ha che:

$$P\hat{A}B = \frac{1}{2} T\hat{A}B = x \quad \text{e}$$

$$D\hat{A}Q = \frac{1}{2} D\hat{A}T = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right) = \frac{\pi}{4} - x.$$



Utilizzando la definizione di tangente come rapporto di cateti si può scrivere:

$$\overline{CP} = \overline{BC} - \overline{BP} = (1 - \operatorname{tg} x)l \quad \text{e}$$

$$\overline{CQ} = \overline{CD} - \overline{DQ} = \left[ 1 - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right] l$$

e infine:

$$f(x) = 2 - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{-\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + 1} \quad \text{con } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

La funzione nell'intervallo indicato soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e ammette almeno un punto a tangente orizzontale. Annullando la derivata prima si ottiene:

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2 \cos^2 x} = 0 \quad \text{con soluzioni:}$$

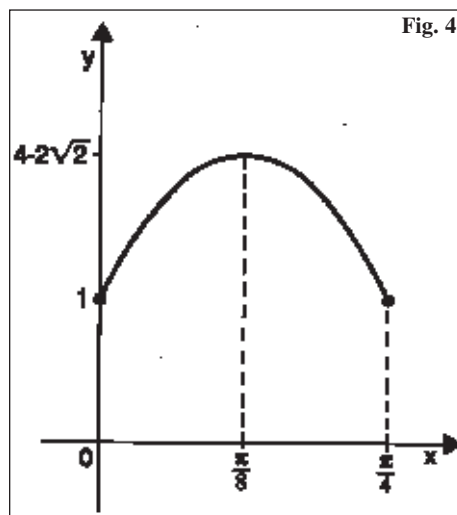
$\operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{2}$ . Nel dominio della funzione è accettabile  $x = \frac{\pi}{8}$ , con  $y = 4 - 2\sqrt{2}$ .

Il punto ottenuto è un massimo. La funzione è sempre positiva, crescente nella prima metà dell'intervallo  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  e decrescente nella seconda metà. Il suo grafico è rappresentato in *figura 4*.

I valori di  $x$  per i quali si ha  $f(x) = k$  si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} y = \frac{-\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + 1} \\ y = k. \end{cases}$$

La discussione grafica fornisce i seguenti risultati:



$k < 1 \vee k > 4 - 2\sqrt{2}$  nessuna soluzione  
 $k = 1$  due soluzioni limite  
 $1 < k < 4 - 2\sqrt{2}$  due soluzioni ordinarie  
 $k = 4 - 2\sqrt{2}$  due soluzioni coincidenti.

La funzione può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1}{1 + \operatorname{tg} x} = \\ &= 2 \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 1 - 1} = \\ &= 2 \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x + 1}. \end{aligned}$$

Il valore della  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$  si ottiene dalle formule di bisezione della tangente:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} - 1.$$

## Tracce equilibrate

La prova di ordinamento del liceo scientifico è, a nostro parere, compatibile con i programmi (ormai molto datati, peraltro) dell'indirizzo e non presenta particolari novità. Si può dire che sia abbastanza prevedibile, poiché in linea con le prove degli ultimi anni di questo tipo di scuola. Si può riconoscere quasi uno stile usato dall'estensore, che evidenzia l'intenzione di toccare un po' tutti gli argomenti del triennio (geometria analitica, geometria euclidea, trigonometria, analisi), si sofferma forse troppo e in maniera un po' superata sulla trigonometria, ma intende valorizzare lo studio della teoria nel programma di matematica. Infatti, l'esordio del compito è proprio su una domanda di «teoria»: è im-

portante che ci siano nelle prove d'esame domande di questo tipo, perché lo studente in tal modo non pensi di addestrarsi semplicemente a fare dei conti, bensì rifletta sull'impianto teorico della disciplina. La questione è, da un lato, interessante perché non si tratta di una domanda a cui lo studente può rispondere semplicemente ripetendo meccanicamente la dimostrazione di un teorema, ma richiede di riflettere sulla collocazione dell'argomento nell'ambito dei teoremi studiati. Inoltre, essendo un'implicazione vera e l'altra falsa, occorre dimostrare la prima con un teorema e far vedere la falsità della seconda con la ricerca di un controesempio. Per altri aspetti, invece, pare aver creato alcune difficoltà agli studenti: come sempre, la dimostrazione di una «condizione necessaria e sufficiente» crea problemi, in quanto essi non hanno certezze sull'ipotesi e sulla tesi da utilizzare per formulare l'una o l'altra. Forse, si potrebbe agevolare il lavoro dei candidati esplicitando la/le implicazione/i da dimostrare. I ragazzi nella risoluzione del quesito hanno trovato più difficoltà nella dimostrazione della condizione necessaria, mentre per loro è stato più semplice trovare il controesempio per negare la condizione sufficiente.

Il problema fornisce un risultato, utile per il controllo dei conti. Richiede lo studio di due funzioni, di cui la seconda uguale alla derivata della prima, quindi facile da studiare se si sfruttano i calcoli fatti per la prima. Al punto d) era presente un refuso sul testo: mancava un apice alla  $f(x)$ , ma dal testo si evinceva che non poteva che essere  $f'(x)$ , (i commissari si sono accorti dell'errore di stampa, comunicato anche dal Ministero nella mattinata stessa dello svolgimento della prova). Al punto e) l'aggettivo «evidente» poteva anche essere evitato, perché induceva forse a pensare a ovvie simmetrie tra i due grafici, che peraltro non esistono, sussistendo solo le relazioni tipiche fra il grafico di una funzione e quello della sua derivata.

