



MATEMATICA

1. Commenti critici

Ferdinando Arzarello

Le prove di matematica qui commentate, per la maturità scientifica, magistrale e tecnica commerciale si differenziano significativamente, non solo per i temi proposti che, come è ovvio, sono diversi, a seconda del tipo di scuola, ma anche per le metodologie di lavoro e di approccio ai saperi che implicitamente presuppongono nei tipi di scuole esaminati. Tali metodologie appaiono dipendere da due fattori non sempre convergenti: da un lato il peso della tradizione più o meno recente, dall'altro le esigenze di innovazione che il lavoro di sperimentazione porta avanti nella scuola, ormai da molti anni, con la presenza crescente di prove di maturità «sperimentali», che non vengono qui prese in considerazione, in quanto per queste occorrerebbe un commento specifico e fortemente differenziato da quello per le maturità ordinarie.

Maturità scientifica

La prova dello scientifico (v. a pag. 59) è molto standard; il pregio, ma questa non sembra essere una novità recentissima, né solo di questa prova, è di spezzare il problema in vari quesiti, non dipendenti l'uno dall'altro, oppure quando lo sono, si esplicita la risposta al quesito precedente, in modo da non danneggiare il lavoro dell'allievo, bloccandolo al primo punto per molte ore, con l'impossibilità di proseguire. La disponibilità di tre prove tra cui sceglierne due è anche un aspetto positivo, che ovviamente richiede agli allievi la capacità di scegliere opportunamente quelle in cui ci si sente più preparati (anche se a dire il vero le prove sono molto simili), tralasciando le altre. Per riuscire a fare ciò si richiede che gli allievi abbiano maturato capacità opportune: è un suggerimento metodologico importante di cui i colleghi dovrebbero tenere conto; nelle lezioni ed esercitazioni di matematica le capacità meta-cognitive concernenti le proprie conoscenze vanno coltivate e occorre farne prendere coscienza agli allievi con una didattica opportuna. Esse infatti risultano di fondamentale importanza per il successo nella prova. Ciò non deve stupire, in quanto è tipico di molte prestazioni matematiche, ad es., l'attività risolutiva di problemi; la ricerca didattica ha dimostrato ampiamente che chi ha successo nella soluzione di problemi, ha un alto controllo metacognitivo su quanto sta facendo: non si tratta solo di sape-

re ma di come si controlla il proprio sapere. Il guaio è che in classe la nostra didattica raramente è centrata su questi aspetti.

Più specificatamente, entrando nel merito dei tre temi, si può dire che, come di consueto, lo studio di funzione è quello dominante; bisogna dare atto all'estensore dei quesiti che si è cercato di affrontare questo argomento con domande che fanno riferimento ad abilità non del tutto banali nella manipolazione delle formule. Tali abilità sono perfettamente alla portata degli allievi, purché abbiano fatto un tirocinio adeguato nella scuola. In questo caso, è favorito chi è stato abituato a risolvere i problemi e a trattare le formule non soltanto in modo meccanico, ma «guardando avanti» verso ciò cui si vuole o conviene arrivare. Ciò emerge in tutt'e tre i temi. Nel primo, si richiede una gestione intelligente dei due parametri a , b : un'eventuale rinominalizzazione del parametro a come $-k^2$ può rendere più controllabili i calcoli per l'allievo, nel caso che interessa studiare (in tal modo si evita un simbolo come $-a$, non sempre maneggevole, soprattutto per quanto riguarda i segni); analogamente nel calcolo dei valori di a , b richiesti al punto b), non conviene sviluppare ciecamente la formula che si ottiene (altrimenti si rischia di finire in un'equazione di grado 3, che può essere bloccante).

Maturità magistrale

Si tratta di due questioni che bene illustrano le due tendenze che dicevo in premessa; ma queste purtroppo non si compenetrano così come succede alla sfera messa nel vaso di cui al quesito n. 1. Nella maturità magistrale, per tradizione si davano problemi su solidi geometrici variamente costruiti e disposti, dei quali, fin dai tempi più remoti si chiede di calcolare volumi, aree delle superficie laterali e quant'altro, richiedendo ai maturandi l'applicazione di formule varie in contesti tridimensionali che esigono a volte l'esercizio di capacità legate all'immaginazione spaziale e sempre l'uso del teorema di Pitagora oppure di Euclide (primo o secondo). Ciò teneva giustamente conto della fragile preparazione matematica prevista dai programmi (parliamo sempre di quelli di ordinamento e non di

quelli sperimentali) e della preparazione prevalentemente mnemonica, per formule, che viene data agli allievi (si parla in generale, escludendo la minoranza di quegli insegnanti valorosi e competenti che fanno l'esatto opposto). D'altra parte, i progetti innovativi portano avanti da anni critiche a questi metodi ripetitivi, che sono la morte del pensiero creativo e finiscono per fare odiare la matematica a molti, riuscendo ad insegnarla a pochi. Ad es., da decenni, ispirandosi a progetti di insegnamento sperimentati sia in Italia che all'estero, si sottolinea l'importanza di proporre agli allievi problemi significativi che li coinvolgano più in profondità; si sottolinea la necessità di aprire la matematica scolastica alla vita reale, affrontando in modo opportuno in aula il tema dei modelli matematici della realtà, della sua matematizzazione, ecc.

Ebbene, nelle intenzioni, questo problema suppone di porre un problema di matematizzazione del reale, ma nei fatti propone una caricatura mal fatta di una questione di tal natura. Il testo del problema infatti è ridicolo e tragico nello stesso tempo. È ridicolo perché pone male un problema pseudo-reale: i quesiti posti oscillano fra la matematica degli apotemi e della tradizione – che però se non altro aveva creato un campo di problemi fittizio ma molto preciso e chiaro per gli allievi, per quanto riguarda il linguaggio della consegna – e una pseudo-fisica che c'è e non c'è. La sfera della matematica nel pro-

Maturità magistrale

Il candidato risolva le seguenti questioni:

1. In una sala ben arredata fa bella mostra di sé un vaso il cui interno ha la forma di un cono circolare retto di apotema 30 cm e altezza 24 cm.

Nel vaso è adagiata una sfera che tocca le pareti del cono ad una distanza di 10 cm dal vertice,

- si calcoli il raggio della sfera;
- si dica, data anche l'impenetrabilità della sfera, se nel vaso possono essere versati sei litri di acqua e, nel caso affermativo, l'altezza, approssimata ai decimi di millimetro, da questa raggiunta

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:

- a) se in un triangolo isoscele la base è la sezione aurea del lato, l'angolo al vertice è un quinto d'angolo piatto;
- b) la somma delle facce di un angoloide è minore od uguale ad un angolo giro;
- c) perché due numeri a , b ($a \geq b$) divisi per un terzo numero k diano resti uguali, è necessario e sufficiente che la loro differenza sia divisibile per k .

2. Maturità magistrale - Soluzione del problema

Nerina Rumi

1) Dati (v. Fig. 1):

- $\overline{VA} = 30$ cm
- $\overline{VP} = 24$ cm
- $\overline{VH} = 10$ cm

si chiede:

- $\overline{OH} = \text{raggio}_{\text{SFERA}} = ?$
- nel vaso possono essere versati 6 litri di acqua?
- qual è l'altezza da essa raggiunta?

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo VPA, calcolo AP:

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{VA}^2 - \overline{VP}^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18 \text{ cm.}$$

I due triangoli VPA e VHO sono *simili*, perché hanno gli angoli ordinatamente congruenti:

$$\begin{aligned} \widehat{VPA} &= \widehat{VHO} = 90^\circ \\ \widehat{APV} &= \widehat{OHV} \text{ (in comune)} \\ \rightarrow \widehat{VAP} &= \widehat{VOH}. \end{aligned}$$

Perciò i lati dei triangoli VPA e VHO sono tra loro proporzionali:

$$\begin{aligned} \overline{VP} : \overline{AP} &= \overline{VH} : \overline{OH} \\ 24 : 18 &= 10 : \overline{OH} \\ \overline{OH} &= \frac{18 \cdot 10}{24} = 7,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Supponiamo che la sfera, posta nel vaso conico, faccia da «tappo», impedendo all'acqua versata di scendere nel volume sottostante. Nel vaso potranno perciò essere versati 6 litri d'acqua, corrispondenti a 6 dm³, se il volume superiore del vaso avrà volume $V \geq 6$ dm³.

Calcoliamo il volume V.

Il volume V è pari al volume del tronco di cono di raggi PA e QH, ed altezza PQ, a cui venga sottratto il volume del segmento sferico a una base, di altezza SQ e base di raggio QH:

$$V = V_{\text{TRONCO CONO}} - V_{\text{SEGMENTO SFERICO}} =$$

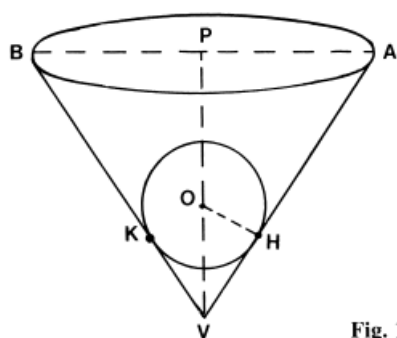


Fig. 1

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \pi \overline{PQ} (\overline{PA}^2 + \overline{QH}^2 + \overline{PA} \cdot \overline{QH}) - \\ &\quad - \frac{1}{3} \pi \overline{QS}^2 \cdot (3\overline{OH} - \overline{QS}). \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi determinare $\overline{QH}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QS}$. Per determinare $\overline{QH}$, consideriamo i due triangoli simili VPA e VQH:

$$\overline{VA} : \overline{VH} = \overline{PA} : \overline{QH} \quad 30 : 10 = 18 : \overline{QH} \rightarrow \overline{QH} = \frac{10 \cdot 18}{30} = 6 \text{ cm.}$$

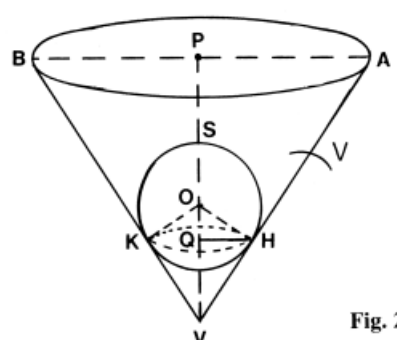


Fig. 2

Quindi, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OQH:

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{QH}^2} = \sqrt{(7,5)^2 - 6^2} = \\ &= \sqrt{20,25} = 4,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHV:

$$\begin{aligned} \overline{OV} &= \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{VH}^2} = \sqrt{(7,5)^2 + 10^2} = \\ &= \sqrt{156,25} = 12,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \overline{QS} &= \overline{OQ} + \overline{OS} = (4,5 + 7,5) \text{ cm} = 12 \text{ cm} \\ \overline{QV} &= \overline{OV} - \overline{OQ} = (12,5 - 4,5) \text{ cm} = 8 \text{ cm} \\ \overline{PQ} &= \overline{PV} - \overline{QV} = (24 - 8) \text{ cm} = 16 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Il volume V misura perciò:

$$\begin{aligned} V &= \left[\frac{1}{3} \pi \cdot 16 \cdot (18^2 + 6^2 + 18 \cdot 6) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot (3 \cdot 7,5 - 12) \right] \text{ cm}^3 = \\ &= 1992\pi \text{ cm}^3 = 6258,052566 \text{ cm}^3 = \\ &= 6,258052566 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Poiché: $V > 6$ dm³, nel vaso possono essere versati 6 litri d'acqua.

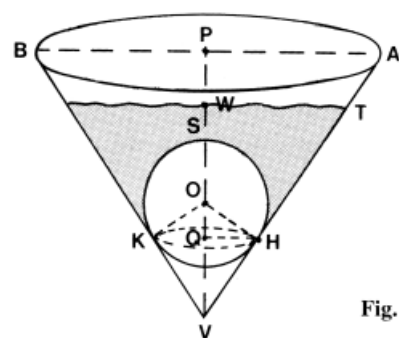


Fig. 3

Dobbiamo determinare il valore dell'altezza $\overline{VW}$ raggiunta dall'acqua.

Poniamo $\overline{VW} = x$

da cui: $\overline{PW} = 24 - x$.

