

MATEMATICA

Maturità scientifica

Roberta Gorni - Mario Marchi

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2$$

dove a è un parametro reale positivo.

Tra di esse determinare la parabola p che, con la sua simmetrica q rispetto all'origine O , delimita una regione di area $\frac{128}{3}$.

Constatato che per la parabola p risulta $a=2$, calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dagli assi di riferimento e dalle tangenti alle due parabole p, q nel loro punto comune di ascissa positiva. Considerato infine il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero precedente, dimostrare che si tratta di un parallelogramma e calcolarne l'area.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnata la curva k di equazione:

$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}.$$

Dopo aver studiato la funzione $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^3}$ (dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di k), disegnare l'andamento di k .

Indicata con t la tangente a k parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da k e da t .

A completamento del problema, prendere in esame le due seguenti proposizioni:

• Una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto.

• Una funzione reale di variabile reale non continua in un punto non è derivabile in quel punto.

Dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire una esauriente giustificazione della risposta.

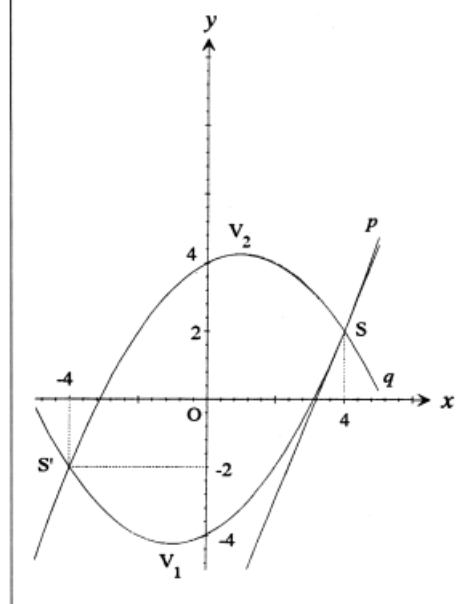
3. Considerato il rettangolo $ABCD$, il cui lato AD è lungo $8a$, dove a è una lunghezza nota, sia M il punto medio del lato AB . Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per M , prendere un punto V in modo che il piano del triangolo VCD formi col piano del rettangolo un angolo α tale che $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice V e base $ABCD$ è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92a^2$, calcolare la lunghezza di AB .

Constatato che tale lunghezza è $5a$, condurre un piano σ parallelo alla base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di σ con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di σ per la quale il volume di tale prisma risulta massimo.

A completamento del problema dimostrare che se i numeri reali positivi x, y variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il prodotto $x^2 \cdot y$ è massimo quando $x = 2y$.

Fig. 1



le cui soluzioni determinano i punti

$$S = \left(2a, \frac{1}{2}a^2\right), S' = \left(-2a, -\frac{1}{2}a^2\right). \text{ (v. Fig. 1)}$$

La misura $\mathcal{M}$ dell'area della regione delimitata dalle parabole p e q , si determina calcolando il seguente integrale

$$\mathcal{M} = \int_{-2a}^{2a} \left[\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax + a^2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2 \right) \right] dx = \int_{-2a}^{2a} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2a^2 \right) dx = \frac{16}{3}a^3.$$

Risolviendo l'equazione $\frac{16}{3}a^3 = \frac{128}{3}$ si constata immediatamente che il valore del parametro a che individua la parabola p per la quale è $\mathcal{M} = \frac{128}{3}$ risulta essere $a = 2$. In tal caso le parabole p e q hanno rispettivamente equazioni $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 4$ e $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ mentre il punto S , comune alle due parabole, di ascissa positiva, ha coordinate $(4, 2)$.

— Indicate con t ed s le rette tangenti rispettivamente alle parabole p e q nel punto S , le loro equazioni risultano essere $t: 5x - 2y - 16 = 0$ e $s: 3x + 2y - 16 = 0$.

Il punto T di intersezione fra la retta t e l'asse delle ascisse, si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} 5x - 2y - 16 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ da cui risulta

$T = \left(\frac{16}{5}, 0\right)$. Le coordinate del punto R di intersezione della retta s con l'asse delle ordinate si determinano risolvendo il sistema $\begin{cases} 3x + 2y - 16 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ da cui $R = (0, 8)$.

Indichiamo ora con H il punto di intersezio-

Primo problema

Al variare del parametro a , con a numero reale positivo, l'equazione

$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2$ rappresenta una famiglia di parabole aventi:

- assi paralleli all'asse delle ordinate;
- vertici di coordinate $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{17}{16}a^2\right)$ (appartenenti dunque tutti al III quadrante, essendo a positivo);
- concavità rivolta verso l'alto;
- intersezione con il semiasse negativo delle ordinate nei punti di coordinate $(0, -a^2)$.

— Sia ora a un valore generico ma fissato e

p la parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2$ assegnata dal problema. Consideriamo

la simmetria centrale σ di centro l'origine, la cui equazione risulta $x' = -x, y' = -y$. Ne consegue che, tramite σ , la parabola p viene trasformata nella parabola q di equazione

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax + a^2. \text{ Quest'ultima interseca}$$

il semiasse positivo delle ordinate nel punto $(0, a^2)$ ed ha concavità rivolta verso il basso. Gli eventuali punti di intersezione delle parabole p e q , si determinano risol-

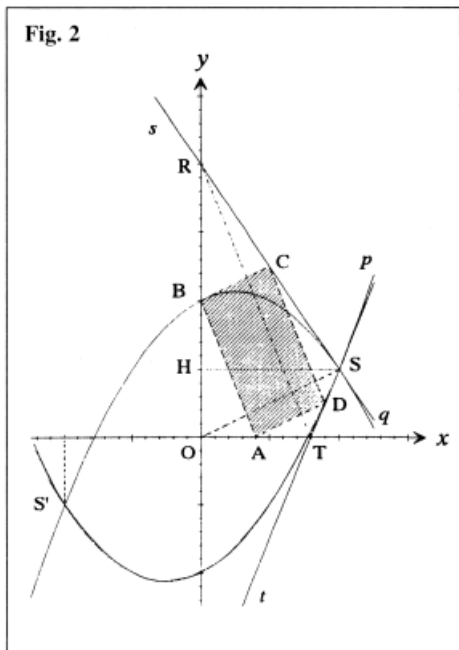
$$\text{vendo il sistema } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax + a^2 \end{cases}$$

ne della parallela condotta per S all'asse delle ascisse, con l'asse delle ordinate, dunque $H = (0, 2)$. L'area del quadrilatero convesso (O, R, S, T) si può pensare come somma dell'area del trapezio (O, H, S, T) con l'area del triangolo (H, R, S), cioè:

$$\mathcal{A}(\text{ORST}) = \mathcal{A}(\text{OHST}) + \mathcal{A}(\text{HRS}) = \frac{1}{2}(\overline{HS} + \overline{OT}) \cdot \overline{OH} + \frac{1}{2}\overline{HS} \cdot \overline{HR} = \frac{96}{5}$$

ove si sono indicate con $\overline{HS}$, $\overline{OT}$, ecc. rispettivamente le lunghezze dei segmenti HS, OT, ecc.