Il secondo problema del liceo scientifico è un classico problema di geometria analitica, in cui i calcoli vengono facilitati dalla scelta del sistema di riferimento cartesiano, dall'uso della formula di Archimede anziché del calcolo integrale per la determinazione dell'area di un segmento parabolico. Al punto e) viene fornito un dato inconsueto: pensiamo che fosse intenzione dell'estensore del compito quella di facilitare i calcoli con qualche semplificazione, purtroppo però, con i calcoli corretti il risultato è tutt'altro che bello, come si vede dalla risoluzione. È curioso osservare che, se si sottrae all'area del cerchio solo una delle due aree minori, allora viene un risultato «bello».

Il terzo problema è il più tradizionale dei tre,



di applicazione della geometria e della trigonometria, contiene una funzione trigonometrica fratta da studiare all'interno di limitazioni provenienti dalla situazione geometrica e una domanda in cui devono applicarsi le formule di trigonometria per verificare il valore numerico della tangente di un angolo. Ci si può chiedere quali obiettivi si vogliano

verificare con questo problema (la capacità di fare calcoli applicando formule trigonometriche?), perché la parte problematica è proprio in ombra rispetto ai calcoli. Non sarebbe invece obiettivo prioritario valutare la capacità di ragionamento, di scelta di procedura, di utilizzo della teoria non tanto per fare conti quanto per giustificare risultati?

## Liceo Scientifico P.N.I.

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.

**1.** In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$  è data la parabola  $\gamma$  di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - x.$$

Siano  $A$  un punto dell'asse  $x$  di ascissa  $\lambda$ , con  $\lambda > 0$ ,  $B$  il suo simmetrico rispetto ad  $O$ , e  $A'$  e  $B'$  i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse  $x$  sono rispettivamente  $A$  e  $B$ .

Il candidato:

- verifichi che le tangenti  $a$  e  $b$  alla parabola  $\gamma$ , rispettivamente in  $A'$  e  $B'$ , s'incontrano in un punto  $E$  dell'asse  $y$ ;
- detti  $C$  e  $D$  i rispettivi punti d'intersezione di  $a$  e  $b$  con l'asse  $x$ , esprima in funzione di  $\lambda$  l'area  $s$  del triangolo  $CED$ ;
- studi la funzione  $s(\lambda)$  e tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $O'\lambda s$ , la curva  $C$  di equazione  $s = s(\lambda)$ ;
- detto  $\lambda_0$  il valore di  $\lambda$  per cui  $s$  assume valore minimo relativo, e detti  $a_0$  e  $b_0$  le po-

sizioni di  $a$  e  $b$  per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione  $y \leq 0$ , compresa tra  $\gamma$ ,  $a_0$  e  $b_0$ ;

e) osservato che, nell'ipotesi posta di  $\lambda > 0$ , esistono due valori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , con  $\lambda_1 < \lambda_2$ , per cui il triangolo  $CED$  è equivalente al quadrato di lato  $OA$ , descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di  $\lambda_1$  con un'approssimazione di  $10^{-n}$  e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

**2.** In un piano  $\alpha$  è assegnato il triangolo  $ABC$ , retto in  $B$ , i cui cateti  $AB$  e  $BC$  misurano rispettivamente 4 e 3.

Si conduca per il punto  $A$  la perpendicolare al piano  $\alpha$  e sia  $V$  un punto di questa per cui  $VA = AB$ .

Il candidato:

- dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro  $VABC$ , anche la faccia  $VBC$  è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è  $\widehat{VBC}$ ;
- calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;
- detto  $M$  il punto medio di  $VA$  e  $P$  un punto

dello stesso segmento a distanza  $x$  da  $V$ , esprima in funzione di  $x$  il volume  $v$  del tetraedro  $MPQR$ , essendo  $Q$  ed  $R$  le rispettive intersezioni degli spigoli  $VB$  e  $VC$  con il piano  $\beta$  parallelo ad  $\alpha$  e passante per  $P$ ;

d) studi come varia  $v$  al variare di  $P$  sul segmento  $VA$ , determinando in particolare la posizione  $\bar{P}$  di  $P$  in cui il volume  $v$  assume valore massimo assoluto;

e) detto  $D$  il punto medio di  $VB$  ed  $E$  il punto di  $AC$  tale che  $AE = AB$ , determini la posizione  $P^*$  di  $P$  che rende minima la somma  $DP + PE$  (si consiglia di far ruotare il triangolo  $VAB$  attorno ad  $AV$  fino a portarlo nel piano del triangolo  $VAE$ , simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma  $D'P + PE$ , essendo  $D'$  il corrispondente di  $D$  nella suddetta rotazione).