Per determinare $\overline{WT}$ in funzione di x applichiamo la similitudine ai triangoli PAV e WTV:

$$\overline{PA} : \overline{PV} = \overline{WT} : \overline{VW} \quad 18 : 24 = \overline{WT} : x \rightarrow \overline{WT} = \frac{18}{24}x = \frac{3}{4}x.$$

Il cono di altezza $\overline{VW}$ e raggio $\overline{WT}$ ha volume:

$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3} \pi \overline{WT}^2 \cdot \overline{VW} =$$

blema sembra diventare un oggetto concreto, tipo una boccia, con una sua brava massa immersa nel campo di gravità terrestre; il cono diventa un vaso, viene riempito d'acqua; la sfera-boccia tocca il vaso-cono: significa che gli è tangente prima di versare l'acqua? Ma fin qui tutto correrebbe: il guaio è che nel problema non si passa mai decisamente alla fisica, il che andrebbe benissimo per capire che cosa capita. Infatti non è molto chiaro quel che succede dopo: la

sfera-boccia, anche supponendo che all'inizio chiuda ermeticamente la parte sottostante del vaso, versando l'acqua sarà sottoposta alla spinta di Archimede, quindi potrebbe ad un certo punto galleggiare (dipende dalla sua massa appunto: plastica o marmo?); ma se galleggia, l'acqua passa anche dalla parte di sotto e la spinta di Archimede può cambiare. Ma non è ciò ad essere chiesto agli allievi; in realtà loro devono solo «far finta che» si tratti di un problema di modellizzazione del

reale; in realtà basta che decontestualizzino dalla situazione, che è un elemento di disturbo e tornino a risolvere il problema come quelli più tradizionali. Credo quindi che il testo possa avere creato disorientamento tra gli allievi; spero per loro che così non sia stato (le alte percentuali di promossi, se dobbiamo credere ai numeri, lo confermerebbero): i nostri allievi sono abituati da lungo tempo a queste recite scolastiche, in cui li si ammaestra a rispondere nel modo voluto

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot x = \frac{3}{16}\pi x^3$$

e tale volume vale:

$$V_1 \text{ (volume ACQUA versata = 6 dm}^3\text{)} + V_2 \text{ (volume segmento sferico di altezza QS e raggio QH)} + V_3 \text{ (volume CONO di altezza VQ e raggio QH)}$$

con:

$$V_1 = 6 \text{ dm}^3 = 1,909859\pi \text{ dm}^3$$

$$V_2 = \left[\frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot (3 \cdot 7,5 - 12) \right] \text{ cm}^3 = 504\pi \text{ cm}^3 = 0,504\pi \text{ dm}^3.$$

$$V_3 = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \right) \text{ cm}^3 = 96\pi \text{ cm}^3 = 0,096\pi \text{ dm}^3.$$

Quindi:

$$\frac{3}{16}\pi x^3 = 1,909859\pi + 0,504\pi + 0,096\pi$$

$$x^3 = \frac{16}{3} \cdot 2,509859 = 13,38591637$$

$$x = \sqrt[3]{13,38591637} = 2,374375 \text{ dm} = 23,7437 \text{ cm}.$$

L'altezza $\overline{VW}$ raggiunta dall'acqua vale:

$$\overline{VW} = 23,7437 \text{ cm, approssimata al decimo di mm.}$$

2) Stabilire se i seguenti enunciati sono veri, motivando esaurientemente la risposta:

a) Se in un triangolo isoscele la base è la sezione aurea del lato, l'angolo al vertice è un quinto d'angolo piatto.

L'enunciato è vero.

Tale enunciato è l'inverso del teorema, facilmente dimostrabile e che assumiamo come vero, che afferma che, se in un triangolo isoscele l'angolo al vertice è di

$36^\circ = \frac{1}{5} 180^\circ$, allora la sua base è la sezione aurea del suo lato:

$$\text{ip) } \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{ACB} = 36^\circ$$

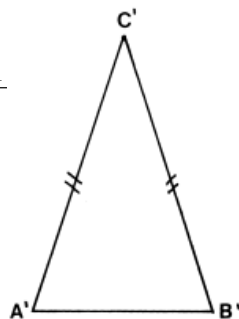
$$\text{ts) } \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

(Assumendo il lato come raggio di una circonferenza, ne consegue che la base rappresenta il lato del decagono regolare inscritto in tale circonferenza).

Considero ora un triangolo isoscele $A'B'C'$, di cui non conosco il valore degli angoli, ma di cui so che la base è sezione aurea del lato, cioè:

$$\text{ip) } A'C' = A'B' \quad \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{ts) } A'\hat{C}'B' = 36^\circ$$



Confrontando i due triangoli isosceli, si avrà:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\overline{AB}}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

I due triangoli isosceli, avendo i lati direttamente proporzionali, sono quindi tra loro simili (per il 3° criterio di similitudine dei triangoli), e avranno perciò gli angoli congruenti.

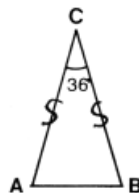
Quindi:

$$A'\hat{C}'B' = A\hat{C}B = 36^\circ. \text{ c.v.d.}$$

b) La somma delle facce di un angoloide è minore od uguale ad un angolo giro.

L'enunciato è vero.

Si tratta di un noto teorema di geometria dello spazio, la cui dimostrazione è riportata su qualunque manuale scolastico.



c) Perché due numeri a, b ($a \geq b$) divisi per un terzo numero k diano resti uguali, è necessario e sufficiente che la loro differenza sia divisibile per k .

L'enunciato è vero. Infatti:

C.N. Se a e b divisi per k danno resti uguali, allora la loro differenza è divisibile per k .

$$\text{Sia: } a = q_1k + r_1 \\ b = q_2k + r_2$$

con $r_1 = r_2 = r$ per ipotesi; perciò:

$$a = q_1k + r \\ b = q_2k + r$$

allora:

$$a - b = q_1k + r - q_2k - r \\ a - b = (q_1 - q_2)k$$

e quindi $a - b$ è divisibile per k .

C.S. Se $(a - b)$ è divisibile per k , allora a e b , divisi per k , danno resti uguali.

$$\text{Sia: } a - b = nk \\ \text{da cui: } a = b + nk.$$

Dividendo a e b per k si avrà:

$$a = q_1k + r_1 \\ b = q_2k + r_2$$

ma: $a = b + nk$, perciò:

$$b + nk = q_1k + r_1 \\ \text{cioè: } b = (q_1 - n)k + r_1.$$

Confrontando tra loro: $b = q_2k + r_2$ con $b = (q_1 - n)k + r_1$ ottengo:

$$q_2k + r_2 = (q_1 - n)k + r_1$$

da cui:

$$r_2 = r_1 \quad \text{c.v.d.}$$

Nerina Rumi

Liceo Scientifico, Palazzolo s/O (Brescia)

dall'insegnante (in questo caso dall'estensore della prova di maturità), anche se quanto dice spesso appare, ed è effettivamente, insensato.

Il tragico del tema è che i futuri maestri (il vecchio ordinamento è infatti ancora valido per i maturati del 98) escono con questo messaggio dalla scuola che li dovrebbe formare (per fortuna da quest'anno inizia il corso di laurea anche per loro): la geometria

è quella scienza dove le figure geometriche, hanno una massa, sono immerse nel campo di gravità, ma ogni tanto occorre far finta di niente se no le cose diventano troppo complicate. Adesso ho capito come mai molti maestri e professori continuano a presentare agli allievi triangoli con una sola base (la maggiore disposta orizzontalmente) e due lati obliqui: si sono preparati per superare questo tipo di prova di «maturità». Rispetto al primo, col secondo esercizio si

respira un'aura fragrante di matematica e i suoi vari difetti sono nulla rispetto a quelli appena visti: si tratta più che altro di imprecisioni che non dovrebbero aver creato disorientamento negli allievi (anche perché le stesse imprecisioni trovano nei loro libri di testo), oppure di richieste mnemoniche forse un tantino eccessive (la sezione aurea è un argomento suggestivo, ma potrebbe darsi che gli allievi non l'abbiano vista con questo o addirittura con alcun nome).

Maturità tecnica commerciale

I quesiti proposti nei primi tre temi fanno riferimento ad alcuni elementi innovativi inseriti nell'indirizzo Programmatori: la programmazione lineare, la retta di regressione lineare, problemi di scelta in condizioni probabilistiche.

Anche qui la compenetrazione con il mondo reale è relativa: per esigenze didattiche il numero dei dati e delle variabili viene di molto ridotto; comunque non si presentano i problemi che abbiamo visto nel caso della maturità magistrale: si tratta di modelli-giocattolo, ma non opposti a quelli che davvero vengono utilizzati nella realtà.

Qualche perplessità, nel terzo quesito della terza prova, desta la richiesta di discutere l'attendibilità dei risultati, per la vaghezza con cui è formulata: forse gli studenti hanno avuto giustamente delle difficoltà a rispondere. Inoltre nel testo che mi è stato fornito la tariffa 2 ha termine noto pari a 900; penso si debba leggere 900 000. Altrimenti il problema ha sempre un'unica soluzione banale (spero che l'errore sia stato corretto in sede di dettatura del testo).

Maggiore perplessità desta il problema 4, non per la sua difficoltà (anzi è facile, se gli allievi conoscono la tecnica richiesta), ma perché troppo evidentemente è stata presa una formula matematica; le è stata data un'interpretazione in cui si fa finta di parlare di modelli economici, ma tutto consiste nel dimenticarsene ed applicare le formule magiche per la soluzione. Non si tratta nemmeno di modelli giocattolo! Non siamo nel caso della boccia-sfera di cui sopra, ma non ne siamo nemmeno molto lontani.

Complessivamente, mi pare che questo genere di temi richiederebbe un atto di coraggio dal Ministero, o forse dagli insegnanti che prepareranno la terza prova. Infatti questi problemi acquistano tutto il loro spessore se si possono usare opportuni strumenti di calcolo durante l'esame: di fatto chiunque programmi o analizzi problemi fa così. In questo tipo di maturità si ammettono i calcolatori tascabili (anche programmabili penso, cosa che è proibita negli altri tipi di maturità); e già sono meglio di niente (anzi oggi ce ne sono di potentissimi). Ma è ancora poco. Inoltre, e questa è la cosa più grave, c'è il rischio, per non dire la certezza che se l'essere finto è il carattere essenziale di queste prove-giocattolo date all'esame, alla loro soluzione saranno addestrati i nostri allievi. Si coltiverà così una matematica applicata finta. Il rischio della retorica è sempre presente nella nostra scuola (non soltanto in quella): cerchiamo di non far sì che esso si diffonda anche in discipline come la matematica, che ne dovrebbero essere strutturalmente immuni. Credo che questo possa essere una meta educativa minimale da perseguire.

Ferdinando Arzarello
Università di Torino

MATEMATICA, CALCOLO
DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
Maturità tecnica commerciale

- Il candidato risolva due dei seguenti quesiti.
1. Il modello matematico di Programmazione Lineare riferito ad una certa azienda che produce gli articoli Alfa e Beta, risulta così strutturato:
- a) Funzioni obiettivo di utile
- $$z = 200.000 x_1 + 100.000 x_2$$
- b) Vincoli tecnici dipendenti dalla disponibilità di fattori (produzione settimanale)
- $$\begin{cases} 28x_1 + 7x_2 \leq 168 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ 7x_1 + 14x_2 \leq 84 \end{cases}$$
- c) Vincoli economici
- $$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il candidato, dopo aver esposto i metodi di risoluzione dei problemi di Programmazione Lineare in due e in tre variabili, proceda come segue.

1. Costruisca il grafico che evidenzi il campo di scelta di tutte le possibili soluzioni del problema.

2. Calcoli il valore di z (utile) in corrispondenza dei vertici del poligono di scelta e determini la soluzione che renda massima la funzione obiettivo.

Considerato poi che gli articoli Alfa e Beta non possono essere frazionati, il candidato ricerchi la soluzione ottima a coordinate intere. Infine, determini il grado di utilizzo dei fattori produttivi.

2. Nove studenti universitari, scelti a campione, sono stati classificati secondo i voti conseguiti in due esami differenti, tra i quali sussiste una certa relazione logica.

I dati sono riportati nella seguente tabella.

Studenti	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Voto di economia (x)	18	23	26	23	22	19	18	20	21
Voto di matematica (y)	22	21	30	18	24	18	23	19	24

Dopo aver esposto i possibili criteri per adattare una retta a rappresentare una nuvola di punti, si eseguano le seguenti elaborazioni statistiche.

1. Rappresentare il diagramma di dispersione dei voti delle due materie.

2. Determinare l'indice di correlazione lineare di Bravais-Pearson, specificandone il suo significato statistico.

3. Determinare le due rette di regressione e calcolare l'indice di determinazione.

4. Rappresentare le due rette di regressione sul grafico di cui al punto 1.

5. Sulla base del modello di regressione ottenuto, stimare il voto di matematica corrispondente al voto di economia $x = 25$ e il voto di economia corrispondente al voto di matematica $y = 27$.

3. Dopo aver trattato un metodo di risoluzione dei problemi di scelta in condizioni aleatorie si risolva il seguente problema.