— Siano A, B, C, D i punti medi rispettivamente dei segmenti OT, OR, SR e ST, dunque $A = \left(\frac{8}{5}, 0\right)$, $B = (0, 4)$, $C = (2, 5)$, $D = \left(\frac{18}{5}, 1\right)$. Consideriamo il quadrilatero (A, B, C, D). (Fig. 2)



La scelta dei punti B e C, medi rispettivamente dei segmenti OR e SR, ci permette di concludere immediatamente, per corollario al Teorema di Talete, che i due triangoli (O, R, S) e (B, R, C) sono simili e che inoltre:

$$BC \parallel OS \text{ e } \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{OS}. \text{ Analogamente risulta che i triangoli (O, T, S) e (A, T, D) sono simili, } OS \parallel AD \text{ e } \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{OS}. \text{ Dunque } BC \parallel$$

$$\parallel AD \text{ e } \overline{BC} = \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{OS}. \text{ Dunque il quadrilatero (A, B, C, D) è un parallelogrammo.}$$

Ricordando ora che «il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del loro rapporto di similitudine», si ha

$$\mathcal{A}(\text{CSD}) = \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{RST}), \mathcal{A}(\text{BOA}) = \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{ROT}),$$

$$\mathcal{A}(\text{BRC}) = \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{ORS}), \mathcal{A}(\text{ATD}) = \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{OTS}).$$

$$\text{Ma } \mathcal{A}(\text{RST}) + \mathcal{A}(\text{ROT}) = \mathcal{A}(\text{ORS}) + \mathcal{A}(\text{OTS}) = \mathcal{A}(\text{ORST}),$$

$$\text{dunque } \mathcal{A}(\text{CSD}) + \mathcal{A}(\text{BOA}) = \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{ORST}) \text{ e}$$

$$\mathcal{A}(\text{BRC}) + \mathcal{A}(\text{ATD}) = \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{ORST}), \text{ ossia}$$

$$\mathcal{A}(\text{ABCD}) = \mathcal{A}(\text{ORST}) - [\mathcal{A}(\text{CSD}) + \mathcal{A}(\text{BOA}) + \mathcal{A}(\text{BRC}) + \mathcal{A}(\text{ATD})] =$$

$$= \mathcal{A}(\text{ORST}) - \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{ORST}) - \frac{1}{4} \mathcal{A}(\text{ORST}) =$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{A}(\text{ORST}) = \frac{48}{5}.$$

Alcune riflessioni. Questo primo problema del Tema di maturità non presenta particolari difficoltà; esso risulta infatti facilmente risolubile attraverso gli strumenti della geometria analitica, i più diffusamente utilizzati nel corso del Triennio.

Nella prima parte dell'esercizio compariva un parametro reale. Ricordiamo come il calcolo parametrico sia un argomento estremamente delicato; l'uso dei parametri comporta infatti in molti studenti difficoltà sia di tipo teorico che operativo: parametro e variabile sono concetti indistinti e spesso errori nell'utilizzare i parametri celano lacune più gravi quali l'incapacità di gestire correttamente i quantificatori universale ed esistenziale.

D'altra parte la semplicità dei calcoli parametrici richiesti nel contesto specifico dell'esercizio, garantivano buone possibilità di risolvere correttamente l'esercizio ad ogni studente dotato di una sia pur modesta preparazione algebrica.

L'ultima parte del problema risultava affrontabile in tempi relativamente brevi solo adottando una metodologia risolutiva di tipo sintetico (teorema di Talete, criteri di similitudine fra triangoli, parallelismo fra rette). L'approccio analitico a questa seconda parte appare infatti certamente più laborioso, trattandosi di:

1. determinare l'equazione delle rette BC e AD;
2. determinare l'equazione delle rette BA e CD;
3. verificare il parallelismo fra tali coppie di rette;
4. calcolare la lunghezza del segmento AD;
5. determinare la distanza del punto B dalla retta AD;

6. calcolare $\mathcal{A}(\text{ABCD})$ moltiplicando le distanze ai punti 4 e 5.

Un eventuale scoglio per lo studente avrebbe dunque potuto essere quello di riuscire ad attivare un nuovo registro di risoluzione, passando da considerazioni di natura analitica a

considerazioni di natura sintetica. Il termine "dimostrare" utilizzato nel testo, poteva tuttavia suggerire la metodologia da adottare. In tale prospettiva, la struttura dell'esercizio poteva evidenziare le capacità dell'alunno nell'applicare, ai vari contesti, la strategia risolutiva ottimale.

Secondo problema

Il dominio della funzione $f(x) = \frac{x^2}{4-x^3}$ è l'insieme dei numeri reali privato del punto $x = \sqrt[3]{4}$.

La funzione interseca gli assi cartesiani nella sola origine, è positiva per $x \leq \sqrt[3]{4}$, negativa negli altri punti del dominio. Non esistono simmetrie rispetto agli assi di riferimento né rispetto all'origine. Essendo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, ne segue che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale.

Essendo poi $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}^-} f(x) = \pm\infty$, la retta di

equazione $x = \sqrt[3]{4}$ è un asintoto verticale. Studiamo ora la derivata prima:

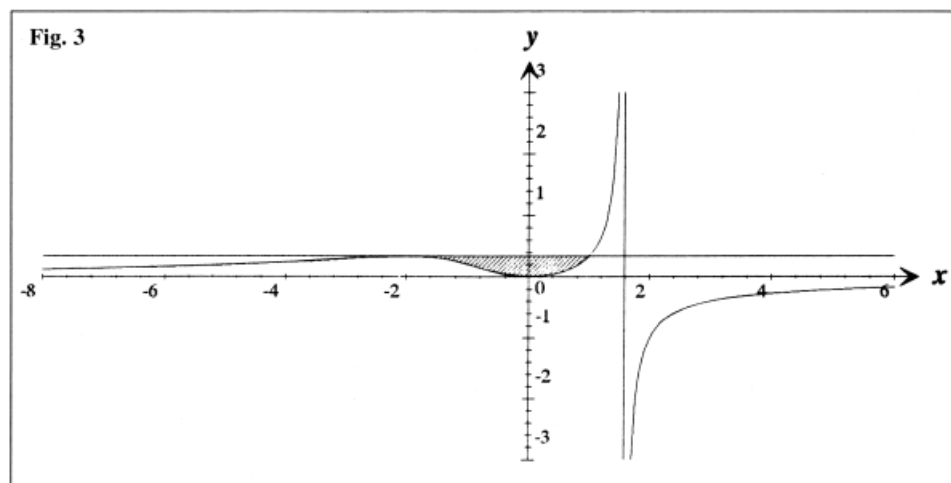
$$f'(x) = \frac{x \cdot (x^3 + 8)}{(4 - x^3)^2} \text{ essa si annulla per } x = 0$$

e $x = -2$. Dallo studio del segno della derivata prima si ricava che: la funzione è crescente negli intervalli $(-\infty, -2)$, $(0, \sqrt[3]{4})$ e $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$, decrescente in $[-2, 0]$; dunque il punto $O = (0, 0)$ è un minimo relativo, mentre il punto di coordinate $(-2, \frac{1}{3})$ è un massimo relativo. Calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{x^6 + 28x^3 + 16}{(4 - x^3)^3}. \text{ Essa si annulla, nel campo reale, per } x = \sqrt[3]{-14 + 6\sqrt{5}},$$

$x = \sqrt[3]{-14 - 6\sqrt{5}}$; i valori approssimati di tali numeri sono facilmente valutabili con l'ausilio di una piccola calcolatrice scientifica. La derivata seconda è positiva per $x \leq \sqrt[3]{-14 - 6\sqrt{5}}$ e per $\sqrt[3]{-14 + 6\sqrt{5}} \leq x \leq \sqrt[3]{4}$.