**3.** In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$  sono dati i punti  $P(x, y)$ ,  $A(x', y')$ ,  $B(x'', y'')$ ,  $P'(X, Y)$ , legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases} \quad \begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1 \end{cases}$$

Il candidato:

- dica la natura delle trasformazioni  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;
- determini la trasformazione  $T$  che fa passare da  $P$  a  $P'$ ;
- studi la trasformazione  $T$  enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti;
- considerati i punti  $C(3, 0)$ ,  $D(0, \sqrt{3})$ ,  $E(0, -\sqrt{3})$ , e detti  $\gamma$  la circonferenza per tali punti,  $a$  la retta  $CD$ ,  $\gamma'$  ed  $a'$  i trasformati di  $\gamma$  ed  $a$  mediante  $T$ , determini l'area delle regioni finite di piano delimitate da  $\gamma'$  ed  $a'$ ;
- determini il perimetro delle stesse regioni.

### Primo problema

Utilizzando le informazioni del testo si trovano i punti  $A(\lambda, 0)$ ,  $B(-\lambda, 0)$ ,  $A'(\lambda, \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda)$ ,  $B'(-\lambda, \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda)$ . La funzione  $y(x) = \frac{x^2}{2} - x$ , il cui grafico è la parabola  $\gamma$  assegnata, ammette come derivata prima  $y'(x) = x - 1$ .

La retta tangente  $a$  alla parabola  $\gamma$  in  $A'$  ha equazione  $y = (\lambda - 1)x - \frac{\lambda^2}{2}$ ; analogamente, la tangente  $b$  a  $\gamma$  in  $B'$  ha equazione

$y = -(\lambda + 1)x - \frac{\lambda^2}{2}$ . Il punto comune alle rette  $a$  e  $b$  si trova sull'asse delle  $y$ , le sue coordinate sono:  $E(0, -\frac{\lambda^2}{2})$  (figura 6).

Le coordinate dei punti  $C$  e  $D$ , rispettive intersezioni delle rette  $a$  e  $b$  con l'asse delle ascisse, risultano:

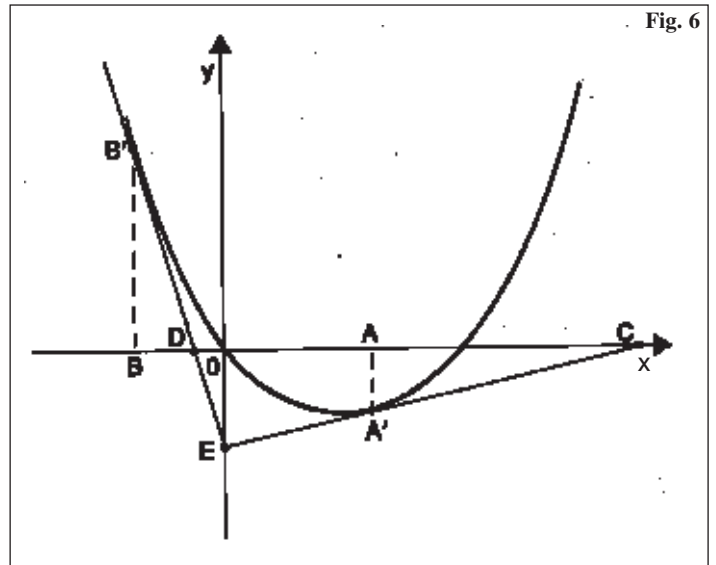
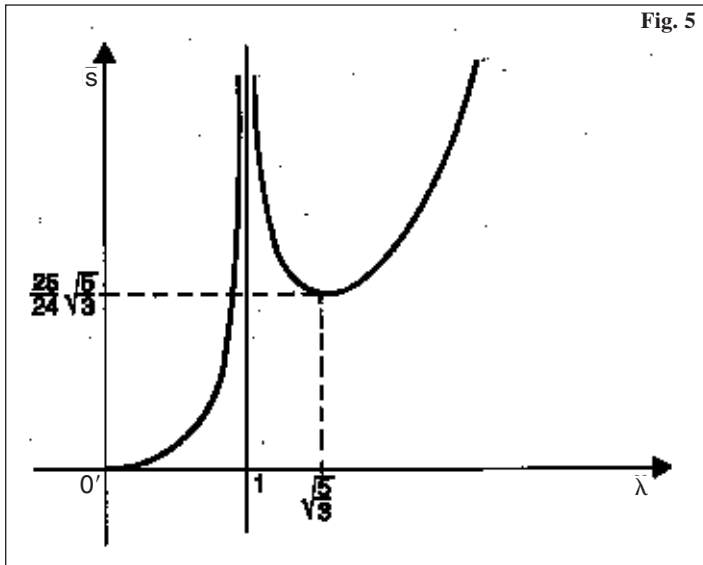
$$C\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda - 1)}, 0\right) \text{ e } D\left(-\frac{\lambda^2}{2(\lambda + 1)}, 0\right).$$

L'area del triangolo  $CED$  vale  $\frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{OE}$ , perciò  $s(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot |x_C - x_D| \cdot |y_E| = \frac{\lambda^5}{4|\lambda^2 - 1|}$  con  $\lambda > 0$ .