Si supponga che, per la produzione di una determinata merce un'azienda possa utilizzare due differenti tariffe, date dai seguenti modelli:

Tariffa 1: $y_1 = 500x + 300.000$
Tariffa 2: $y_2 = -0,2x^2 + 700x + 900$.

L'azienda, attraverso un'accurata indagine di mercato, ha potuto stimare le probabilità di assorbimento della merce prodotta settimanalmente, come indicato nella seguente tabella.

kg di merce	500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000
Probabilità di vendita	0,1	0,05	0,15	0,25	0,3	0,15

1. Rappresentare sullo stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni delle due tariffe, sapendo che la produzione in chilogrammi può variare da zero a tremila chilogrammi compresi.
2. Determinare la tariffa più conveniente in funzione della produzione, senza tener conto delle probabilità di assorbimento del mercato.
3. Determinare, applicando il metodo del valor medio, quale delle due tariffe risulta più conveniente, tenendo conto delle probabilità di vendita e discutere l'attendibilità dei risultati ottenuti.
4. Dopo aver illustrato il metodo per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi di una funzione di due variabili soggette a vincoli espressi da equazioni lineari, risolvere il seguente problema.
- Un'impresa produce due beni A e B, che vende in un mercato di libera concorrenza. Indicate con x e y le quantità prodotte rispettivamente del bene A e del bene B, l'impresa è in grado di esplicitare la seguente funzione di costo totale di produzione
- $$C(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy$$

Sapendo che i prezzi di vendita unitari dei due beni sono di 8.000 lire per A e di 5.000 lire per B, ottimizzare il profitto globale dell'impresa.

3. Maturità scientifica

Mara Bettini

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^3 + 3x + b,$$

dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$.

a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti.

b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$.

c) Controllato che la curva γ si ottiene per $a = -\frac{1}{2}$, disegnarne l'andamento.

d) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dall'asse x .

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva C' di equazione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

a) Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva secca l'asse x ($x_A > x_B$).

b) Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B .

c) Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' secca C' .

d) Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B .

e) Calcolare le aree delle regioni in cui C' divide il cerchio delimitato da C'' .

3. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$.

a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t .

b) Verificato che risulta:

$$V(x) = \frac{1}{2} \pi a^3 (4 \sin x + 3 \cos x),$$

con x appartenente ad un determinato intervallo, studiare la funzione $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano.

c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia $k\pi a^3$, dove k è un parametro reale assegnato.

d) Completare la risoluzione dimostrando, col metodo preferito, che il volume V di un tronco di cono di raggi R ed r ed altezza h è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

b) Per determinare « a » e « b » si impongono le condizioni richieste dal testo che danno origine al seguente sistema:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right) = 0 \\ f(-2\sqrt{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-a}} + b = 0 \\ 16\sqrt{2}a + 6\sqrt{2} - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-a}} + 8\sqrt{2}a + 3\sqrt{2} = 0 \\ b = 16\sqrt{2}a + 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione del sistema si ottiene:

$8\sqrt{2}a \sqrt{-a} + 3\sqrt{2} \sqrt{-a} + 1 = 0$ che equivale a: $-4(\sqrt{-2a})^3 + 3\sqrt{-2a} + 1 = 0$ posto $\sqrt{-2a} = t$ si ottiene $4t^3 - 3t - 1 = 0$. Scomponendo si ottiene $(t - 1)(2t + 1)^2 = 0$

da cui $t_1 = -\frac{1}{2}$ e $t_2 = 1$, ma delle soluzioni solo $t = 1$ è accettabile

$$\sqrt{-2a} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

c) La funzione ottenuta risulta essere

$$y = -1/2x^3 + 3x - 2\sqrt{2}.$$

Per studiarne il comportamento si procede come al solito.

Del dominio si è già detto

• $y \geq 0$; $-1/2x^3 + 3x - 2\sqrt{2} \geq 0$ che equivale a $(x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) \leq 0$ perciò si ottiene: $y = 0$ per $x = -2\sqrt{2}$ e per $x = \sqrt{2}$ che risulta essere una radice doppia; la funzione quindi è tangente, come era prevedibile, all'asse delle ascisse.

$$y > 0 \text{ per } x < -2\sqrt{2}$$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$. La funzione non ammette asintoti di nessun tipo, come è noto dalla teoria.

• La funzione è derivabile $\forall x \in R$

$$\begin{aligned} y' &= -3/2x^2 + 3; \\ y' &\geq 0 \text{ per } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Si trovano così gli estremi relativi di cui al punto a); precisamente un massimo relativo di coordinate $(\sqrt{2}; 0)$ e un minimo relativo di coordinate $(-\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$.

• $y'' = -3x$; $y'' \geq 0$ per $x \leq 0$; la funzione presenta quindi un flesso discendente nel punto $F(0; -2\sqrt{2})$; la tangente inflessionale ha coefficiente angolare 3 (v. Fig. 1).

Primo problema

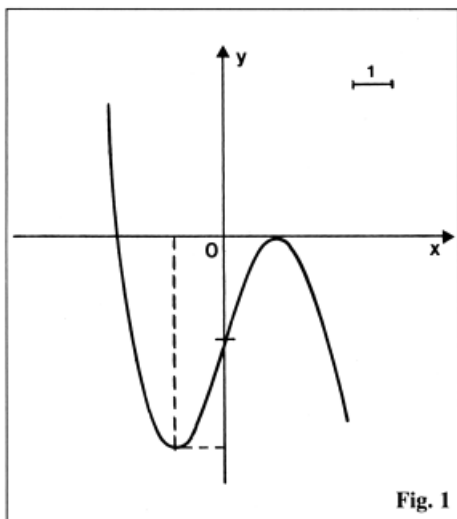
$y = ax^3 + 3x + b$ (1). Per $a \in R_0(1)$ è l'equazione di una famiglia di cubiche. Il dominio è perciò l'insieme dei numeri reali R .

a) Per determinare i valori di « a » richiesti bisogna calcolare la derivata prima della funzione (1) $y' = 3ax^2 + 3$.

Con $a > 0$ si ha $y' > 0 \forall x \in R$; la funzione è perciò crescente in senso stretto in tutto il dominio.

Con $a \leq 0$ si ha $y' \geq 0$ nell'intervallo $-1/\sqrt{-a} \leq x \leq 1/\sqrt{-a}$.

Quindi la funzione presenta un punto di minimo relativo in $x = -1/\sqrt{-a}$ e un punto di massimo relativo in $x = 1/\sqrt{-a}$.



d) Poiché la funzione nell'intervallo richiesto è non positiva, l'area richiesta è data dal seguente integrale:

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2\sqrt{2} \right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x \right]_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{27}{2}.$$

La risoluzione dei punti a) e b) richiede, in modo particolare, una conoscenza sicura e approfondita dei presupposti teorici riguardanti:

- le condizioni di esistenza dei massimi e minimi relativi di una funzione;
- la risoluzione delle disequazioni di secondo grado;
- la risoluzione delle equazioni irrazionali nonché una discreta abilità di calcolo.

Mancando anche uno solo di questi elementi non è possibile soddisfare le richieste dei primi due quesiti e quindi proseguire nella risoluzione dei punti successivi, peraltro di non difficile trattazione. È pur vero che lo studente accorto potrebbe comunque pervenire alla determinazione dei parametri «a» e «b» sfruttando le indicazioni fornite dal punto c) e da una parte del punto b), ma lo studente accorto, proprio perché tale, probabilmente è in grado di affrontare e risolvere tutto il problema correttamente, anche nella sua parte iniziale. L'alunno più debole invece, dopo essersi cimentato nella risoluzione della prima parte senza pervenire a nulla di significativo, sfiduciato e preoccupato per il tempo che passa, poco verosimilmente riesce ad intravedere le possibili alternative implicitamente suggerite dal testo.

Secondo problema

a) $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$

Si tratta dell'equazione di un'iperbole avente come dominio R_0 e come centro di simmetria l'origine del sistema di riferimento.

- $y \geq 0$ per $-1 \leq x < 0 \cup x \geq 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pm \infty$. La funzione ammette quindi come asintoto verticale l'asse delle ordinate.

La funzione ammette inoltre asintoto obliquo; la sua equazione si desume direttamente da quella della funzione scritta nella forma

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x^2}. \text{ L'equazione dell'asintoto è } y = \frac{x}{2}.$$

Per stabilire la posizione della funzione rispetto all'asintoto si può risolvere la disequazione $f(x) \geq x/2$ che ammette come soluzione $x < 0$.

- $y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$ quindi la funzione è derivabile e crescente in senso stretto per ogni x appartenente al suo dominio.

- $y'' = -\frac{1}{x^3}$ quindi la funzione volge la concavità verso il semiasse positivo delle ordinate per $x < 0$ (v. Fig. 2).

b) La circonferenza, dovendo passare per A e per B, ha il centro sull'asse del segmento AB, quindi sull'asse y. Sapendo poi che la sua tangente in A ha coefficiente angolare $f'(1) = 1$ si può dedurre che il centro, trovandosi sulla perpendicolare alla tangente in A, ha coordinate C(0,1). Il raggio CA è pari a $\sqrt{2}$. L'equazione della circonferenza è perciò $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.

c) Per determinare i punti di intersezione si risolve il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \\ y = \frac{x^2 - 1}{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2 - 2 \frac{x^2 - 1}{2x} = 0 \\ y = \frac{x^2 - 1}{2x} \end{cases}$$

Nella prima equazione si raccoglie il fattore $x^2 - 1$ che porta alle soluzioni $x_1 = -1, x_2 = 1$ già note, indi si ottiene $1 + \frac{x^2 - 1}{4x^2} - \frac{1}{x} = 0$

$$\text{che per } x \neq 0 \text{ equivale a } 5x^2 - 4x - 1 = 0$$

da cui $x_3 = 1$ (anche questa prevedibile) e

$$x_4 = -\frac{1}{5}. \text{ L'ulteriore punto di intersezione}$$

$$\text{è } D\left(-\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

d) L'angolo richiesto è quello formato dalle tangenti in B, alla circonferenza e all'iperbole. I due coefficienti angolari risultano essere $f'(-1) = 1$ quello della tangente all'iperbole e -1 il coefficiente angolare della tangente alla circonferenza in B perché, per simmetria, è pari all'opposto di quello della tangente in A.

Quindi l'angolo richiesto è retto.

e) Per determinare le aree si calcola prima la minore delle due aree richieste (S_1) e poi la maggiore (S_2).

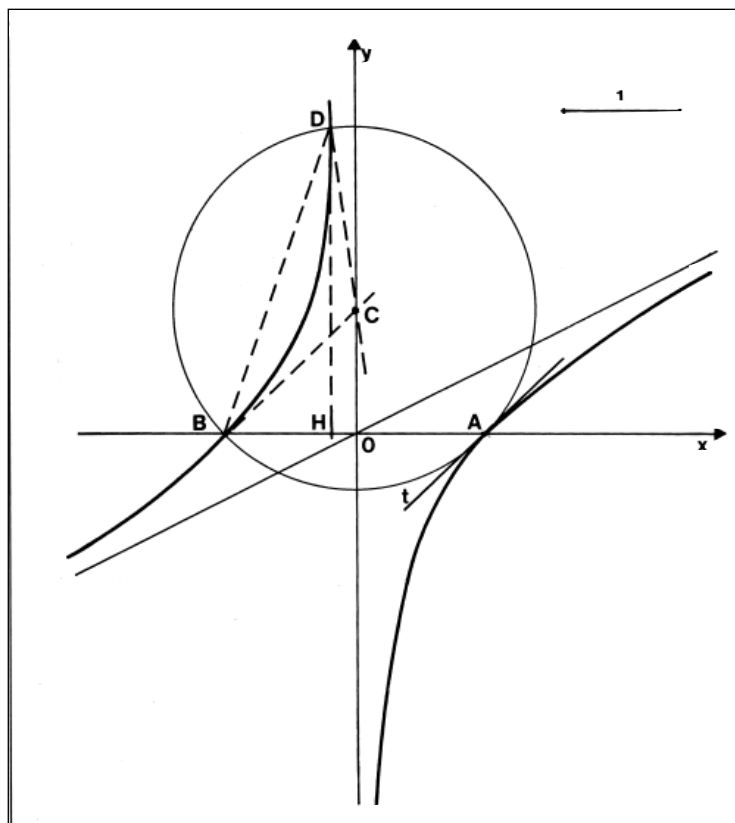


Fig. 2

Si può procedere per esempio nel seguente modo.

Si determina il coefficiente angolare delle rette BC e DC e quindi la misura espressa in radianti dell'angolo acuto α , formato dalle medesime.

$$m_{BC} = 1 \quad m_{DC} = -7 \quad \text{tg } \alpha = \frac{-7 - 1}{1 - 7} = \frac{4}{3}.$$

L'area del settore circolare riferito al minore degli angoli al centro BCD = $\pi - \alpha$ risulta così $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)r^2 = \pi - \arctg \frac{4}{3}$.