Dunque la funzione $f(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli $(-\infty, \sqrt[3]{-14 - 6\sqrt{5}})$ e $(\sqrt[3]{-14 + 6\sqrt{5}}, \sqrt[3]{4})$. Il grafico della curva k risulta come in Fig. 3.



— La sola retta parallela all'asse delle ascisse, e da esso distinta, tangente alla curva k è la retta di equazione $y = \frac{1}{3}$. Le coordinate dei punti di intersezione fra la curva k e tale retta si determinano risolvendo il sistema di equazioni $y = \frac{1}{3}$; $y = \frac{x^2}{4-x^3}$, ossia risolvendo l'equazione di III grado $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$. Tale equazione risulta facilmente riducibile di grado, essendo già nota la soluzione $x = -2$. Decomponendo dunque in fattori irriducibili il primo membro dell'equazione, si ottiene $(x+2) \cdot (x-1) = 0$ da cui si ricava $x = 1$, ossia il punto di intersezione di coordinate $\left(1, \frac{1}{3}\right)$. L'area della regione delimitata dalla curva k e dalla retta $y = \frac{1}{3}$ si determina calcolando l'integrale

$$\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{4-x^3} \right) dx = \left[\frac{1}{3}x \right]_{-2}^1 + \frac{1}{3} \int_{-2}^1 \frac{d(4-x^3)}{(4-x^3)} = 1 - \frac{1}{3} \log 4.$$

— Analizziamo ora gli ultimi due quesiti. Interpretiamo il testo del Tema (vedi nota successiva) ritenendo che, con la espressione «una funzione ...», gli estensori del Tema stesso intendessero dire «ogni funzione ...». La prima proposizione è falsa: basta considerare come controesempio la funzione $f(x) = |x|$. Essa è continua in tutto l'insieme dei numeri reali, in particolare anche in $x = 0$, ma non è ivi derivabile. Essendo infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

si ricava che in $x = 0$ vi è un punto angoloso.

La seconda affermazione è vera. Infatti la continuità di una funzione in un punto è condizione necessaria (ma non sufficiente) per la derivabilità. Per la dimostrazione si può procedere per assurdo: sia per ipotesi f una funzione non continua in x_0 , ma ivi derivabile. Dunque esiste finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Ma $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$.

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$. Ossia f è continua in x_0 , contro l'ipotesi.

Alcune riflessioni. Anche il secondo problema di questo Tema di maturità risulta facilmente affrontabile da qualunque studente che sia entrato in possesso dei requisiti minimi per lo studio di funzione, cioè delle tecniche di calcolo di semplici limiti, nonché delle operazioni di derivazione e integrazione di funzioni razionali algebriche.

Poiché il testo ministeriale non richiedeva esplicitamente di determinare i punti di flesso della funzione assegnata, studiando zeri e segno della derivata seconda, il candidato poteva effettuare, invece di calcoli laboriosi, considerazioni di natura qualitativa

miranti a dimostrare la sola esistenza, in certi intervalli di punti di flesso. Temiamo invece che la maggior parte degli studenti abbia optato per il calcolo, pur laborioso, della derivata seconda, preferendo una risoluzione dell'esercizio di tipo «standard» rispetto ad un approccio di tipo qualitativo. È innegabile infatti una diffusa difficoltà da parte degli studenti nel rielaborare sia verbalmente che per iscritto molti concetti matematici anche di uso frequente e nel gestire a livello linguistico semplici ragionamenti deduttivi.

Ci sembra che questo secondo problema fosse molto tradizionale e come tale non permettesse al candidato di trovare strategie risolutive alternative all'usuale e meccanico studio di funzione.

Le due ultime questioni, a carattere teorico, miravano a valutare la capacità da parte dello studente di argomentare in un linguaggio corretto le proprie conoscenze. La semplicità comunque delle domande potrebbe aver indotto molti alunni a risposte meccaniche, basate sulla esibizione di controesempi ampiamente utilizzati nel corso dell'anno scolastico e talvolta appresi mnemonicamente, piuttosto che stimolare un approccio di tipo critico alle questioni.

In particolare poi ci sembra che le domande stesse avrebbero potuto essere formulate in modo più preciso mediante un uso corretto dei quantificatori, usando cioè in luogo dell'inteterminativo «una» il quantificatore universale «ogni». Infatti è possibile proporre l'esempio di «Una funzione non derivabile in un punto e non continua in quel punto»;

ad esempio si pensi alla funzione $y = \frac{|x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $y = 0$ per $x = 0$. Sappiamo invece che la proposizione è falsa scrivendo «Ogni funzione non derivabile in un punto non è continua in quel punto». Al contrario la seconda proposizione è falsa sia usando il quantificatore «ogni» che «una».

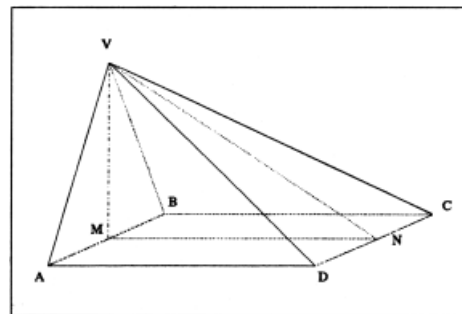
In conclusione ci sembra di poter affermare che questo secondo problema (non diversamente dal primo) risulta finalizzato essenzialmente a permettere una valutazione della capacità degli studenti nel ripetere dei procedimenti stereotipi, che si sviluppano secondo modelli prefissati.

Ne deriva cioè una prova d'esame che offre una misurazione del livello di addestramento che la scuola ha saputo indurre, riguardo ad alcuni contenuti ritenuti, a ragione o a torto, utili o significativi, anziché una valutazione della capacità di pensiero autonomo trasmessa agli allievi.

Terzo problema

a. Dimostriamo che il triangolo (V,A,B) è isoscele. Si considerino i triangoli (M,A,V) e (M,B,V) , aventi il lato VM in comune, $MA = MB$ e gli angoli in M congruenti in quanto retti. Essi sono congruenti e da ciò segue $AV = BV$.

Sia N il punto di intersezione fra la retta CD e la parallela, condotta dal punto M , al lato



AD. Essendo, per costruzione, VM perpendicolare al piano di base della piramide (V,A,B,C,D) ed MN perpendicolare alla retta CD , per il Teorema delle tre perpendicolari risulta $VN \perp CD$.

b. Dimostriamo che il triangolo (V,C,D) è isoscele. I triangoli rettangoli (N,D,V) e (N,C,V) hanno il lato VN in comune, $VND \equiv VNC$ poiché angoli retti e $ND = NC$; quindi risultano congruenti e dunque $DV = CV$.

c. Dimostriamo che i triangoli (V,A,D) e (V,B,C) sono rettangoli. Per costruzione il piano su cui giace il triangolo (V,A,B) è perpendicolare al piano di base. Ricordando che «se due piani sono perpendicolari, ogni retta dell'uno che sia perpendicolare alla loro intersezione è perpendicolare all'altro», si ha che le rette AV e BV sono perpendicolari rispettivamente ai lati AD e BC del piano di base, ossia i triangoli (V,A,D) e (V,B,C) sono rettangoli.