La funzione  $s(\lambda)$  è definita nell'insieme:  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ , compatibilmente con la questione geometrica da cui discende; e vale:

$$s(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} & \text{per } \lambda > 1 \\ -\frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} & \text{per } 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Non interseca mai gli assi cartesiani in quanto il valore  $\lambda = 0$  non è ammesso e inoltre si mantiene sempre positiva. Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è dato da:



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} \right) = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \left( -\frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} = +\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} = +\infty.$$

La funzione possiede un asintoto verticale di equazione  $\lambda = 1$ . La sua derivata prima è:

$$s'(\lambda) = \begin{cases} \lambda^4 \frac{(3\lambda^2 - 5)}{4(\lambda^2 - 1)^2} & \text{per } \lambda > 1 \\ -\lambda^4 \frac{(3\lambda^2 - 5)}{4(\lambda^2 - 1)^2} & \text{per } 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

si annulla per  $\lambda = \sqrt{\frac{5}{3}}$  ed è positiva per  $0 < \lambda < 1 \vee \lambda > \sqrt{\frac{5}{3}}$ . Il punto di coordinate  $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{25}{24\sqrt{3}}\right)$  è un minimo relativo. La derivata seconda è:

$$s''(\lambda) = \begin{cases} \lambda^3 \frac{3\lambda^4 - 9\lambda^2 + 10}{2(\lambda^2 - 1)^3} & \text{per } \lambda > 1 \\ -\lambda^3 \frac{3\lambda^4 - 9\lambda^2 + 10}{2(\lambda^2 - 1)^3} & \text{per } 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Non si annulla sul dominio e si mantiene sempre positiva, perciò la  $s(\lambda)$  non presenta punti di flesso. Il suo grafico è rappresentato in figura 5.

Posto  $\lambda_0 = \sqrt{\frac{5}{3}}$  si ha che le rette corrispondenti  $a_0$  e  $b_0$  hanno rispettivamente equazioni:  $y = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1\right)x - \frac{5}{6}$  e  $y = -\left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1\right)x - \frac{5}{6}$ . Il testo dà luogo a due possibili interpretazioni:

1. l'area della regione di piano richiesta (fi-

gura 6) è quella che si ottiene sottraendo l'area sottesa dalla parabola tra O e A alla somma delle aree del triangolo DOE e del trapezio OEA'A:

$$\frac{1}{2} \overline{DO} \cdot \overline{OE} + \frac{1}{2} (\overline{OE} + \overline{AA'}) \overline{OA} - \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \left( \frac{x^2}{2} - x \right) dx = \frac{5}{48} \left( \frac{23}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} - 5 \right);$$

2. l'area della regione di piano è quella che si ottiene calcolando l'area del triangolo CED diminuita dell'area del segmento parabolico delimitato da  $\gamma$  e dall'asse x e avente come estremi i punti (0,0) e (2,0). Si ottiene in questo caso:  $A = \frac{25}{24\sqrt{3}} - \frac{2}{3}$ .

Entrambe le soluzioni possono essere accettate.

Sotto la condizione  $\lambda > 1$  la funzione è  $s(\lambda) = \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)}$ ; il segmento OA ha lunghezza  $\lambda$  e l'equivalenza tra il triangolo CED e il quadrato di lato OA conduce quindi all'equazione:

$$\frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} = \lambda^2 \quad \text{equivalente al sistema} \quad \begin{cases} y = \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} \\ y = \lambda^2 \end{cases}$$

Disegnando il grafico delle due curve le cui equazioni sono a sistema si può facilmente verificare che esistono due valori di  $\lambda$ , con  $\lambda > 1$ , per i quali le due curve si intersecano. Dal grafico si nota che sicuramente  $1 < \lambda_1 < 1,5$  e  $3,5 < \lambda_2 < 4$ . Per applicare una procedura che determini un valore approssimato di  $\lambda_1$  conviene riscrivere l'equazione  $\frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} = \lambda^2$  nel modo seguente:  $\lambda^2 (\lambda^3 -$

$-4\lambda^2 + 4) = 0$ . Il valore  $\lambda_1$  è ovviamente una radice dell'equazione  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4 = 0$  e quindi uno zero della funzione  $f(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4$ . Per determinarlo con un'approssimazione di  $10^{-n}$  fissata ci si può avvalere del metodo di bisezione applicato alla funzione  $f(\lambda)$  nell'intervallo  $[1; 1,5]$ . L'analisi del problema della determinazione approssimata di  $\lambda_1$  porta ad individuare i seguenti sottoproblemi:

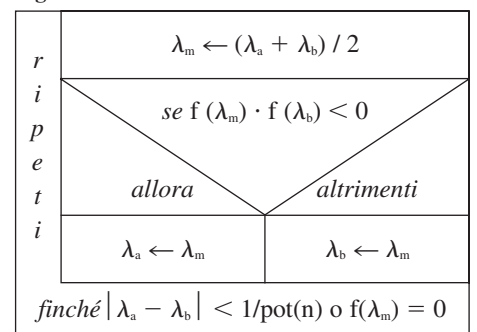
- acquisire  $n$  (intero positivo)
- realizzare il calcolo di  $\lambda_1$  con una precisione di  $10^{-n}$  con il metodo di bisezione
- calcolare i valori della funzione  $f(\lambda)$  dato  $\lambda$
- calcolare  $10^n$  dato  $n$
- stampare il valore di  $\lambda_1$ .

La procedura richiesta può essere organizzata in sottoprogrammi:

- acquisizione
- bisezione
- stampa.

In figura 7 è rappresentato il diagramma GNS del sottoprogramma che applica il metodo di bisezione, costituito all'interno dalla funzione  $f$  e dalla funzione  $pot$  ricorsiva.