A tale area bisogna togliere quella della superficie S^* del triangolo mistilineo BCD delimitato dai raggi BC e CD e dall'arco di iperbole BD.

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{-1}^{-1/5} f(x) dx + \text{area trapezio HOCD} - \\ &\quad - \text{area triangolo BOC} = \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x| \right]_{-1}^{-1/5} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{12}{5} + 1 \right) - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{6}{25} + \frac{17}{50} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Quindi l'area richieste S_1 è pari a:

$$\pi - \arctg \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{2}{5} \quad \text{e } S_2 \text{ risulta pari a } 2\pi - S_1.$$

Si può procedere anche in un altro modo utilizzando gli integrali. Si individuano così le equazioni delle due semicirconferenze:

$$y = 1 \pm \sqrt{2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\sqrt{2}}^{-1/5} (1 + \sqrt{2 - x^2}) dx + \\ &\quad + \int_{-1/5}^1 f(x) dx + \int_{-1}^{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{2 - x^2}) dx. \end{aligned}$$

Risolviendo l'integrale della funzione irrazionale per sostituzione o per parti come indicato da un qualunque manuale e facendo le opportune sostituzioni si ottiene per S_1 il seguente valore:

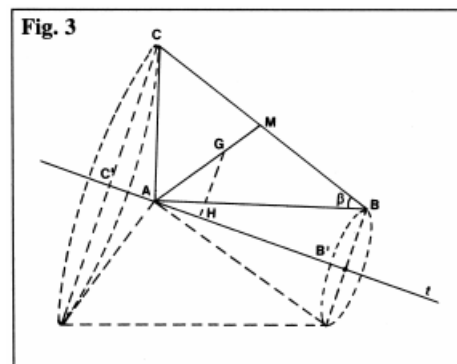
$$\frac{3}{4} \pi - \arcsen \frac{1}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{2}{5} \quad \text{che si verifica essere diverso dal precedente solo nella forma.}$$

Questo esercizio presenta una prima parte «ordinaria», eseguibile quindi correttamente da chi ha consolidato nel corso del triennio una conoscenza diligente dei contenuti fondamentali previsti dai programmi ministeriali.

Il punto e), invece, si presenta, nella sua particolarità, piuttosto insolito, laborioso nel calcolo e quindi di difficile esecuzione per uno studente liceale medio. A dimostrazione di ciò va detto che anche molte delle soluzioni proposte dai giornali hanno evidenziato errori di vario genere.

Terzo problema

a) Il volume del solido generato nella rotazione è dato da (v. Fig. 3):



$$V = \frac{1}{3} \pi \overline{B'C'} \cdot (\overline{CC'^2} + \overline{BB'^2} + \overline{CC'} \cdot \overline{BB'}) - \frac{1}{3} \pi \overline{BB'^2} \cdot \overline{AB'} - \frac{1}{3} \pi \overline{CC'^2} \cdot \overline{AC'}$$

che si riduce a:

$$V = \frac{1}{3} \pi (\overline{AB'} \cdot \overline{CC'^2} + \overline{AC'} \cdot \overline{BB'^2} + \overline{CC'} \cdot \overline{BB'} \cdot \overline{B'C'}). \quad (1)$$

Si sa che $\overline{AB} = 2a$; indicato con β l'angolo $\widehat{ABC}$, è possibile ricavare $\text{tg } \beta = 3/4$ e quindi $\overline{AC} = \overline{AB} \text{tg } \beta = a \frac{3}{2}$; $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{\cos \beta} = \frac{5}{2} a$.

Utilizzando i teoremi sui triangoli rettangoli si determinano le misure dei segmenti

$$\begin{aligned} \overline{BB'} &= 2a \sin x; \quad \overline{CC'} = 3/2 a \cos x; \\ \overline{AB'} &= 2a \cos x; \quad \overline{AC'} = 3/2 a \sin x. \end{aligned}$$

Sostituendo nella relazione (1) e facendo le opportune semplificazioni si ottiene il risultato previsto dal testo $V = 1/2 \pi a^3 (4 \sin x + 3 \cos x)$ (2) con $0 \leq x \leq \pi/2$.

Si sarebbe potuto pervenire al medesimo risultato in modo molto più rapido sfruttando il teorema di Guldino. Detta AM la mediana relativa all'ipotenusa e G il baricentro si sa che $\overline{AM} = 1/2 \overline{CB} = 5/4 a$ e che $\overline{AG} = 2/3 \overline{AM} = 5/6 a$. Detta H la proiezione di G sulla retta t si ha $\overline{GH} = \overline{AG} \sin(x + \beta) = 5/6 a \sin(x + \beta)$.

Il volume risulta quindi

$$V = 2 \pi \overline{GH} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \frac{1}{2} = 5/2 \pi a^3 \sin(x + \beta).$$

b) Lo studio della funzione può essere condotto in modo rapido, sfruttando una traslazione oppure seguendo la via usuale.

Se si opta per il primo modo, nel caso in cui si sia pervenuti alla (2), si può procedere come segue:

$$V = 2 \pi a^3 (\sin x + \frac{3}{4} \cos x) = 2 \pi a^3 (\sin x + \text{tg } \beta \cos x).$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2 \pi a^3}{\cos \beta} (\cos \beta \sin x + \sin \beta \cos x) = \\ &= \frac{5}{2} \pi a^3 \sin(x + \beta); \quad \text{con } \cos \beta = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Conviene a questo punto rappresentare la funzione $y = \sin(x + \beta)$ il cui grafico coincide con quello della funzione volume a meno del fattore di scala $5/2 \pi a^3$.

c) La richiesta di questo punto, formulata in modo non usuale e forse discutibile, ha sviato alcuni studenti. Si tratta della discussione del sistema parametrico:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} \pi a^3 \sin(x + \beta) = k \pi a^3 \\ 0 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$$

che equivale alla discussione del seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \sin(x + \beta) \\ y = 2/5 k \\ 0 \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$$

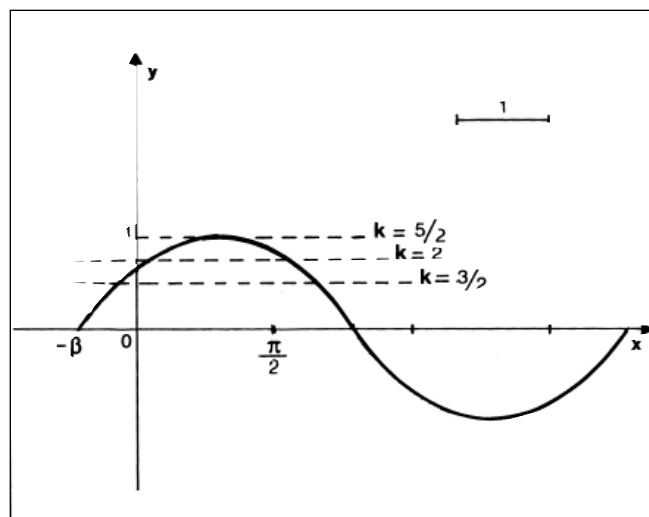
Interpretando graficamente le due equazioni si ottiene la curva di cui al precedente punto b) e un fascio di rette parallele all'asse delle ascisse (v. Fig. 4).

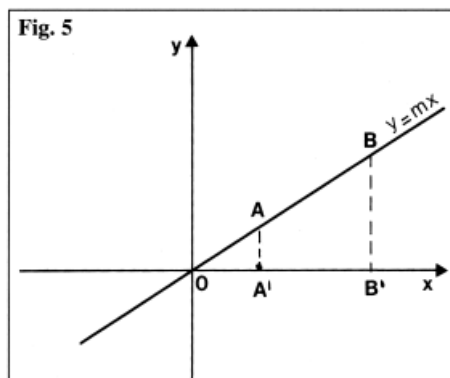
La discussione del sistema porta alle seguenti conclusioni:

un valore di x per $3/2 \leq k < 2$
due valori di x per $2 \leq k \leq 5/2$.

d) Considerata nel piano cartesiano la retta di equazione $y = mx$ (con $m > 0$) (v. Fig. 5);

Fig. 4





A e B due sui punti di ordinate rispettivamente r ed R ($R > r$), A' e B' le loro proiezioni sull'asse delle ascisse, si può considerare il tronco di cono ottenuto facendo ruotare il trapezio $A'B'BA$ attorno al suddetto asse. Quindi il volume si ottiene con il seguente integrale:

$$V = \pi \int_{r/m}^{R/m} (mx)^2 dx = \pi m^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{r/m}^{R/m} = \frac{\pi}{3m} [R^3 - r^3].$$

Ponendo $h = \frac{R-r}{m}$ risulta $m = \frac{R-r}{h}$; sostituendo e semplificando opportunamente si ottiene la formula del volume del tronco di cono.

La risoluzione del terzo esercizio richiede una buona conoscenza della goniometria e della trigonometria applicate alla geometria solida e dei presupposti teorici riguardanti la determinazione del volume dei solidi di rotazione.

Questo problema appare, nel complesso, forse il più scontato; molti studenti però, che hanno affrontato il compito partendo dall'inizio, non hanno avuto il tempo di considerarlo.

Osservazioni

Analizzando il tema in astratto si può affermare che il compito sia adeguato alla preparazione richiesta al termine di un liceo scientifico. E sicuramente lo sarebbe stato sette o otto anni fa.

Come però insegnano i principi elementari della didattica, non si può avanzare una proposta prescindendo dalla situazione reale in cui si opera. Senza attardarsi in analisi complesse e approfondite della condizione in cui si trova l'insegnamento della matematica nella scuola italiana di questi anni e delle ragioni che l'hanno prodotta, si può in sintesi affermare che, da qualche anno, anche molti dei docenti più severi sono indotti a ridurre la trattazione dei contenuti allo svolgimento semplificato di quelli essenziali e ad adeguare la cadenza del lavoro scolastico ai ritmi di apprendimento più lenti, dedicando progres-

sivamente più attenzione e tempo all'attività di recupero degli alunni in difficoltà. Gli studenti, infatti, sempre meno in grado di comprendere le ragioni di un impegno, ignorano le gravi implicazioni che può produrre sulla loro vita futura una preparazione scarsa e superficiale: il conseguimento agevole, senza fatica, del titolo di studio sembra essere, in modo più o meno esplicito, l'auspicio di molti. Ci si accontenta così di conoscenze finalizzate prevalentemente all'utilizzo meccanico delle procedure risolutive più ricorrenti e alla memorizzazione delle tecniche di calcolo. Ciò rende evidentemente sempre più ampio il divario tra la qualità della preparazione effettivamente conseguita e quella critica e approfondita padronanza di saperi che dovrebbe essere l'obiettivo realisticamente perseguibile da chi (come lo studente liceale), investito domani da responsabilità professionali di alto livello, potrebbe condizionare lo sviluppo di una nazione.

Alla luce di tali considerazioni il compito proposto va quindi ritenuto nel complesso impegnativo. Accanto alle difficoltà dei quesiti, sopra ricordate, infatti, va considerata la struttura stessa del tema, che appare organizzato in modo da sfavorire, ancora una volta, i ragazzi più fragili. Il primo problema presenta, come si è già detto, uno «sbarramento iniziale» non indifferente. E a poco varrebbe osservare che se il primo quesito risultava difficile lo studente avrebbe potuto scegliere il secondo e il terzo: le difficoltà di un esercizio di matematica, nella maggior parte dei casi, non sono rilevabili *ex ante*, si rivelano solo risolvendolo ed è d'altronde naturale che lo studente inizi ad affrontare il compito a partire dal primo problema proposto. Il fatto di non riuscire a produrre risultati accettabili nella fase iniziale della prova, tra l'altro, oltre a scoraggiare psicologicamente il candidato, può alimentare in lui confusione, ostacolando così la produzione corretta della parte successiva. Se poi un'interpretazione restrittiva dell'indicazione ministeriale riguardante la possibilità di scegliere la risoluzione di due dei tre quesiti induce qualche commissione (come è accaduto) a valutare solo lo svolgimento di due esercizi o parti di essi, è facile immaginare quanto possa diventare arduo riuscire a conseguire una valutazione sufficiente.

A questo punto la contraddizione pare chiara: da un lato la preparazione conseguita da molti studenti, mediamente di livello piuttosto basso, e dall'altro una prova conclusiva del ciclo di studi che sembra ignorare lo stato delle cose.