Dunque la superficie laterale della piramide (V,A,B,C,D) è costituita come detto nel testo.

Osserviamo inoltre che i triangoli (V,A,D) e (V,B,C) risultano congruenti, essendo rispettivamente $AD = BC$ poiché lati opposti nel rettangolo di base, $AV = BV$ per il punto a . e $DV = CV$ per il punto b .

d. Possiamo ora calcolare la lunghezza dei segmenti VM e AB . Per definizione di angolo di due piani, nel triangolo rettangolo (V,M,N) si ha $VM = MN \cdot \operatorname{tg} \alpha$ e quindi, essendo $MN = AD = 8a$, $VM = 6a$ da cui $VN = \sqrt{VM^2 + MN^2} = 10a$. Al fine di determinare AB , imponiamo ora la condizione sulla misura della superficie laterale della piramide di vertice V e base (A,B,C,D) , ossia:

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}(VAB) + \mathcal{A}(VBC) + \mathcal{A}(VDC) + \mathcal{A}(VAD) = 92a^2.$$

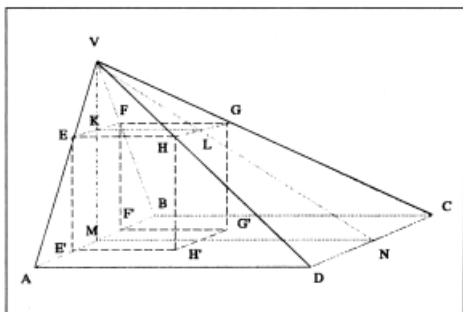
Calcoliamo quindi, in funzione della lunghezza AB , l'area $\mathcal{L}$.

Poniamo dunque $AM = MB = x$ da cui $AB = 2x$ e $AV = \sqrt{AM^2 + VM^2} = \sqrt{36a^2 + x^2}$; ne discende allora, ricordando la congruenza dei triangoli (V,A,D) e (V,B,C) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{A}(VAB) + \mathcal{A}(VBC) + \mathcal{A}(VDC) + \mathcal{A}(VAD) = \\ &= 2 \cdot \mathcal{A}(VAB) + \mathcal{A}(VBC) + \mathcal{A}(VDC) = \frac{1}{2} \overline{VA} \cdot \overline{AD} + \\ &+ \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{VM} + \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{VN} = 8a \sqrt{36a^2 + x^2} + 6ax + 10ax. \end{aligned}$$

Si ottiene allora una equazione irrazionale nell'incognita x , $8a\sqrt{36a^2+x^2}+6ax+10ax = 92a^2$, con la condizione $0 \leq x \leq \frac{23}{4}a$; l'unica soluzione accettabile risulta essere $x = \frac{5}{2}a$ e quindi $\overline{AB} = 5a$.

— Sia (E,F,G,H) il poligono sezione della piramide col piano σ e (E',F',G',H') la proiezione ortogonale del poligono stesso sul piano del rettangolo (A,B,C,D) . Ricordando che, per un noto Teorema di geometria dello spazio, «sezionando una piramide avente per base un poligono P con un piano parallelo alla base, si ottiene un poligono P' simile a P », si ha che il quadrilatero (E,F,G,H) è anch'esso un rettangolo.



Sia ora K il punto di intersezione del piano σ con la retta VM . Poniamo $\overline{VK} = x$, dunque $0 \leq x \leq 6a$. Sia L il punto di intersezione del piano σ con la retta VN . Il triangolo (V,K,L) risulta simile al triangolo (V,M,N) avendo l'angolo di vertice V in comune, $\angle VKL \equiv \angle VNM$ poiché angoli corrispondenti determinati dalle rette parallele KL e MN con la trasversale VN e $\angle VKL \equiv \angle VMN$ poiché angoli retti. Dunque $\overline{VK} : \overline{VM} = \overline{KL} : \overline{MN}$, ossia $x : 6a = \overline{KL} : 8a$, da cui segue $\overline{KL} = \frac{4}{3}x$ e quindi $\overline{EH} = \overline{KL} = \frac{4}{3}x$. Analogamente si verifica che il triangolo rettangolo (V,K,E) è simile al triangolo rettangolo (V,M,A) , dunque $\overline{VK} : \overline{VM} = \overline{EK} : \overline{AM}$ ossia $\overline{EK} = \frac{5}{12}x$, quindi $\overline{EF} = 2\overline{EK} = \frac{5}{6}x$. Inoltre $\overline{EE'} = \overline{KM} = \overline{VM} - \overline{VK} = 6a - x$. Il volume del prisma inscritto nella piramide è dunque $\overline{EF} \cdot \overline{EH} \cdot \overline{EE'} = \frac{5}{9}x^2(6a-x)$.

Consideriamo la funzione $V(x) = \frac{5}{9}x^2(6a-x)$.

Il prisma di volume massimo si ricava calcolando gli zeri della derivata prima $V'(x) = \frac{5}{3}x(4a-x)$. Essa si annulla in $x = 0$ e $x = 4a$.

Dallo studio del segno di $V'(x)$, si ricava che $V(x)$ è massimo per $x = 4a$ cioè quando il piano σ dista $2a$ dal piano di base.

— L'ultimo quesito si risolve introducendo una funzione $P(x,y) = x^2 \cdot y$ con x,y numeri reali positivi tali che $x + y = k$, essendo k una costante reale.

Per determinare quando la funzione $f(x) = kx^2 - x^3$ assume valore massimo, cerchia-

mone i punti stazionari. La derivata prima $f'(x) = x \cdot (2k - 3x)$ si annulla in $x = 0$ e in $x = \frac{2}{3}k$. Dallo studio del segno di $f'(x)$ si ricava che $f(x)$ ha massimo in $x = \frac{2}{3}k$. Per tale valore $y = \frac{1}{3}k$, dunque $x = 2y$.

Quest'ultimo risultato poteva essere utilizzato per determinare per quale valore di x il volume $V(x)$ del prisma individuato dal piano σ risulta massimo. Ponendo infatti $y = 6a - x$ si ha $x + y = 6a = \text{cost.}$ e quindi, $V(x) = \frac{5}{9}x^2y$ risulta massimo quando è $6a - x = y = \frac{1}{2}x$, cioè appunto $x = 4a$.

Alcune riflessioni. L'ultimo problema del Tema di maturità era inerente alla geometria dello spazio. Il testo del problema è stato formulato in modo da non creare difficoltà di traduzione grafica. Spesso il tracciare il disegno seguendo una prospettiva poco precisa o scorretta, oppure la scelta di un punto di vista scomodo possono pregiudicare il corretto svolgimento degli esercizi di geometria dello spazio in quanto l'acquisizione e la comprensione di concetti e teoremi di geometria solida può essere ostacolata dalla incapacità diffusa fra molti studenti di crearsi immagini mentali adeguate alla situazione da descrivere.

Il problema era tuttavia interessante poiché la geometria dello spazio si conferma come uno degli ambiti disciplinari più adatti allo sviluppo contemporaneo della intuizione procedurale (l'intuizione spaziale, cioè, nel caso) e del rigore esecutivo dei singoli passi della soluzione.

Infatti nel giudicare anche un esercizio semplice, come quello presente, le Commissioni avranno avuto la possibilità di valutare da un lato la capacità dei candidati di organizzare un percorso risolutivo lineare e coerente e dall'altro di controllare la cura con la quale ogni affermazione è giustificata e non lasciata invece alla suggestione di una vaga intuizione.