Fig. 7. Procedura Bisezione



**Parametri formali:**

$\lambda_a, \lambda_b$  (estremi dell'intervallo) di tipo reale;  
 $\lambda_m$  (punto medio dell'intervallo) di tipo reale.



## Secondo problema

La retta  $VA$  (figura 8), essendo perpendicolare per costruzione al piano  $\alpha$ , è perpendicolare a tutte le rette che giacciono su questo piano; questo implica che gli angoli  $V\hat{A}B$  e  $V\hat{A}C$  siano retti. Pertanto le lunghezze dei segmenti  $VB$  e  $VC$  possono essere calcolate:

$$\overline{VB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{VA}^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{e}$$

$$\overline{VC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{VA}^2} = \sqrt{41}.$$

Sapendo per ipotesi che  $\overline{BC} = 3$ , si può verificare che nel triangolo  $VBC$  vale il teorema di Pitagora:  $\overline{VC} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{VB}^2} = \sqrt{9 + 32} = \sqrt{41}$ , perciò si conclude che tale triangolo è rettangolo e che l'angolo retto è  $V\hat{B}C$ .

Il volume del tetraedro vale

$$V = \frac{1}{3}A_{\text{base}} h = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \right) \cdot \overline{VA} = 8.$$

La sua superficie totale è:

$$A_{\text{tot}} = \frac{1}{2} (\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{AV} + \overline{AC} \cdot \overline{AV} + \overline{BC} \cdot \overline{VB}) = 3 (8 + 2\sqrt{2}).$$

Il tetraedro  $MPQR$  ha per base il triangolo  $PQR$  e per altezza il segmento  $MP$  di lunghezza  $MP = |\overline{VM} - \overline{VP}| = |2 - x|$ . Inoltre il tetraedro  $VPQR$  è l'omotetia del tetraedro  $VABC$  (omotetia di centro  $V$  e rapporto  $\frac{x}{4}$ ), pertanto  $\overline{QP} = \overline{VP} = x$  e  $\overline{QR} = \frac{3}{4}x$ .

Il volume di  $MPQR$  è dato da

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot \overline{QP} \cdot \overline{QR} \right) \cdot \overline{PM}$$

quindi la funzione cercata è:

$$v(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3}{4}x \right) \cdot |2 - x| = \frac{1}{8}x^2 |2 - x|.$$

Il campo di esistenza della funzione, in rapporto alla questione geometrica, è  $[0, 4]$ . La funzione passa per il punto  $(4, 4)$  e si mantiene non negativa.

La derivata prima è:

$$v'(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x(4-3x) & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8}x(3x-4) & \text{per } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

si annulla per  $x = 0$  e per  $x = \frac{4}{3}$ ; il punto di coordinate  $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{27}\right)$  è un massimo relativo, mentre  $(4, 4)$  è un massimo assoluto e i punti  $(0, 0)$  e  $(2, 0)$  sono minimi assoluti. La derivata seconda è:

$$v''(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-3x) & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}(3x-2) & \text{per } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

si annulla per  $x = \frac{2}{3}$ , è positiva per  $2 < x \leq 4$  (figura 9).

La posizione  $\overline{P}$  di  $P$  per cui il volume del te-

Fig. 8

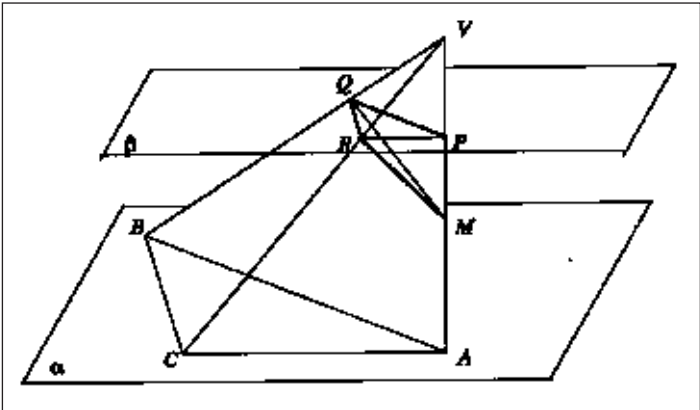
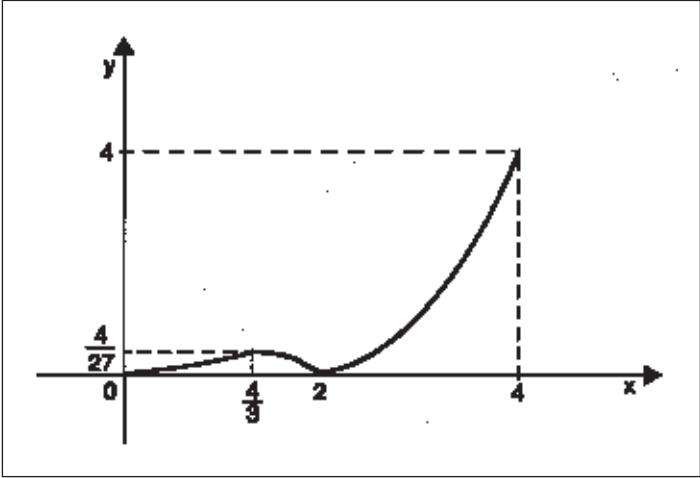