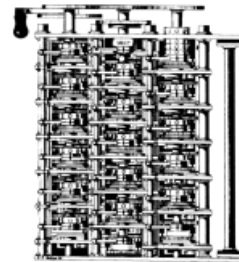
Detto questo, l'auspicio non è che i prossimi esami siano più facili, bensì che la scuola del futuro sia di qualità migliore. Conforta comunque il fatto che questo sia stato l'ultimo appuntamento con «l'esame di maturità». Non rimane che sperare nel nuovo.

Mara Bettini

Liceo Scientifico «N. Copernico», Brescia

4. Piano Nazionale Informatica

Alfredo Marzocchi



La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $A(-1,0)$ e $B(1,0)$.

Il candidato:

a) scriva l'equazione di Γ_1 , luogo dei punti per cui è uguale a $2\sqrt{2}$ la somma delle distanze da A e da B , l'equazione di Γ_2 , luogo dei punti per cui è uguale a $\sqrt{2}$ la distanza da B ;

b) verifichi che Γ_1 e Γ_2 hanno due punti C e D in comune e dimostri che CBD è un triangolo rettangolo;

c) determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva Γ_1 rispetto all'asse delle ordinate, l'area della regione finita di piano S delimitata dagli archi di Γ_1 e di Γ_2 appartenenti al semipiano di equazione $y \geq 0$ e dai segmenti VW e $V'W'$, essendo V, V' e W, W' i punti d'intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con Γ_1 e con Γ_2 (V e W di ascissa positiva);

d) considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione $f(x)$ che esprime l'area della sezione di T con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per il punto $P(x,0)$, distinguendo le varie posizioni di P , e disegni la curva Λ di equazione $y = f(x)$;

e) dica cosa rappresenta per il solido T l'area della parte di piano compresa tra Λ e l'asse delle ascisse.

2. Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}$$

Il candidato:

a) dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni;

b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r , s , t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione;

c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo;

d) in tale condizione, fissato $h = 1$, studi come varia l'area s del triangolo al variare di k e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'ks$, la curva di equazione $s = s(k)$.

3. Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 metri ed il diametro della sezione di 4 centimetri. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media $m_1 = 5$ m e scarto standard $\sigma_1 = 4$ cm. Il diametro della sezione è una variabile aleatoria, indipendente dalla precedente, e con distribuzione normale di media $m_2 = 4$ cm e scarto standard $\sigma_2 = 0,8$ cm.

Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra 4,95 m e 5,05 m e la sua sezione tra 2,8 cm e 5,2 cm.

La tavola della funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata è, per alcuni valori, la seguente:

Ascissa : x	$F(x)$
-1,50	0,067
-1,45	0,074
-1,35	0,089
-1,25	0,106
-1,15	0,125
-1,05	0,147
-0,95	0,171
+0,95	0,829
+1,05	0,853
+1,15	0,875
+1,25	0,894
+1,35	0,912
+1,45	0,927
+1,50	0,933

Il candidato:

a) verifichi che la probabilità p di poter mettere in vendita senza modifiche una generica barra prodotta è 0,68;

b) indicata con f_n la frequenza relativa alle barre direttamente vendibili su n barre prodotte, esprima, in funzione di p , la numerosità n necessaria perché la probabilità che f_n disti da p più di 0,05 sia non superiore a 0,05;

c) dato il valore di p rilevato in a), se su

2000 barre prodotte 1000 risultano non direttamente vendibili, dica se si può sospettare che la macchina non funzioni più secondo lo standard riportato sopra, se, cioè, il risultato ottenuto risulta a priori poco probabile (probabilità inferiore a 0,05) subordinatamente alle modalità di funzionamento della macchina, come indicato;

d) descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità di ottenere la prima barra direttamente vendibile solo all' n -esima prova, al variare di p e di n , e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

Primo quesito

a) Con riferimento alla figura 1, osserviamo che Γ_1 non è altro che un'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avente fuochi $A(-1,0)$, $B(1,0)$ e semiasse pari a $2\sqrt{2}$. Dunque si deve avere $2a = 2\sqrt{2}$, ossia $a = \sqrt{2}$. Poiché i fuochi si trovano sull'asse delle ascisse, si deve anche avere

$$a^2 - b^2 = c^2 = 1$$

da cui $b^2 = 1$. Dunque troviamo che Γ_1 ha equazione

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \quad (1)$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti, dopo calcoli molto più lunghi, imponendo al generico punto $Q(x,y)$ di Γ_1 la condizione

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \overline{QA} + \overline{QB} = 2\sqrt{2}.$$

Per quanto riguarda Γ_2 , essa è chiaramente la circonferenza di centro B e raggio $\sqrt{2}$, di equazione

$$(x-1)^2 + y^2 = 2, \text{ ossia } x^2 + y^2 - 2x = 1. \quad (2)$$

b) Intersecando le due precedenti equazioni troviamo il sistema

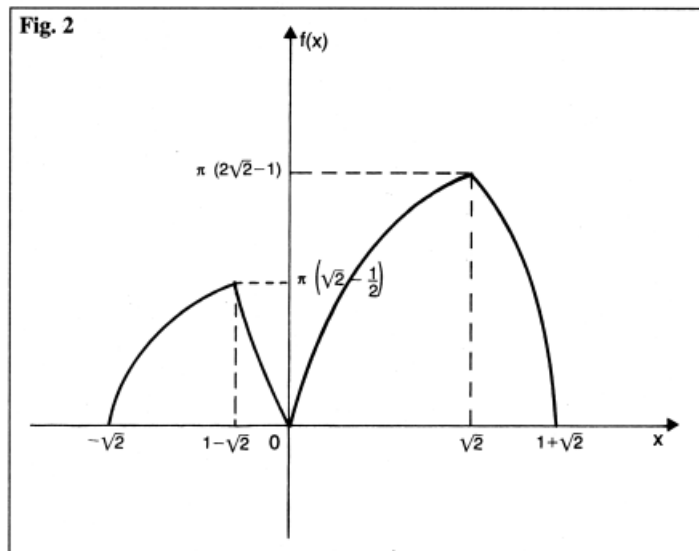
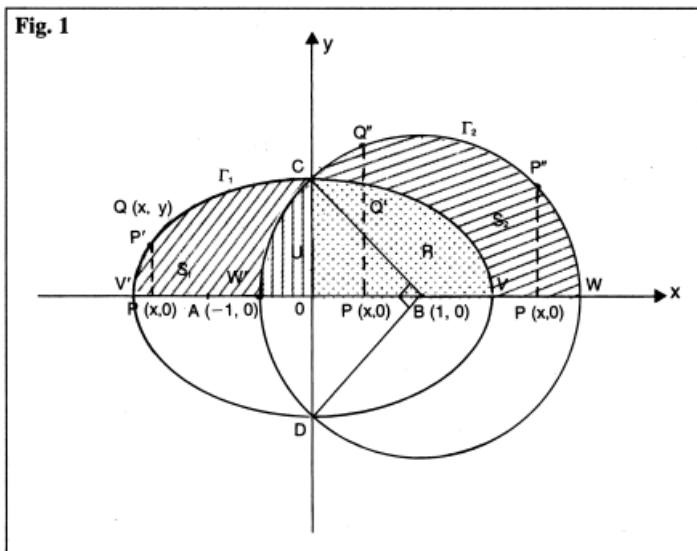
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x = 1 \end{cases}$$

da cui, sottraendo, giungiamo all'equazione

$$\frac{x^2}{2} - x^2 - 2x = 0$$

che è equivalente a

$$x^2 - 4x = 0$$



e che ammette soluzioni $x = 0, x = 4$. Sostituendo questi valori nel precedente sistema, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y^2 = -7 \end{cases}$$

da cui si vede subito che gli unici punti di intersezione sono $C(0,1)$ e $D(0,-1)$. Osserviamo ora che

$$\overline{CD} = 2, \quad \overline{CB} = \overline{DB} = \sqrt{2}$$

per cui nel triangolo CBD vale la relazione

$$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{DB}^2$$

che implica, per il teorema inverso del teorema di Pitagora, che CBD è un triangolo rettangolo. (Naturalmente si poteva anche constatare che la retta CB , di coefficiente angolare -1 , e la retta DB , di coefficiente angolare $+1$, sono perpendicolari).

c) Calcoliamo le coordinate di V, V', W, W' . Ponendo $y = 0$ nelle (1) e (2) troviamo

$$\frac{x^2}{2} = 1 \quad \text{per le ascisse di } V, V'$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{per le ascisse di } W, W'.$$

Risolvendo queste due equazioni si giunge a

$$\begin{matrix} V'(-\sqrt{2}, 0) & W'(1-\sqrt{2}, 0) \\ V(\sqrt{2}, 0) & W(1+\sqrt{2}, 0). \end{matrix}$$

Sempre con riferimento alla figura 1, osserviamo allora che W' è interno all'ellisse di bordo Γ_1 e V interno alla circonferenza di bordo Γ_2 . A questo punto indichiamo con S_1 la parte di S giacente nel semipiano $\{x < 0\}$ e con S_2 la parte restante, ossia giacente nel semipiano $\{x \geq 0\}$. Ovviamente S_1 e S_2 sono disgiunte. Indichiamo poi con E il semicerchio di centro B e bordo Γ_1 , contenuto nel semipiano $\{y \geq 0\}$, con U il semisegmento circolare di vertici O, C, W' , con R il quarto di ellisse giacente nel primo quadrante e con R' il quarto di ellisse giacente nel secondo quadrante. Per la simmetria di Γ_1 ricordata nel

testo, avremo

$$\text{area}(R) = \text{area}(R').$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} \text{area}(S_1) &= \text{area}(R') - \text{area}(U) = \\ &= \text{area}(R) - \text{area}(U) \end{aligned}$$

$$\text{area}(S_2) = \text{area}(E) - \text{area}(R) - \text{area}(U).$$

Sommando membro a membro le precedenti equazioni giungiamo a

$$\begin{aligned} \text{area}(S) &= \text{area}(S_1) + \text{area}(S_2) = \\ &= \text{area}(E) - 2 \text{area}(U). \end{aligned}$$

(Osserviamo che il testo *non* richiede di valutare l'area di S_1 o S_2 , ma solo la loro somma, il che evita di calcolare l'area del quarto di ellisse R).

A questo punto l'area del semicerchio E è semplicemente

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2} \pi (\sqrt{2})^2 = \pi$$

mentre l'area di U si ottiene, ricordando che BCD è rettangolo in B , per sottrazione fra l'area del quarto di cerchio di vertici C, B, D e di quella del triangolo con gli stessi vertici. Pertanto

$$\text{area}(U) = \frac{1}{4} \pi (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{OB} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Infine, quindi, avremo

$$\text{area}(S) = \pi - 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2.$$

d) La sezione (che indicheremo con T_x) di T con il piano passante per $P(x, 0)$ sarà un cerchio se P sta fra V' e W' o fra V e W , laddove la retta verticale passante per P interseca solo Γ_1 o Γ_2 , mentre sarà una corona circolare se P sta fra W' e V , laddove la corrispondente retta interseca sia Γ_1 che Γ_2 . Nel primo caso, detti P' e P'' i punti rispettivamente su Γ_1 e Γ_2 aventi ascissa x e ordinata positiva, avremo che T_x è un cerchio, per cui

$$\text{area}(T_x) = \begin{cases} \pi y_{P'}^2 & \text{se } P \in V'W', \text{ ossia } -\sqrt{2} \leq x < 1 - \sqrt{2} \\ \pi y_{P''}^2 & \text{se } P \in VW, \text{ ossia } \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}, \end{cases}$$

mentre nel secondo caso, detti Q' e Q'' i punti rispettivamente su Γ_1 e su Γ_2 ad ordinata positiva, avremo che T_x è una corona circolare, per cui

$$\text{area}(T_x) = \begin{cases} \pi(y_{Q'}^2 - y_{Q''}^2) & \text{se } P \in W'O, \text{ ossia } 1 - \sqrt{2} \leq x < 0 \\ \pi(y_{Q''}^2 - y_{Q'}^2) & \text{se } P \in OV, \text{ ossia } 0 \leq x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Dalle equazioni (1) e (2) di Γ_1 e Γ_2 si trae che

$$y_{P'}^2 = y_{Q'}^2 = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad y_{P''}^2 = y_{Q''}^2 = 1 + 2x - x^2$$

per cui, svolgendo elementari calcoli, si trovano le espressioni

$$\begin{aligned} \text{area}(T_x) &= \begin{cases} \pi \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) & -\sqrt{2} \leq x < 1 - \sqrt{2} \\ \pi \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) & 1 - \sqrt{2} \leq x < 0 \\ \pi \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ \pi (1 + 2x - x^2) & \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}. \end{cases} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Il grafico della funzione f è composto da quattro archi di parabola, è una funzione continua, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow (1-\sqrt{2})^-} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) = 1 - \frac{(1-\sqrt{2})^2}{2} =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow (1-\sqrt{2})^+} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) = 2\sqrt{2} - 1 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} (1 + 2x - x^2).$$

La funzione f è positiva e si annulla per $x = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2} + 1$. Essa presenta tre punti angolosi in $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1/2)$, in $(0, 0)$ e in $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 1)$, che è anche punto di massimo assoluto. Il suo grafico, ossia il grafico della curva Λ , è rappresentato in figura 2.

e) Innanzitutto l'area della parte di piano compresa fra Λ e l'asse delle ascisse è

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \text{area}(T_x) dx.$$

Essendo le T_x delle figure regolari, si può considerare valido il principio di Cavalieri e affermare che tale integrale rappresenta il volume del solido avente, all'ascissa x , la sezione T_x . In alternativa, dal momento che la definizione di volume di un solido ottenuto mediante rotazione di una generica curva continua attorno all'asse x è lasciata all'intuizione, si può definire questo concetto come l'integrale delle aree delle sezioni, dal momento che è consistente con i casi elementari (cono, cilindro, sfera, ecc.), dopodiché l'affermazione data sopra è vera per definizione (in ogni caso il testo non parlava esplicitamente di dimostrazione).