Il problema si prestava ad una risoluzione sia di tipo sintetico sia trigonometrico, anche se quest'ultima richiedeva calcoli laboriosi. Interessante sarebbe stato poter affrontare una risoluzione di tipo analitico, anche se è noto che ben pochi studenti posseggono, al termine del Liceo tradizionale, gli strumenti per una trattazione analitica della geometria dello spazio.

L'ultimo quesito del problema consente di verificare in che misura lo studente abbia acquisito i concetti di variabile e di parametro e in che modo li sappia gestire in nuovi contesti. L'apparente difficoltà poteva risiedere nel dover definire una funzione in due variabili (la funzione prodotto $P(x,y)$), facilmente riconducibile poi ad una funzione in una sola variabile, sfruttando tutte le condizioni espresse dal testo del problema.

In base alle considerazioni svolte sui singoli problemi, il Tema di maturità sopra esaminato risulta essere rispondente, in merito a contenuti ed obiettivi, agli attuali programmi ministeriali.

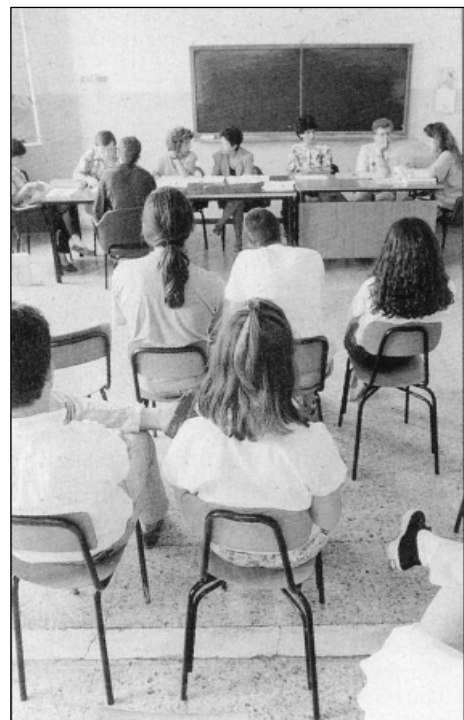
Innovativo appare l'inserimento di quesiti a carattere teorico, rappresentando ciò un tentativo ancora timido, ma peraltro apprezzabile, di valutare le capacità del candidato nel riflettere criticamente su quanto appreso.

Prima di concludere, ci sembra importante sottolineare il fatto che la libertà, concessa esplicitamente dal testo ministeriale al candidato, di affrontare due problemi a scelta fra i tre proposti, riapre ogni anno discussioni e polemiche in merito sia alle modalità di valutazione dei singoli problemi, sia alla uniformità di giudizio globale fra Commissioni operanti in scuole dello stesso tipo o all'interno della stessa realtà scolastica. È giusto, ci chiediamo, operare una valutazione graduata per le soluzioni di problemi di diversa difficoltà, oppure debbono essere valutati dello stesso livello tutti gli elaborati che contengono le soluzioni giuste di due problemi, indipendentemente dalla loro difficoltà? E in caso affermativo, chi ed in base a quali criteri può giudicare il grado di difficoltà delle singole prove? Osserviamo tuttavia che, a differenza del Tema ministeriale dello scorso anno, nel quale era presente una evidente disparità relativa al grado di difficoltà dei vari problemi, la prova di maturità di questo giugno appare in merito certamente più equilibrata, permettendo davvero al candidato la libertà di scegliere a suo piacimento due soli esercizi da risolvere, senza rischiare di compromettere l'intera prova.

Nonostante ciò riteniamo necessario da parte del Ministero diffondere indicazioni più precise atte a dirimere il problema non secondario (considerati gli attuali criteri di ammissione alle Facoltà universitarie) di una equa valutazione della prova d'esame.

Roberta Gorni - Mario Marchi

Gruppo di ricerca didattica Nuova Secondaria
Università Cattolica (Brescia)



MATEMATICA P.N.I.

Maturità scientifica sperimentale

Nicoletta Nolli - Ornella Robutti

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono assegnati i punti $A(2,0)$ e $B(0,4)$. Sia $P(x,y)$ un punto di detto piano con $x>0$ ed $y>0$, e C, D, E, F i punti medi dei lati OA, AP, PB, BO del quadrilatero $OAPB$.

Il candidato:

a) dica quali posizioni deve occupare P affinché il quadrilatero $OAPB$ degeneri in un triangolo;

b) dimostri che il quadrilatero $CDEF$ è un parallelogrammo;

c) dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogrammo $CDEF$ sia un rettangolo;

d) dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogrammo $CDEF$ sia un rombo;

e) dica dove si trova P quando il parallelogrammo $CDEF$ è un quadrato e ne determini le coordinate;

f) dimostri che l'area del parallelogrammo $CDEF$ è metà dell'area del quadrilatero $OAPB$;

g) esprima in funzione dell'ascissa di P il rapporto z tra l'area del quadrato di lato EF e l'area del parallelogrammo $CDEF$, quando P , oltre a rispettare le condizioni

inizialmente assegnate, appartiene alla retta di equazione $y = 4 - x$;

h) studi la funzione $z(x)$ e ne disegni il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'x'z'$.

2. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata la parabola di equazione:

$$y = -x^2 + 2x + 3.$$

Sia $P(x,y)$ un punto dell'arco γ , appartenente al primo quadrante, di detta parabola ed H la proiezione di P sull'asse delle ascisse.

Sul piano α passante per il punto P e perpendicolare all'asse delle ascisse, si consideri il triangolo APB , avente i lati AP e PB uguali, il segmento PH come altezza relativa al lato AB , e tale che la somma delle lunghezze di AB e di PH sia 4.

Il candidato:

a) dica quali posizioni deve occupare P sull'arco considerato affinché il triangolo APB esista;

b) limitatamente alle suddette posizioni di P , esprima l'area S del triangolo APB in funzione dell'ascissa di P e studi come essa varia al variare di P ;

c) calcoli il volume del solido, luogo del triangolo APB al variare di P sull'arco γ ;

d) risponda alle domande a) e b) quando P varia sull'arco γ' della parabola considerata, appartenente al semipiano $x \geq 0$, verificando in particolare se esistono estremi relativi ed assoluti di $S(x)$ ed eventualmente determinandoli.

3. Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco: Paolo colpisce il centro del bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%.

Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole:

— lanceranno una moneta per decidere chi tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni;
— tireranno a turno e vincerà chi per primo farà centro.

Il candidato:

a) calcoli la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro;

b) calcoli la probabilità che Paolo vinca entro il quarto tiro;

c) se in un certo tiro fissato, ad esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcoli la probabilità che a tirare sia stato Paolo;

d) descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità che Paolo vinca all'ennesimo lancio se ad iniziare è stato Giovanni, e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

Primo quesito

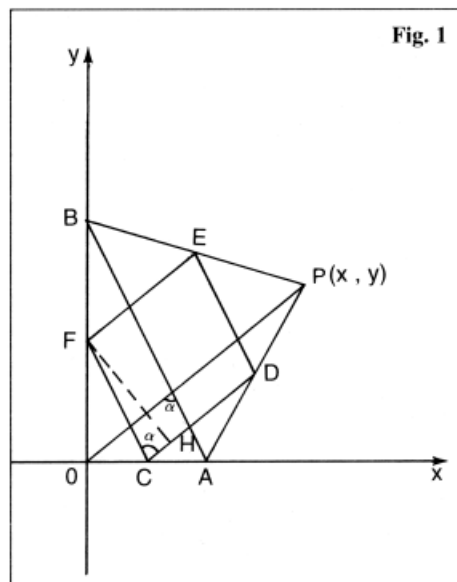
Questo quesito è formulato in modo molto chiaro con otto richieste separate, numerate e molto precise. Nella prima parte del testo viene descritta la situazione che colloca il problema nel contesto della geometria analitica e permette, con le informazioni esplicitate, di pervenire al grafico di Fig. 1.