Fig. 9

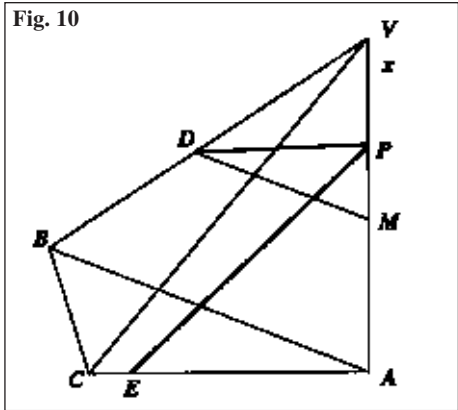


traedro  $MPQR$  è massimo risulta quella in corrispondenza di  $x = 4$ , cioè quando  $P \equiv A$ . Essendo per ipotesi  $M$  e  $D$  rispettivamente i punti medi degli spigoli  $VA$  e  $VB$ , si ha che la loro congiungente  $MD$  è, per il teorema di Talete, parallela allo spigolo  $AB$  (figura 10). Pertanto risulta  $MD \perp VA$  e il triangolo  $PMD$  è così rettangolo di lati  $\overline{PM} = |2 - x|$  e  $\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2$ .

La somma  $\overline{DP} + \overline{PE}$  è perciò espressa dalla funzione:

$$f(x) = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{MD}^2} + \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}.$$

Fig. 10



La sua derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$$

e si annulla quando

$$-(x-2)\sqrt{x^2-8x+32} = (x-4)\sqrt{x^2-4x+8},$$

ovvero  $x = \frac{8}{3}$ , che rappresenta la posizione

$P^*$  di  $P$  per cui la precedente somma è minima.

## Terzo problema

La trasformazione  $T_1$  è un'omotetia di centro l'origine e rapporto  $k = 2$ . La  $T_2$  è una rotazione degli assi di centro l'origine e angolo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  in senso antiorario. La  $T_3$  è una traslazione di vettore  $\vec{v} (2, -1)$ .

La trasformazione  $T$  che fa passare da  $P$  a  $P'$  risulta una composizione delle trasformazioni  $T_1, T_2, T_3$  assegnate:

$$T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = T \begin{cases} X = -2y + 2 \\ Y = 2x - 1. \end{cases}$$

La matrice della trasformazione  $T$  è

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ il cui determinante vale } 4; \text{ si}$$

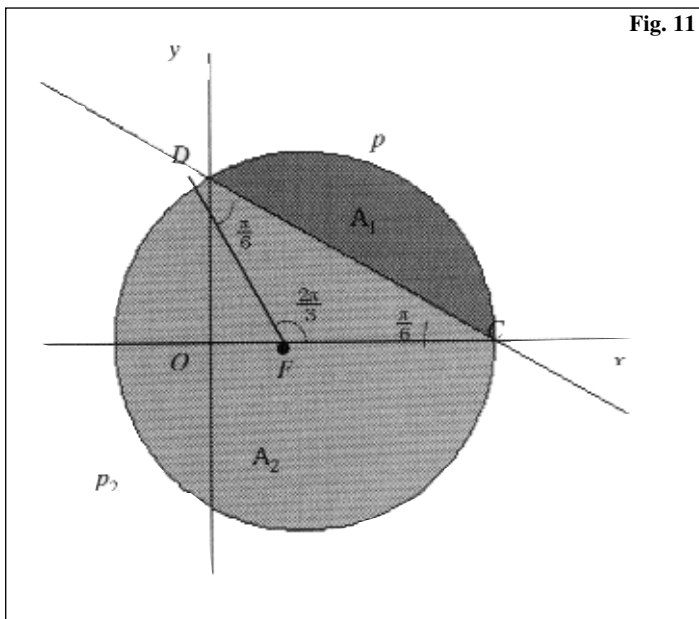


Fig. 11

tratta perciò di una similitudine diretta di rapporto 2, che mantiene il parallelismo e le ampiezze degli angoli.

I rapporti tra i perimetri e le aree di due figure che si corrispondono in  $T$  risultano rispettivamente 2 e 4.

La ricerca dei punti uniti si effettua risolvendo il sistema:  $\begin{cases} x = -2y + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ . L'unico punto

unito è pertanto  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ . Non esistono rette unite nella trasformazione  $T$ .

Per la simmetria dei punti  $D$  ed  $E$ , il centro della circonferenza appartiene all'asse  $x$  ed ha quindi coordinate  $(\alpha, 0)$ . Poiché il punto  $C$  appartiene all'asse  $x$ , il raggio della circonferenza può essere calcolato come  $|3 - \alpha|$ . Anche la distanza tra  $D$  ed il centro della circonferenza è uguale al raggio e vale  $\sqrt{\alpha^2 + 3}$ . Quindi uguagliando le due espressioni si ottiene l'equazione  $|3 - \alpha| = \sqrt{\alpha^2 + 3}$  che, risolta, dà  $\alpha = 1$ , da cui  $r = 2$ . L'equazione di  $\gamma$  risulta essere:  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ . La retta  $a$  passante per  $C$  e per  $D$  ha equazione  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ . Essa forma, con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, un angolo di ampiezza  $\frac{5}{6}\pi$ .

Per il calcolo delle aree delle regioni di piano delimitate da  $\gamma'$  e da  $a'$  ci si può riferire alla situazione geometrica illustrata in figura 11 e poi sfruttare la proprietà della similitudine  $T$  per cui il rapporto tra le aree vale  $A'/A = \det(M) = 4$ .