Secondo quesito

a) Risolviamo dapprima il problema in maniera elementare, facendo però ricorso a osservazioni algebriche peculiari del sistema dato. Ricaviamo $y + 1$ da tutte e tre le equazioni:

$$\begin{cases} y + 1 = (k + 1)x \\ y + 1 = 2kx \\ y + 1 = -2x - h. \end{cases}$$

Ora, da queste uguaglianze seguono le relazioni

$$(k + 1)x = 2kx = -2x - h. \quad (3)$$

È chiaro a questo punto che, fissati k e h , se queste uguaglianze saranno compatibili per qualche valore di x , allora il sistema avrà soluzioni, in quanto y sarà allora univocamente determinata. Inoltre, tale soluzione sarà anche unica, perché è impossibile scegliere k e h in modo che le ultime tre equazioni coincidano (dalla prima uguaglianza deve aversi $k = 1$, ma poi, anche ponendo $h = 0$ si otterrebbe $2x = 2x = -2x$, che porta solo a $x = 0$). Viceversa, se tali equazioni non sono compatibili per nessun valore di x , il sistema non avrà soluzione.

Vediamo allora di analizzare le equazioni (3). La prima uguaglianza implica $x = 0$ (per ogni k) o $k = 1$ (per ogni x). Se $x = 0$, dalla seconda uguaglianza deve seguire $h = 0$, e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza anche la terza sarà soddisfatta. Dunque se $h = 0$ si ha la soluzione $x = 0$, $y = -1$ per ogni k . Se invece $k = 1$, dalla seconda uguaglianza si trova $x = -h/4$ e successivamente $y = -1 - h/2$, che esistono per ogni valore di h .

Pertanto si hanno soluzioni per $h = 0$ oppure (non esclusivo) $k = 1$. Se invece $h \neq 0$ e $k \neq 1$ (la negazione logica di $h = 0 \vee k = 1$), allora dalla prima uguaglianza deve essere

$x = 0$, e dalla seconda $x \neq 0$, che è una contraddizione. Dunque il sistema è risolubile se e solo se $h = 0$ oppure (non esclusivo) $k = 1$.

Accanto a questa soluzione, esiste una tecnica classica che consiste nell'applicare il noto teorema di ROUCHÉ-CAPELLI:

TEOREMA (di ROUCHÉ-CAPELLI). *Un sistema lineare*

$$Ax = b$$

dove A è una matrice $m \times n$ e x, b sono vettori di n colonne, ammette soluzioni se e solo se

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$

dove $A|b$ è la matrice completa dei coefficienti delle incognite e dei termini noti.

(Ricordiamo che il rango di una matrice è il massimo ordine dei minori non singolari estraibili dalla matrice).

Iniziamo a discutere il rango della matrice A :

$$A(k) = \begin{bmatrix} k+1 & -1 \\ 2k & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Cominciamo con l'annullare il primo determinante

$$\begin{vmatrix} k+1 & -1 \\ 2k & -1 \end{vmatrix} = -k - 1 + 2k = k - 1 = 0$$

per cui $k = 1$. Sostituendo questo valore nella matrice troviamo

$$A(1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2 per la presenza del minore di ordine 2 non singolare delle due ultime righe. Annullando il secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 2k & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2k + 2 = 2(k + 1) = 0$$

si trova $k = -1$, ma sostituendo si trova

$$A(-1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha ancora rango 2 a causa del minore superiore.

Infine, annullando il determinante della prima e della terza riga

$$\begin{vmatrix} k+1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = k + 1 + 2 = k + 3 = 0$$

si ricava $k = -3$, e ancora una volta

$$A(-3) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Dunque A ha rango 2 per ogni valore di k e h .

Vediamo ora $A|b$. Avremo

$$A|b = \begin{bmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 2k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1-h \end{bmatrix}.$$

Ora, il rango di questa matrice può essere solo 2 o 3 (ricordiamo che è sempre maggiore o uguale al rango di ogni sua sottomatrice, dunque in particolare di A). Calcolando il determinante con la regola di Sarrus si trova

$$\begin{vmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 2k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1-h \end{vmatrix} = (k+1)(1+h) - 2 + + 2k - 2k(1+h) - (k+1) + 2 = h(k-1).$$

Pertanto il rango della matrice completa è 3 a meno che $h = 0$ oppure $k = 1$, nei quali casi è 2 e coincide col rango di A . Si ritrovano così i risultati sopra descritti.

b) Facciamo riferimento alla figura 3.

Le prime due rette coincidono se $k = 1$, e altrimenti, avendo equazioni

$$y = (k+1)x - 1 \quad \text{e} \quad y = 2kx - 1,$$

si vede subito che si intersecano tutte nel punto $(0, -1)$. Si tratta dunque di due fasci propri di rette con sostegno $(0, -1)$ e privati dell'asse y , nei quali le rette sono differenti nei due fasci se $k \neq 1$, mentre coincidono con la retta di equazione $2x - y - 1 = 0$ se $k = 1$. L'ultima equazione rappresenta invece un fascio improprio di rette parallele alla retta $2x + y = 0$. Pertanto, se $k = 1$, essendo le rette di equazioni $2x - y - 1 = 0$ e $2x + y + 1 + h = 0$ non parallele, si ha che tali rette si intersecheranno in un punto della prima retta. Poiché abbiamo già visto che $(-h/2, -1 - h/2)$ è la soluzione del problema, si avrà che il punto di intersezione è situato nel terzo quadrante se $h > 0$, in quanto

$$x = -\frac{h}{2} < 0, \quad y = -1 - \frac{h}{2} < -1$$

nel quarto quadrante se $-2 < h \leq 0$, in quanto

$$x = -\frac{h}{2} \geq 0, \quad y = -\frac{2+h}{2} < 0,$$

e infine nel primo se $h \leq -2$, in quanto

$$x = -\frac{h}{2} < 0, \quad y = -\frac{2+h}{2} \geq 0.$$

Se invece $h = 0$, la retta di equazione $2x + y + 1 = 0$ passa per il sostegno dei due fasci precedentemente descritti e pertanto tutte le rette si intersecano in $(0, -1)$.

c) Da un punto di vista algebrico, il sistema proposto può non essere risolubile o perché le soluzioni trovate intersecando le equazioni a due alla volta danno risultati incompatibili o perché le equazioni stesse sono incompatibili. Chiaramente il primo caso è quello in cui le tre rette formano un triangolo, mentre il secondo è quello in cui due delle tre

Fig. 3

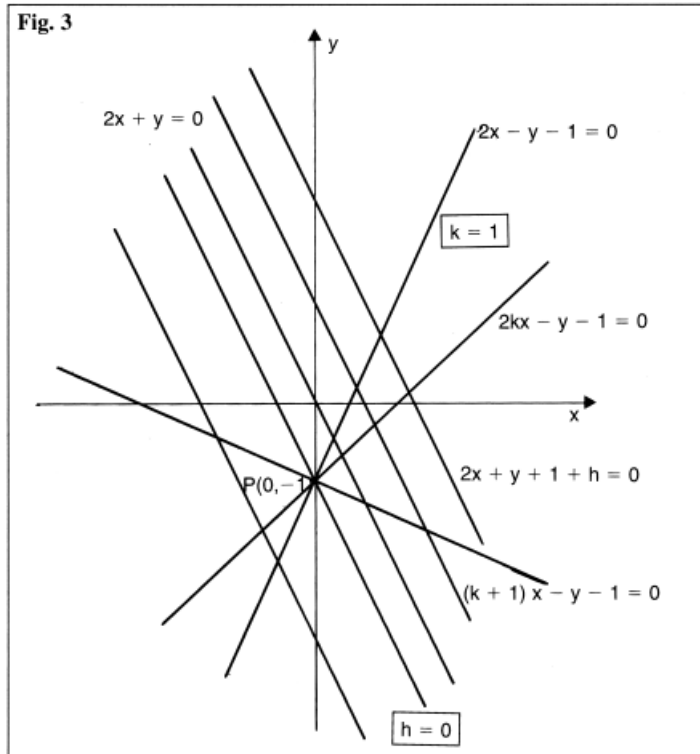
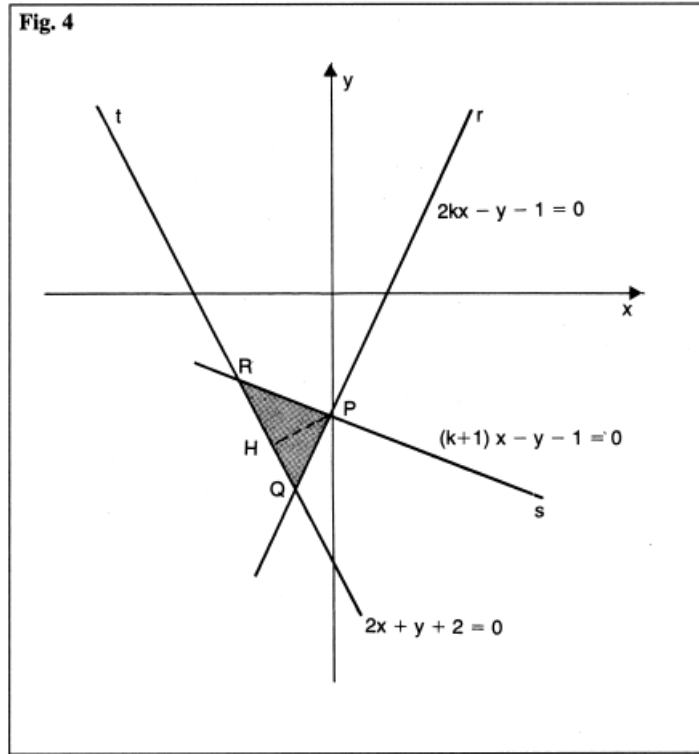


Fig. 4



rette sono parallele. Esaminiamo questa condizione e procediamo poi per esclusione. Riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ -2x - y - 1 - h = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni danno sempre per soluzione il punto $(0, -1)$, dunque sono sempre compatibili. La prima non è invece compatibile con la terza se $k+1 = -2$ e $-h-1 \neq -1$, ossia se $k = -3$ e $h \neq 0$. Poiché il sistema già non è risolubile, deve essere $h \neq 0$ o $k \neq 1$ e dunque si trova che le tre rette non formano un triangolo se $k = -3$. La seconda equazione non è compatibile con la terza se $2k = -2$ e $-h-1 \neq -1$, per cui si ha di nuovo che le tre rette non formano un triangolo se $k = -1$. Riassumendo, quindi, supposto che il sistema non abbia soluzione, ossia che $h \neq 0$ o $k \neq 1$, si ha che le tre rette formano un triangolo se in aggiunta $k \neq -3$ o $k \neq -1$. Osserviamo che i valori $k = -1$, $k = -3$ si erano già trovati nella discussione del rango della matrice A .