È importante notare l'informazione sulle coordinate del punto P che limita la sua variabilità al primo quadrante, assi cartesiani esclusi.

La prima richiesta è molto semplice e ad essa si può rispondere osservando il disegno: il quadrilatero $OAPB$ degenera in un triangolo quando P appartiene al segmento AB estremi esclusi. In simboli $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$

Per rispondere alla seconda richiesta si può operare ancora nel campo della geometria analitica calcolando i coefficienti angolari delle rette cui appartengono i segmenti FC , ED , CD , FE e notando che sono a due a due uguali. Questo metodo, pur essendo molto semplice, comporta qualche calcolo; è possibile rispondere al quesito in modo più diretto utilizzando i teoremi della geometria piana conseguenza del teorema di Talete: nel triangolo OAB il segmento FC congiunge i punti medi dei lati OA e OB , quindi è paral-

lelo al terzo lato AB ed è congruente alla sua metà; nel triangolo APB il segmento ED congiunge i punti medi dei lati PB e PA , quindi è parallelo al terzo lato AB ed è congruente alla sua metà. Per la proprietà transitiva del parallelismo e della congruenza ne segue che FC ed ED sono paralleli e congruenti: il quadrilatero $CDEF$ è quindi un parallelogrammo.



Un parallelogrammo è un rettangolo quando due lati consecutivi sono perpendicolari, quindi per rispondere alla terza richiesta è sufficiente imporre, per esempio, la condizione sui coefficienti angolari delle rette cui appartengono i segmenti FC e CD :

$$m_{FC} = -\frac{1}{m_{CD}} \text{ con } x>0 \text{ e } y>0, \text{ ottenendo l'equazione di una semiretta aperta di origine il}$$

punto $O(0,0)$. In simboli: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$

Un parallelogrammo è un rombo quando due lati consecutivi sono congruenti, quindi per rispondere alla richiesta del punto d) è sufficiente imporre, per esempio, la condizione: $FC^2 = CD^2$ con $x>0$ e $y>0$, ottenendo l'equazione dell'arco di circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio $\sqrt{20}$, appartenente al primo

quadrante. In simboli: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$

Un parallelogrammo è un quadrato quando è sia rombo che rettangolo, quindi si interseca la semiretta di equazione $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$

con l'arco di circonferenza di equazio-

ne $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$ ottenendo il punto $P(4,2)$

(Fig. 2).

Per rispondere alla richiesta del punto f) si può, come al punto b), procedere per via analitica calcolando le aree dei due quadrila-

teri ($A_{CDEF} = x + \frac{y}{2}$ e $A_{OAPB} = 2x + y$) e verificando che $A_{CDEF} = \frac{1}{2}A_{OAPB}$, oppure per via tri-

gonometrica sfruttando la regola che permette di calcolare l'area di un quadrilatero come semiprodotto delle diagonali per il seno dell'angolo che esse formano.

Utilizzando questo secondo metodo si ottengono i seguenti calcoli (Fig. 1):

$$A_{OAPB} = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \alpha$$

$$A_{CDEF} = \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{FH} = \overline{CD} \cdot \overline{FC} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} \overline{OP} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \alpha$$

$$\text{e di conseguenza si verifica } A_{CDEF} = \frac{1}{2} A_{OAPB}$$

Si può notare che, seppur questa seconda strategia risolutiva sia meno evidente per gli alunni, il procedimento non richiede calcoli. Non è necessario infatti determinare le lunghezze dei segmenti presenti nelle formule, ma basta applicare i teoremi di trigonometria e le relazioni tra i lati del parallelogrammo e le diagonali del quadrilatero individuate al punto b).

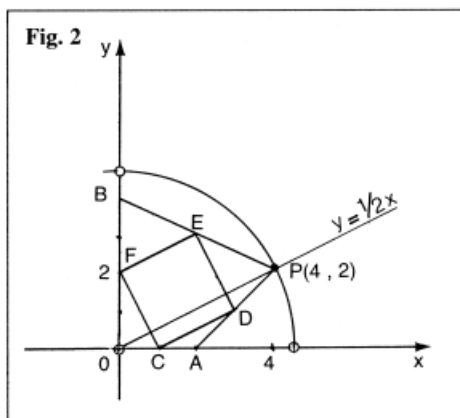
Anche la richiesta del punto g) è abbastanza semplice se si rileva dal testo e si impone nei calcoli l'ulteriore condizione sul punto P: l'appartenenza alla retta di equazione $y = 4 - x$. In questo modo si ottiene, in funzione dell'ascissa x di P, l'area del quadrato di lato EF: $\overline{EF}^2 = \frac{x^2 - 4x + 8}{2}$ e l'area del parallelogrammo CDEF: $A_{CDEF} = \frac{4 + x}{2}$ e di

conseguenza la funzione $z(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x + 4}$ con $0 < x < 4$.

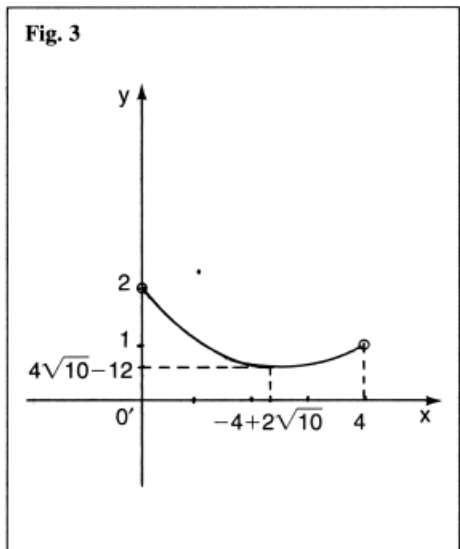
Anche lo studio di funzione richiesto all'ultimo punto del quesito non comporta particolari problemi, se non la solita ambiguità, spesso presente nei testi ministeriali, sull'insieme di studio della funzione: non essendo esplicitato nel testo se la funzione deve essere studiata nell'insieme di variabilità della questione geometrica da cui deriva o se invece lo studio deve essere esteso a tutto il campo reale, spesso gli studenti si trovano incerti sulla scelta da seguire. Ai nostri studenti consigliamo di studiare la funzione nelle limitazioni geometriche trovate precedentemente a meno che nel testo non venga esplicitamente richiesto di estenderne lo studio ad $\mathbb{R}$.

Sotto queste condizioni la funzione, algebrica, razionale, fratta ha il seguente andamento agli estremi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} z(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} z(x) = 1$ ed è positiva $\forall x \in (0, 4)$.

La derivata prima è $z'(x) = \frac{x^2 + 8x - 24}{(x + 4)^2}$.