L'area  $A_1$  si ricava per differenza tra l'area del settore circolare di angolo al centro  $\widehat{DFC}$  e l'area del triangolo  $DFC$  di base  $\overline{FC} = r = 2$  e altezza  $\overline{DO} = \sqrt{3}$ :  $A_1 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ , mentre l'area  $A_2$  si ottiene per differenza dall'a-

rea dell'intero cerchio:  $A_2 = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$ . Di conseguenza le aree richieste sono:

$$A'_1 = 4A_1 = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3} \quad \text{e}$$

$$A'_2 = 4A_2 = \frac{32}{3}\pi + 4\sqrt{3}.$$

La stessa considerazione vale per i perimetri, essendo:  $p'/p = 2$ , allora  $p_1 = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$  e  $p_2 = \frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ , dunque  $p'_1 = \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}$  e  $p'_2 = \frac{16}{3}\pi + 4\sqrt{3}$ .

## Tracce impegnative

La prova del liceo scientifico con sperimentazione P.N.I. (analoga a quella del Brocca scientifico<sup>1</sup>) è in sintonia con i programmi dell'indirizzo, accessibile ma nemmeno troppo facile, esige una buona padronanza delle conoscenze degli ultimi anni e la capacità di gestirle in maniera intelligente e articolata, con gli opportuni riferimenti alla teoria. La novità dello svolgimento della prova è il tempo: 6 ore, una in più rispetto agli anni precedenti, (e rispetto alla prova di ordinamento), scelta equilibrata del Ministero, se pensiamo che gli studenti dell'indirizzo sperimentale, con 5 ore di matematica nel triennio, devono svolgere un programma più ampio dei loro colleghi del tradizionale.

<sup>1</sup> Nel Brocca scientifico-tecnologico la prova era di fisica, innovativa e bella rispetto a quelle degli anni passati, per l'articolazione delle domande.

**Il primo problema è di geometria analitica**, con l'analisi per lo studio di una funzione con modulo, il calcolo di un'area e la stesura di una procedura e di un programma per il calcolo delle soluzioni approssimate di un'equazione.

**Il secondo problema è di geometria euclidea** dello spazio, in cui si possono utilizzare le trasformazioni (omotetie o similitudini), trattandosi di una proiezione da un punto su piani paralleli. Anche qui è presente uno studio di funzione, con limitazioni geometriche, mentre l'ultimo quesito (punto e) è molto interessante, perché richiede di determinare la posizione di un punto in modo da minimizzare la somma di due segmenti. Il quesito può essere risolto utilizzando l'algebra applicata alla geometria, riportandosi a una funzione e quindi usando il calcolo delle derivate, oppure tramite l'uso della geometria e della trigonometria, scegliendo la posizione del minimo come quella che rende rettilinea una spezzata (come la dimostrazione di alcuni classici problemi di minimo in geometria).

**Il terzo problema chiede allo studente** di prendere in considerazione tre trasformazioni del piano, comporre e analizzare della composta le proprietà più significative. Gli ultimi due quesiti possono essere svolti molto velocemente se si utilizzano le proprietà delle similitudini (visto che la trasformazione da studiare è una similitudine), risparmiando così calcoli lunghi e noiosi. I risultati sulle curve trasformate si ottengono lavorando sulle curve di partenza e utilizzando il rapporto di similitudine.

**I tre problemi del liceo scientifico** (sia di ordinamento che sperimentale) sono articolati in quesiti (quasi tutti) dipendenti tra loro, mediamente graduati per difficoltà. Probabilmente tale scelta è dettata da due ordini di motivi: da una parte, quello di valutare col massimo del punteggio quegli studenti che riescono a condurre a termine gli esercizi, quindi dimostrano la capacità di risolvere problemi di una certa complessità e di graduare il punteggio per quegli studenti più in difficoltà, che risolvono i primi quesiti di ogni problema; dall'altra impedire ai ragazzi di saltare da un quesito all'altro, come sarebbe possibile nel caso di quesiti indipendenti. Un'altra caratteristica del compito, che richiede lo svolgimento di due problemi su tre, è quella di avere paragonabili per difficoltà non solo i problemi, ma anche i cinque quesiti in cui i problemi sono suddivisi: in sede di valutazione una strutturazione omogenea di ciascun quesito facilita la valutazione della prova.



## PER UNA PEDAGOGIA DEL SAPERE

### Tèlo e lo studio

contributi di: C. Laneve - L. Perla  
- R. Vasallucci - R. Pagano  
- G. Bertagna - D. Nardelli

cod. 9739, pp. 208, L. 30.000

L'obiettivo del libro è di alimentare la riflessione sul rapporto studio-sapere, richiamarne alcune necessità, avvertire l'urgenza di superare le soluzioni indotte dalla routine.