Da un punto di vista geometrico, le condizioni precedenti si possono trovare osservando che due delle tre rette devono essere parallele per non formare un triangolo. Siccome le rette del fascio proprio sono sempre incidenti, si avranno i casi in cui la retta del primo fascio proprio è parallela alle rette del fascio improprio e in cui la retta del secondo fascio proprio è parallela alle rette del fascio improprio. Essendo i coefficienti angolari delle rette dei tre fasci $k+1$, $2k$ e -2 rispettivamente, si ritrovano i casi $k+1 = -2$, ossia $k = -3$ e $2k = -2$, ossia $k = -1$.

d) Facciamo riferimento alla figura 4. Per $h = 1$ le tre rette hanno equazione

$$\begin{aligned} r: & (k+1)x - y - 1 = 0 \\ s: & 2kx - y - 1 = 0 \\ t: & 2x + y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Poniamo

$$P = r \cap s = (0, -1), \quad Q = r \cap t, \quad R = s \cap t.$$

Risolviendo i due sistemi

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

si trova, sommando membro a membro,

$$(k+3)x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad 2(k+1)x + 1 = 0$$

da cui

$$x_Q = -\frac{1}{k+3}, \quad x_R = -\frac{1}{2(k+1)}$$

che implica, con semplici passaggi,

$$y_Q = -2x_Q - 2 = -\frac{2k+4}{k+3},$$

$$y_R = -2x_R - 2 = -\frac{2k+1}{k+1}.$$

Assumiamo QR come base e calcoliamo l'altezza QH del triangolo come distanza di P da t :

$$QH = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Calcoliamo ora la lunghezza della base QR :

$$\overline{QR} = \sqrt{\left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+3}\right)^2 + \left(\frac{2k+4}{k+3} - \frac{2k+1}{k+1}\right)^2} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{k-1}{2(k+1)(k+3)}\right)^2 + \left(\frac{k-1}{(k+1)(k+3)}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left| \frac{k-1}{(k+1)(k+3)} \right|. \end{aligned}$$

Pertanto l'area del triangolo richiesto è

$$s(k) = \frac{1}{4} \left| \frac{k-1}{(k+1)(k+3)} \right|.$$

Rappresentiamo questa funzione disegnando il grafico della funzione

$$g(k) = \frac{1}{4} \frac{k-1}{(k+1)(k+3)}$$

e ribaltando rispetto all'asse x la parte di curva sotto tale asse. Innanzitutto, g è definita per $k \neq -3$ e per $k \neq -1$, in accordo con quanto visto al punto c). Da un semplice prodotto di segni, si vede facilmente che g è positiva per $-3 < k < -1$ e per $k > 1$, mentre si annulla per $k = 1$. Inoltre il grafico passa per $(0, -1/3)$. Le rette $k = -3$ e $k = -1$ sono degli asintoti per la funzione, in quanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -3^-} g(k) &= -\infty, & \lim_{k \rightarrow -3^+} g(k) &= +\infty, \\ \lim_{k \rightarrow -1^-} g(k) &= +\infty, & \lim_{k \rightarrow -1^+} g(k) &= -\infty. \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = 0$$

per cui l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per la funzione. La derivata della funzione g è

$$g'(k) = \frac{1}{4} \frac{(k+1)(k+3) - (k-1)(2k+4)}{(k+1)^2(k+3)^2} =$$

$$= - \frac{k^2 - 2k + 7}{(k+1)^2 (k+3)^2}$$

ed è positiva se $1 - 2\sqrt{2} < k < 1 + 2\sqrt{2}$, negativa altrimenti nel suo dominio di definizione, che coincide con quello di g . Dunque la funzione g ha un minimo in

$$A\left(1 - 2\sqrt{2}, \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}\right)$$

e un massimo in

$$B\left(1 + 2\sqrt{2}, \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}\right).$$

Per calcolare la derivata seconda, conviene scrivere dapprima g nel seguente modo:

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{4} \frac{k-1}{(k+1)(k+3)} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{2(k+1) - (k+3)}{(k+1)(k+3)} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{k+3} - \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

A questo punto è facile calcolare

$$\begin{aligned} g''(k) &= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{(k+3)^3} - \frac{2}{(k+1)^3} \right) = \\ &= \frac{2(k+1)^3 - (k+3)^3}{2(k+1)^3 (k+3)^3}. \end{aligned}$$

Ponendo ora per brevità $a = \sqrt[3]{2}$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} g''(k) &= \frac{a^3(k+1)^3 - (k+3)^3}{2(k+1)^3 (k+3)^3} = \\ &= \frac{[a(k+1) - k - 3][a^2(k+1)^2 + a(k+1)(k+3) + (k+3)^2]}{2(k+1)^3 (k+3)^3}. \end{aligned}$$

Il secondo fattore del numeratore si riscrive anche

$$k^2(a^2 + a + 1) + 2(a^2 + 2a + 3)k + a^2 + 3a + 9$$

e il suo discriminante è, dopo lunghi calcoli,

$$(a^2 + 2a + 3)^2 - (a^2 + a + 1)(a^2 + 3a + 9) = -3a^2$$

dunque strettamente negativo (ricordiamo che $a = \sqrt[3]{2}$). Quindi la derivata seconda sarà, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a(k+1) - k - 3 \geq 0 \\ k + 3 > 0 \\ k + 1 > 0, \end{cases}$$

positiva se $-3 < k < -1$ e se

$$k \geq k^* = \frac{3-a}{a-1} = \frac{3-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} = 1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}.$$

Pertanto la funzione g ha la concavità verso il basso per $k < -3$, verso l'alto se $-3 < k < -1$, di nuovo verso il basso se $-1 < k < k^*$ e di nuovo verso l'alto per $k > k^*$. Si ha quindi un flesso nel punto di ascissa k^* . Il grafico della funzione g , unito a quello della funzione s , è illustrato in figura 5.

Terzo quesito

a) Indichiamo con X_1 la variabile aleatoria rappresentante la lunghezza della barra e con X_2 la variabile aleatoria corrispondente al diametro della sezione. Indicando inoltre con μ_x il valore atteso (media) e con σ_x lo scarto standard di una generica variabile aleatoria X , avremo che i dati del problema sono

$$\begin{aligned} \mu_{X_1} &= m_1 = 5 \text{ m}, & \sigma_{X_1} &= \sigma_1 = 0,04 \text{ m}, \\ \mu_{X_2} &= m_2 = 4 \text{ cm}, & \sigma_{X_2} &= \sigma_2 = 0,8 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Siano ora A e B gli eventi

$$\begin{aligned} A &= \{4,95 \text{ m} \leq X_1 \leq 5,05 \text{ m}\}, \\ B &= \{2,8 \text{ cm} \leq X_2 \leq 5,2 \text{ cm}\}. \end{aligned}$$

L'evento corrispondente alla vendita diretta della barra sarà quindi $A \cap B$. Poiché le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti, si avrà che

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B). \quad (4)$$

Per valutare $p(A)$ e $p(B)$ dobbiamo introdurre le variabili standardizzate

$$Z_1 = \frac{X_1 - m_1}{\sigma_1}, \quad Z_2 = \frac{X_2 - m_2}{\sigma_2}$$

per cui avremo che

$$\begin{aligned} 4,95 \text{ m} \leq X_1 \leq 5,05 \text{ m} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4,95 - 5}{0,04} \leq Z_1 \leq \frac{5,05 - 5}{0,04} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1,25 \leq Z_1 \leq 1,25 \end{aligned}$$

$$2,8 \text{ cm} \leq X_2 \leq 5,2 \text{ cm} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2,8 - 4}{0,8} \leq Z_2 \leq \frac{5,2 - 4}{0,8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1,5 \leq Z_2 \leq 1,5.$$

Pertanto, con l'aiuto della tabella unita al testo,

$$\begin{aligned} p(A) &= F(1,25) - F(-1,25) = \\ &= 0,894 - 0,106 = 0,788, \\ p(B) &= F(1,5) - F(-1,5) = \\ &= 0,933 - 0,067 = 0,866. \end{aligned}$$

Infine, grazie alla formula (4), troviamo

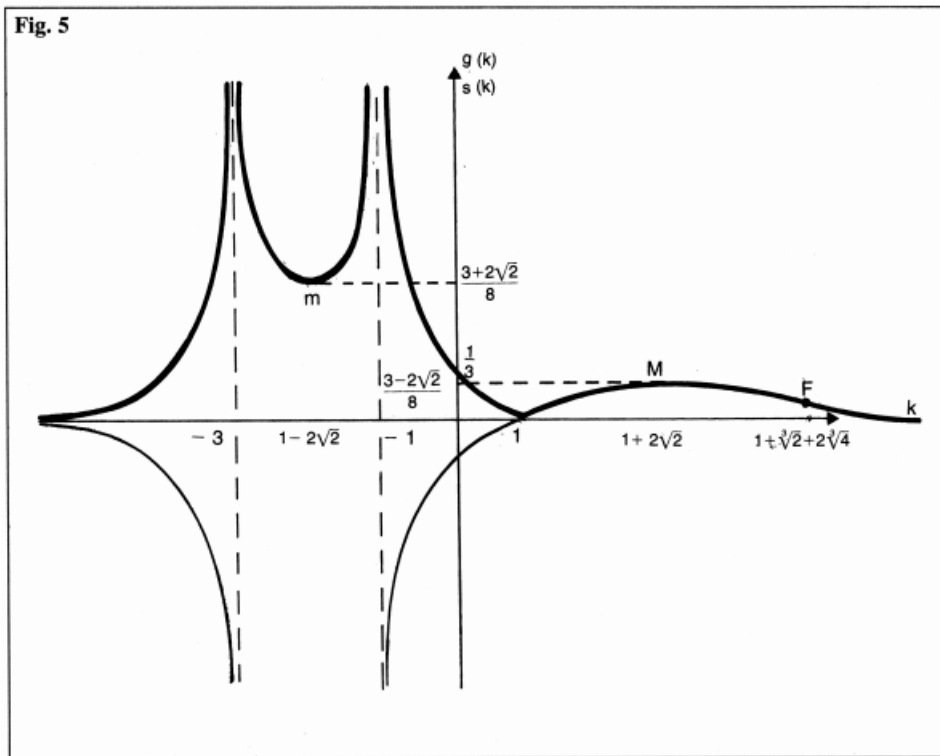
$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \cdot p(B) = 0,788 \cdot 0,866 = \\ &= 0,682 \approx 0,68 \end{aligned}$$

dove abbiamo trascurato l'ultima cifra decimale per errore di arrotondamento (l'uso di una tabella più precisa conduce al valore 0,6833). Questo è il valore dato nel testo.

b) Per rispondere a questa domanda occorre richiamare alcuni risultati della teoria dello schema delle prove ripetute. Supponiamo di effettuare n prove indipendenti ripetute in ciascuna delle quali un certo evento ha probabilità p di verificarsi e $q = 1 - p$ di non verificarsi. Sia poi X_i ($i = 1, \dots, n$) il numero di realizzazioni dell'evento nella i -esima prova, che varrà 1 oppure 0 a seconda del realizzarsi o meno dell'evento. Allora la variabile aleatoria

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

rappresenta il numero totale di realizzazioni



dell'evento considerato. Calcoliamo valore atteso e deviazione standard di questa variabile aleatoria. Ricordando che il valore atteso di una somma di variabili è uguale alla somma dei valori attesi delle variabili e che la varianza (quadrato della deviazione standard) di una somma di variabili indipendenti è uguale alla somma delle varianze delle variabili, troviamo, per il valore atteso μ_x e per la varianza σ_x^2 le espressioni

$$\mu_x = np, \quad \sigma_x^2 = n \text{ var } [X_i].$$

Poiché X_i è una variabile aleatoria con valori 1 e 0 e corrispondenti probabilità p e $1 - p$, avremo dalla definizione di varianza,

$$\begin{aligned} \text{var } [X_i] &= \sum_{x_i=0,1} (x_i - \mu_x)^2 p [X = x_i] = \\ &= (0 - p)^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq \end{aligned}$$

(ricordando che $p + q = 1$) per cui infine

$$\sigma_x^2 = npq.$$

Premesso questo, è chiaro che la frequenza f_n non è altro che

$$f_n = \frac{1}{n} X$$

e che il suo valore atteso e la sua varianza sono rispettivamente, ricordando che $\text{var } [aX] = a^2 \text{ var } [X]$,

$$\mu_{f_n} = p,$$

$$\sigma_{f_n}^2 = \text{var } [f_n] = \text{var } \left[\frac{1}{n} X \right] = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}.$$

Per ottenere il risultato richiesto, allora, ci si può servire della cosiddetta disuguaglianza di ČEBYŠEV, che richiamiamo qui sotto (si veda ad es. E.S. VENT'SEL, *Calcolo delle probabilità*, Ed. Mir, p. 269).