Studiando il segno del numeratore si trova che la funzione ha un minimo assoluto nel punto $M(2\sqrt{10} - 4, 4\sqrt{10} - 12)$. Il grafico della funzione è in Fig. 3.

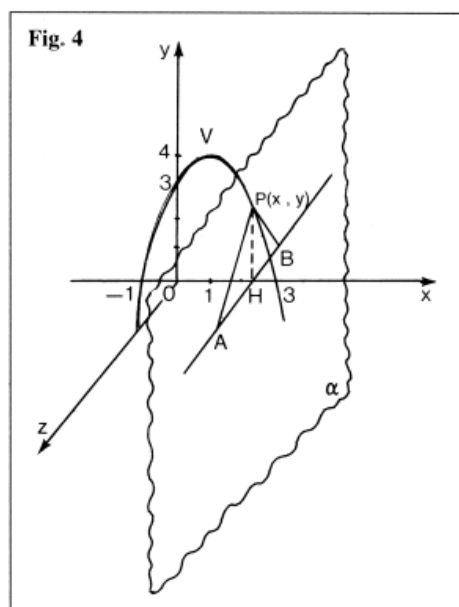


Secondo quesito

Il testo del secondo quesito ha la stessa impostazione del primo: è presente una parte che definisce la situazione problematica (le informazioni in essa contenute permettono di costruire il grafico di Fig. 4), successivamente vengono formulate quattro richieste dipendenti una dall'altra. Mentre le prime due e l'ultima ci sembrano chiare e prive di ambiguità, la terza può risultare, ad una lettura affrettata e poco meditata, di difficile comprensione (la dicitura *luogo del triangolo* non è completamente autoesplicativa).

È importante notare le informazioni che limitano le posizioni di $P(x, y)$ nel piano cartesiano, in quanto permettono di scrivere le sue coordinate in dipendenza della sola variabile x : $P(x, -x^2 + 2x + 3)$ con $0 \leq x \leq 3$.

Per rispondere alla prima domanda è utile osservare che la lunghezza del segmento PH, altezza del triangolo APB, varia al variare di $P \in \gamma$: quando $x = 0$ $\overline{PH} = 3$, la sua lunghezza cresce fino ad un massimo $\overline{PH} = 4$ per $x = 1$, poi decresce fino a raggiungere il valore 0 quando $x = 3$. Dovendo tenere conto della condizione fornita nel testo



$\overline{AB} = 4 - \overline{PH}$, il triangolo APB esiste per ogni posizione del punto $P \in \gamma$ tranne quando P coincide con il vertice V della parabola e quando P coincide con il punto di coordinate (3, 0), cioè per $0 \leq x < 3$ e $x \neq 1$.

Conoscendo la relazione che lega le lunghezze di AB e PH ed essendo molto facile determinare la lunghezza di PH in funzione di x (è l'ordinata del punto P), si perviene con brevi e pochi calcoli alla funzione

$$S(x) = -\frac{1}{2} (x - 1)^2 (x + 1) (x - 3) \text{ che,}$$

con le limitazioni $0 \leq x < 3$ e $x \neq 1$, esprime l'area del triangolo APB in funzione di x . Lo studio di funzione non presenta difficoltà concettuali (si tratta di un polinomio di quarto grado), ma costringe, per poter pervenire ad un grafico che sia il più preciso possibile, ad alcuni calcoli un po' laboriosi che potrebbero creare qualche problema agli studenti. La funzione è sempre positiva, nelle limitazioni imposte dal problema, tende a 0 per x che tende a 1, e tende a 0 per x che tende a 3 da sinistra.

La sua derivata prima è:

$S'(x) = -2(x - 1)(x^2 - 2x - 1)$. È positiva per $1 < x < 1 + \sqrt{2}$ e si annulla per $x = 1 + \sqrt{2}$. La funzione ha dunque un massimo nel punto di coordinate $(1 + \sqrt{2}, 2)$, ma non ha minimo, in quanto il valore $x = 1$ è escluso dal dominio.

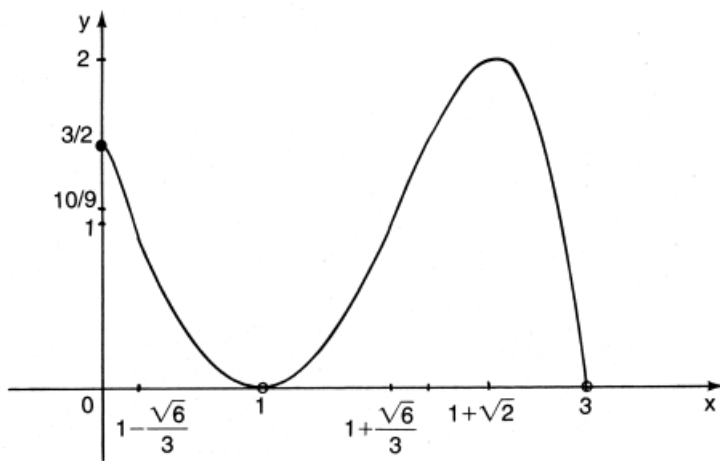
La derivata seconda è:

$S''(x) = -2(3x^2 - 6x + 1)$, lo studio del suo segno permette di determinare due flessi di coordinate $(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{10}{9})$ e $(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{10}{9})$.

Il grafico della funzione è in Fig. 5. Si nota che la funzione ha un massimo assoluto nel punto di coordinate $(1 + \sqrt{2}, 2)$.

La richiesta del punto c) è indubbiamente la più difficile per gli alunni, sia per la sua formulazione che per l'oggetto della domanda. La frase va interpretata e capita: il solido di cui si chiede il volume è un luogo di punti nello spazio, descritti dal triangolo APB, variabile in funzione di P. Non è chiesto quindi il solito

Fig. 5



calcolo di volume di un solido di rotazione con l'utilizzo dell'integrale definito; in questo caso l'applicazione del calcolo integrale è più "sottile" e richiede da parte dell'alunno una certa rielaborazione dei contenuti studiati. Una volta superato lo scoglio dell'interpretazione della richiesta i calcoli sono molto semplici:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2} \int_0^3 (x-1)^2 (x+1) (x-3) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 2x^2 - 3x \right]_0^3 = \\ &= \frac{27}{10}. \end{aligned}$$

Le domande del punto d) sono analoghe a quelle dei punti a) e b), ma sono cambiate le condizioni di variabilità di P: ora P si trova sull'arco γ' della parabola appartenente al semipiano $x \geq 0$. Per individuare le posizioni che deve occupare P su γ' affinché il triangolo APB esista è indispensabile ricordare le informazioni contenute nella prima parte del testo: la lunghezza del segmento PH deve essere compresa tra 0 e 4 (valori estremi esclusi), in quanto deve valere la condizione $AB = 4 - PH$. Ora però il punto P può appartenere anche all'arco di parabola che si trova nel quarto quadrante dove l'ordinata del punto P è negativa: ne segue che $PH = |y_P| = |-x^2 + 2x + 3|$. Quindi per determinare i valori limiti di x è necessario risolvere l'equazione modulare $|-x^2 + 2x + 3| = 4$. Si trovano l'ascissa del vertice $x = 1$, già discussa nel caso a), e il valore $x = 1 + 2\sqrt{2}$ che rappresenta l'ascissa del punto D di ordinata -4, posizione estrema del punto P sull'arco γ' . Riassumendo: affinché il triangolo APB esista, P varia su γ' con le limitazioni $0 \leq x < 1 + 2\sqrt{2}$ e $x \neq 1$ e $x \neq 3$.