### SOMMARIO

**1. Il sapere della mente:** *Le patologie dell'intelletto - Le qualità - La verità come senso di marcia - Implicazioni pedagogico-didattiche* - **2. Il sapere come passione:** *Una frattura solo apparente - Per una educazione alla passione del sapere* - **3. Il sapere del corpo e attraverso il corpo:** *Il corpo costruttore di categorie gnoseologiche - L'essere all'origine del fare - Le prigioni del sapere - Un sapere «umano»* - **4. Il sapere come memoria:** *Dall'«ars memoriae» alla pedagogia della memoria - Educare al sapere come memoria - Per una pedagogia della memoria* - **5. Il sapere come tecnica:** *Sapere e nuove tecnologie - Il sapere tecnico - Ambivalenza del sapere come tecnica - I limiti intrinseci del sapere come tecnica - L'assolutizzazione del sapere come tecnica - Il sapere come antitecnica* - **6. Il sapere come humanitas:** *Il significato di humanitas - Le immagini dell'humanitas.*

EDITRICE LA SCUOLA

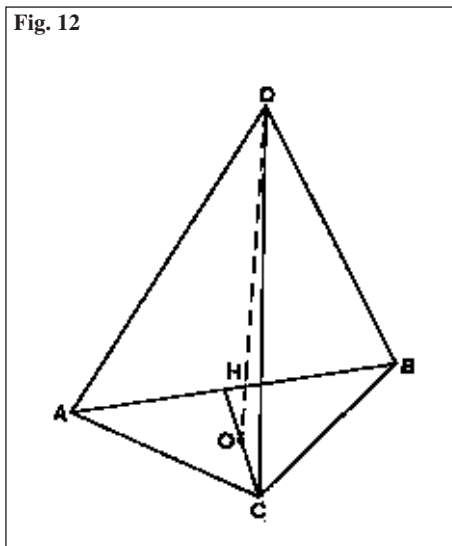
NS99 6C

## Istituto Magistrale

### Prima questione

Conoscendo l'altezza del tetraedro regolare, occorre determinare il lato per ottenere il volume. Indicata con  $3x$  l'altezza di una faccia, con  $x$  il segmento  $HO$  (figura 12), dove  $O$  è il piede dell'altezza  $DO$ . Il lato  $BC$ , espresso in funzione di  $x$ , diventa  $2x\sqrt{3}$ . Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo  $DOC$ , si ottiene  $x = \sqrt{\frac{3}{8}}$  cm, da cui  $\overline{BC} = \frac{3}{\sqrt{2}}$  cm. Il volume del tetraedro risulta perciò:  $\frac{8}{9}$  cm<sup>3</sup>.

Fig. 12



Il volume occupato dall'oro è:  $0,75 \cdot \frac{9}{8}$  cm<sup>3</sup> =  $\frac{27}{32}$  cm<sup>3</sup> = 0,84 cm<sup>3</sup>.

Per determinare quanto oro occorre (la massa, che indicheremo con  $m$ ) per la realizzazione del gioiello conoscendo il volume (che indichiamo con  $V$ ), bisogna conoscere la densità

( $\delta$ ) dell'oro. La relazione è:  $\delta = \frac{m}{V}$ . La densità è un numero che ha come unità di misura, nel Sistema Internazionale, S.I., kg/m<sup>3</sup>, essendo il rapporto tra una massa e un volume, quindi non è un numero puro. Il peso specifico è invece il rapporto tra il peso (che, essendo una forza, si misura in newton) e il volume, quindi nel S.I. si misura in N/m<sup>3</sup> e si ottiene dalla densità moltiplicando per 9,8, perché la massa di 1 kg ha un peso di 9,8 N. Detto ciò, la densità dell'oro vale  $19,32 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, (mentre il

Il candidato risolva le seguenti questioni:

**1.** Un gioiello è stato realizzato prevalentemente in oro (peso specifico = 19,32) e la sua forma geometrica è un tetraedro regolare di altezza  $\sqrt{3}$  cm. L'oro impiegato nella realizzazione del gioiello occupa il 75% del volume del tetraedro. Quale è stato il costo dell'oro se la sua quotazione al momento della realizzazione era di 8,35 euro per grammo?

**2.** Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:

a) Dovendo sommare più prodotti con un fattore comune, possiamo moltiplicare questo per la somma degli altri.

b) Se la somma dei reciproci di due numeri positivi è 1, la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto.

c) Una coppia di rette sghembe è data da due rette non incidenti.

peso specifico dell'oro si ottiene dalla densità moltiplicando per 9,8 e si misura in N/m<sup>3</sup>). Il dato riportato dal testo ministeriale (19,32) rappresenta non il peso specifico, ma la densità, in unità di misura non del S.I., bensì in g/cm<sup>3</sup>. Allora, moltiplicando la densità per il volume dell'oro, si ricava la sua massa in grammi:  $m = \delta \cdot V = 19,32 \text{ g/cm}^3 \cdot 0,84 \text{ cm}^3 = 16,2 \text{ g}$ .

È immediato ottenere il costo dell'oro, moltiplicando la massa per il costo unitario: circa 136 euro.

### Seconda questione

a) Il primo quesito è vero, essendo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma (è scontato che si tratta di una situazione in cui vale, ossia campi numerici e algebrici)  $ab + ac + ad + \dots = a(b + c + d + \dots)$ .

b) È vero che, dati due numeri positivi  $a$  e  $b$ , tali che  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , allora discende che  $\frac{a+b}{ab} = 1$ , ossia  $a + b = ab$ .

c) Due rette sghembe nello spazio è vero che non sono incidenti, però bisogna aggiungere che non appartengono allo stesso piano, altrimenti si tratta di due rette parallele. Quindi il quesito non è corretto.