TEOREMA (Disuguaglianza di ČEBYŠEV). Sia X una variabile aleatoria con valore atteso μ_x e varianza σ_x^2 . Allora, per ogni $r > 0$ vale la disuguaglianza

$$p [|X - \mu_x| \geq r] \leq \frac{\sigma_x^2}{r^2}.$$

Pertanto, ai fini del problema proposto, si chiede di esprimere n in funzione di p affinché sia vera la relazione

$$p [|f_n - p| > 0,05] \leq 0,05.$$

Alla luce della disuguaglianza di Čebyšev, possiamo scegliere $r = 0,05$ e avremo

$$p [|f_n - p| > 0,05] \leq \frac{\sigma_{f_n}^2}{(0,05)^2} = \frac{pq}{n \cdot (0,05)^2}.$$

Dunque, la richiesta sarà soddisfatta se n è tale che

$$\frac{pq}{n \cdot (0,05)^2} \leq 0,05$$

ossia se

$$n \geq \frac{p(1-p)}{(0,05)^3}.$$

Prima di procedere, vale la pena di osservare che questo valore di n fornisce una condi-

zione *sufficiente* affinché si verifichi la richiesta del testo. Infatti, è possibile che con una numerosità inferiore si abbia ugualmente lo stesso risultato. Ora il testo dice «la numerosità necessaria», probabilmente intendendo «una numerosità sufficiente». In caso contrario, occorre procedere diversamente, ma i dati indicati nel testo non sono sufficienti.

Richiamiamo infatti il cosiddetto Teorema di LAPLACE (o di DE MOIVRE-LAPLACE) (si veda ad es. E.S. VENT'SEL, *op. cit.*, p. 289), che è una conseguenza della legge dei grandi numeri.

TEOREMA (di LAPLACE). Se si effettuano n prove indipendenti ($n \gg 1$), in ciascuna delle quali un evento A si verifica con una probabilità p , e se f_n indica la frequenza relativa dell'evento A , vale la relazione

$$p \left[a < f_n - \frac{p}{\sqrt{pq/n}} < b \right] = F(b) - F(a)$$

dove F rappresenta la funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata e dove $q = 1 - p$.

La relazione richiesta

$$p [|f_n - p| > 0,05] \leq 0,05$$

implica, passando all'evento complementare,

$$1 - p [|f_n - p| > 0,05] = p [|f_n - p| \leq 0,05]$$

per cui il problema diviene equivalente a quello di trovare la relazione fra n e p affinché

$$p [|f_n - p| \leq 0,05] \geq 1 - 0,05 = 0,95.$$

Ora, dal teorema precedente, abbiamo

$$|f_n - p| \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{|f_n - p|}{\sqrt{pq/n}} \leq \frac{0,05}{\sqrt{pq/n}}$$

per cui

$$p [|f_n - p| \leq 0,05] = p \left[\frac{|f_n - p|}{\sqrt{pq/n}} \leq \frac{0,05}{\sqrt{pq/n}} \right] =$$

$$= F \left(\frac{0,05}{\sqrt{pq/n}} \right) - F \left(- \frac{0,05}{\sqrt{pq/n}} \right).$$

Posto infine $x = 0,05/\sqrt{pq/n}$, il problema si è ricondotto a quello di trovare x tale che

$$F(x) - F(-x) \geq 0,95. \quad (5)$$

Poiché

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

ciò equivale a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt \geq 0,95$$

e dalla simmetria della funzione integranda (vedi figura 6) si vede immediatamente che ciò equivale a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1 - 0,95}{2} = 0,025$$

che infine significa richiedere

$$F(-x) \leq 0,025.$$

Ora, la tabella non fornisce alcuna informazione in proposito. Una tabella completa, invece, mostra che $F(-1,96) = 0,025$, per cui la soluzione della disequazione (5) è

$$-x \leq -1,96 \quad \text{ossia} \quad \frac{0,05}{\sqrt{pq/n}} \geq 1,96.$$

Esprimendo da questa relazione n in funzione di p , si giunge a

$$n > \left(\frac{1,96}{0,05} \right)^2 p(1-p) = 1536,64p(1-p).$$

Osserviamo che il limite trovato per n è effettivamente inferiore a quello offerto dalla disuguaglianza di Čebyšev.

c) Sostituendo il valore $p = 0,68$ nella precedente relazione (facendo riferimento al primo metodo di soluzione), otteniamo

$$n \geq \frac{0,68 \cdot 0,32}{(0,05)^3} = 1740,8$$

per cui se $n \geq 1741$ si avrà che è a priori

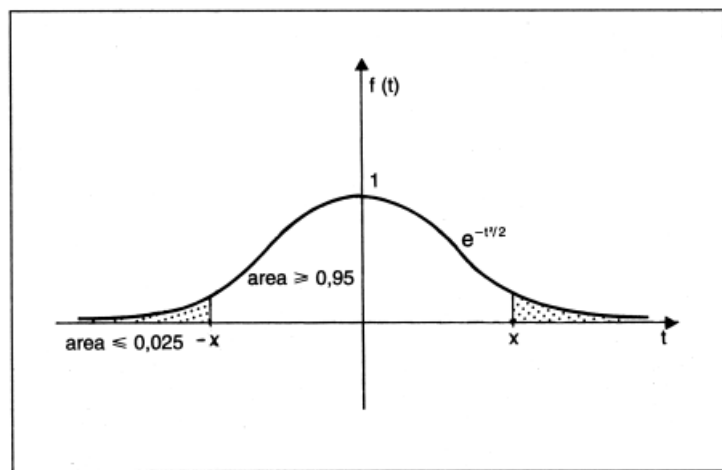


Fig. 6

poco probabile, secondo la definizione del testo, che f_n disti da p più di 0,05. Poiché ora, con 2000 prove effettuate, la frequenza è risultata pari a 0,5, si ha che senz'altro la macchina funziona in modo errato, in quanto lo scarto fra 0,5 e 0,68 è superiore a 0,05 e il numero di prove effettuate è superiore a quello necessario affinché si verifichi la richiesta del punto precedente.

d) Trattandosi di prove indipendenti, abbiamo che la probabilità di ottenere $n - 1$ insuccessi nelle prime $n - 1$ prove è $(1 - p)^{n-1}$. Poiché all' n -esima prova si deve ottenere un successo, la probabilità richiesta sarà

$$(1 - p)^{n-1}p. \tag{6}$$

(Questa variabile aleatoria viene detta geometrica). La procedura per calcolare tale probabilità può essere duplice: in un primo modo si può chiedere al programma di calcolare la formula (6), una volta introdotti n e p (diagramma 1); oppure si può impostare il programma con un ciclo WHILE che moltiplica per p fintantoché la variabile del ciclo è inferiore a n , e che moltiplica per p una volta fuori dal ciclo (diagramma 2).

Difficoltà rilevanti

Il primo quesito si presenta come una classica prova di Geometria Analitica. Essa racchiude alcune piccole difficoltà, però superabili. La prima riguarda l'intersezione delle curve Γ_1 e Γ_2 , che poteva condurre a un'equazione di quarto grado se si sceglieva di esplicitare la y anziché la x . È raccomandabile puntualizzare sempre, in casi di simmetria rispetto a un asse come questo, che le equazioni possono essere sempre risolte rispetto al quadrato dell'incognita dell'asse di simmetria, semplificando notevolmente i calcoli (inoltre, è interessante notare come le soluzioni di simili sistemi possano avere una coordinata reale e una complessa).

La seconda difficoltà era rappresentata dal fatto che, se non si leggeva attentamente il testo, si poteva essere portati a dover calcolare l'area del quarto di ellisse che conduce a un integrale non banale, mentre questo lavoro non era necessario. Consigliamo di insegnare comunque la semplice formula $S = \pi ab$ dell'area dell'ellisse, al fine di evitare di far perdere tempo agli allievi alle prese con questo tipo di figure (del resto, le formule in questione si trovano su tutti i formulari in largo uso degli allievi durante le prove di maturità). Per il resto, il quesito non presentava soverchie difficoltà: bastava un po' di ordine per non perdersi nei vari casi da esaminare.

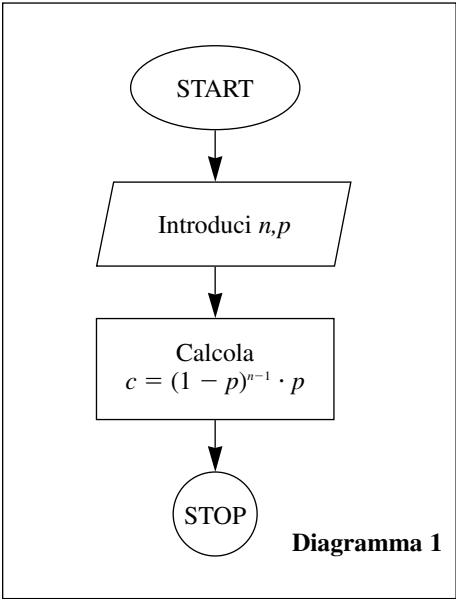


Diagramma 1

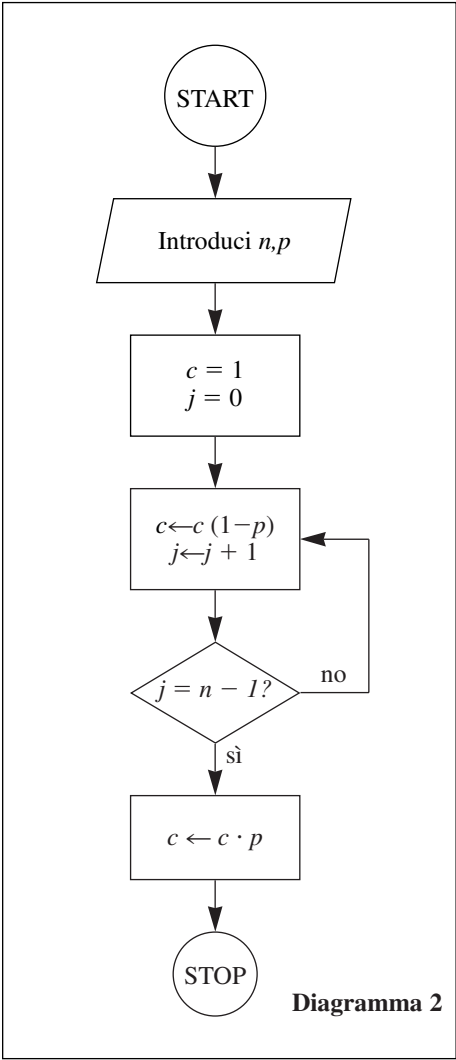


Diagramma 2

Il secondo quesito è invece più sottile, in quanto si tratta di un sistema lineare di tre equazioni in due sole incognite, dunque in generale sovrabbondante. È questo un caso del quale poco si dice se non si decide di sviluppare l'algebra dei sistemi lineari fino al menzionato teorema di Rouché-Capelli. Come abbiamo mostrato, il problema era risolubile anche senza far ricorso a tale teorema, ma restava comunque il rischio di confondersi fra le varie soluzioni dei sistemi ottenuti intersecando due delle tre equazioni e risolvendo. Più semplice era l'interpretazione geometrica, alla quale si poteva fare ricorso, a mio avviso, anche per il punto a). Per il resto, giunti al termine del punto b), non restavano più grandi difficoltà, a parte lo studio della derivata seconda della funzione $s(k)$, che abbiamo dato per completezza ma che poteva anche essere forse evitato (anche se il testo non dice nulla in proposito). Di per sé, si tratta di un esercizio molto interessante, che può illustrare come l'interpretazione geometrica permetta di risolvere problemi per i quali solitamente si fa ricorso a tecniche più sofisticate.

Il terzo quesito è un esercizio tutt'altro che facile relativo a una parte di programma forse non sempre svolta, anche all'interno dei programmi del P.N.I. Per risolvere tale problema erano necessarie le conoscenze relative agli eventi indipendenti, alle variabili casuali, alla funzione di distribuzione normale, alla standardizzazione, allo schema delle prove ripetute e alla disuguaglianza di Čebyšev (volendo sorvolare sull'aspetto della lettura «pignola» del testo, messo in evidenza nella correzione). Oltre a ciò, l'impostazione della convergenza della frequenza f_n alla probabilità p dei singoli eventi ripetuti è tale che chi non l'ha sviluppata in un Corso, con la dovuta attenzione, molto difficilmente può immaginarsela. Bisogna onestamente dire che se per ogni aspetto del programma di Matematica ci si dovesse attendere esercizi di questa difficoltà, sarebbe molto difficile portare a termine il programma in un anno scolastico. Ritengo che lo stesso esercizio, limitato ai punti a) e d), sarebbe stato più abbordabile e ugualmente istruttivo. Lo stesso esercizio, d'altro canto, è formulato abbastanza precisamente (a parte l'interpretazione della parola «necessaria» di cui sopra), ed è molto interessante per la forte ricaduta pratica che mostra, tipica dei problemi di calcolo delle probabilità. In questo senso è senz'altro un buon segno che si incominci a proporre esercizi di calcolo delle probabilità, un ambito della Matematica che è senz'altro trascurato ma che è sempre più richiesto fra le conoscenze di tipo scientifico.

Alfredo Marzocchi
Università Cattolica - Brescia