La funzione che ora esprime l'area del triangolo APB è ovviamente più complessa del caso b), in quanto nelle lunghezze dei segmenti AB e PH compaiono delle quantità in modulo. Indichiamo questa funzione con $S_1(x)$ per distinguerla dalla $S(x)$ trovata al punto b):

$$S_1(x) = \frac{1}{2} (4 - PH) \cdot PH =$$

$$= \frac{(4 - |-x^2 + 2x + 3|) \cdot |-x^2 + 2x + 3|}{2}$$

con $0 \leq x < 1 + 2\sqrt{2}$ e $x \neq 1$ e $x \neq 3$. Lo studio di questa funzione può essere facilmente condotto se si nota che una parte di essa coincide con $S(x)$, che è già stata studiata al punto b), infatti:

$$S_1(x) = \begin{cases} S(x) & 0 \leq x < 3 \text{ e } x \neq 1 \\ -\frac{(x+1)(x-3)(x^2-2x-7)}{2} & 3 < x < 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Occorre solamente studiare la seconda parte della funzione nell'intervallo indicato. Si ha che $\lim_{x \rightarrow 3^+} S_1(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow (1+2\sqrt{2})^-} S_1(x) = 0$.

La derivata prima vale

$$S'_1(x) = -2(x-1)(x^2-2x-5),$$

è positiva per $3 < x < 1 + \sqrt{6}$ e si annulla in $x = 1 + \sqrt{6}$. La funzione presenta un massimo nel punto di coordinate $(1 + \sqrt{6}, 2)$.

La derivata seconda è $S''_1(x) = -6(x^2 - 2x - 1)$, è sempre negativa nell'insieme di definizione, quindi la funzione, nell'inter-

vallo considerato, ha la concavità rivolta sempre verso il basso. Il suo grafico è rappresentato in figura 6.

Esistono due massimi assoluti nei punti di ascissa $x = 1 + \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{6}$, in cui la funzione assume valore 2 e un massimo relativo in $x = 0$ (punto di non stazionarietà), in cui la funzione assume valore $3/2$. Non esistono invece minimi relativi o assoluti, in quanto i punti in cui la funzione potrebbe assumere valore 0 non appartengono all'intervallo di variabilità della x.

Questa parte del quesito è molto interessante perché costringe gli alunni a:

- confrontare due situazioni geometriche che presentano analogie e differenze;
- tenere sempre presente le informazioni contenute nel testo;
- distinguere, all'interno delle condizioni presentate nella prima parte, quelle ancora valide per risolvere l'ultimo punto, da quelle che invece sono variate;
- sfruttare i risultati conseguiti nella risoluzione dei primi due punti per rendere semplice lo studio di funzione.

Terzo quesito

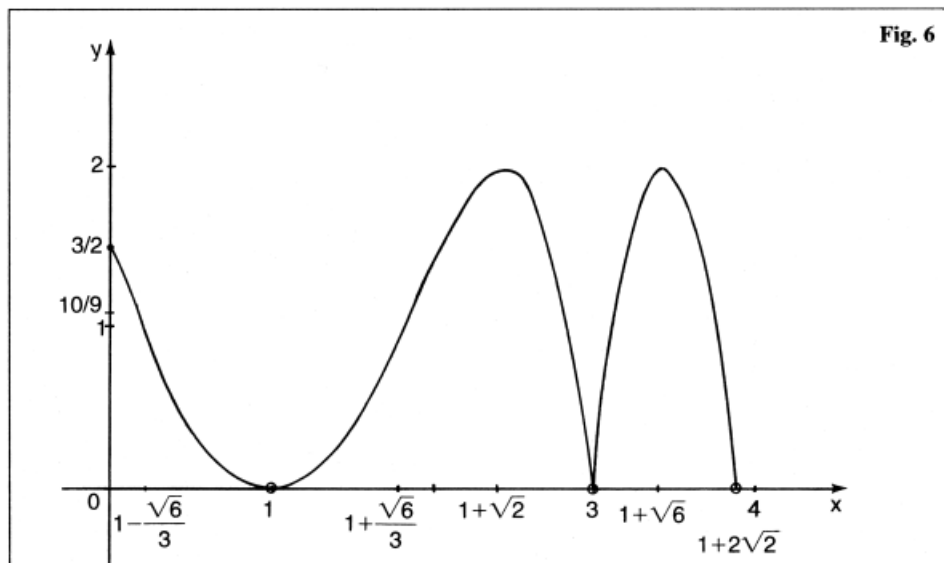
Questo quesito è formulato con quattro richieste separate, in ordine crescente di difficoltà, con la presenza dell'informativa nell'ultima.

Il testo del problema fornisce come informazioni le probabilità di fare centro di Paolo e Giovanni e le regole del loro gioco.

La prima richiesta (la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro: evento E_1) non presenta particolari difficoltà: occorre semplicemente trasferire nel linguaggio della probabilità le regole del gioco. Si applicano il teorema della probabilità contraria e quello della probabilità composta, ottenendo¹:

¹ G rappresenta l'evento "Giovanni fa centro", P l'evento "Paolo fa centro", G e P i corrispondenti eventi contrari.

Fig. 6



$$p(E_1) = \frac{1}{2} p(\bar{G}) \cdot p(\bar{P}) \cdot p(\bar{G}) \cdot p(\bar{P}) \cdot p(G) = 0,001.$$

La seconda richiesta (la probabilità che Paolo vinca entro il quarto tiro: evento E_2) ha una difficoltà in più rispetto alla prima: la parola chiave *entro* implica l'analisi di tutti gli eventi incompatibili e l'applicazione del teorema della probabilità totale. Infatti Paolo può vincere al primo, secondo, terzo o quarto tiro:

$$\begin{aligned} p(E_2) &= \frac{1}{2} p(P) + \frac{1}{2} p(\bar{G}) \cdot p(P) + \\ &+ \frac{1}{2} p(\bar{P}) \cdot p(\bar{G}) \cdot p(P) + \\ &+ \frac{1}{2} p(\bar{G}) \cdot p(\bar{P}) \cdot p(\bar{G}) \cdot p(P) = 0,47. \end{aligned}$$

La terza richiesta (la probabilità che vinca Paolo, conoscendo che al quindicesimo tiro si ottiene centro per la prima volta: evento E_3) è molto interessante perché in una riga e mezza contiene parecchie informazioni. Quelle esplicite sono:

- si ottiene centro per la prima volta
- tiro fissato
- quindicesimo.

La formulazione della domanda, unitamente alle precedenti informazioni, indica che bisogna applicare il teorema di Bayes per ottenere la probabilità di E_3 .

Più sottili, ma non meno importanti, sono le informazioni implicite, nascoste sotto le seguenti parole chiave:

- *certo* tiro fissato
- *ad esempio* il quindicesimo.

Il testo suggerisce quindi di porre l'attenzione sul quindicesimo tiro, ma solo per avere un riferimento numerico: ciò significa che il risultato non dovrebbe cambiare se si fissasse l'attenzione su un altro tiro.

Indicando con Q l'evento di centro al quindicesimo lancio, avremo:

$$\begin{aligned} p(E_3) &= p(P/Q) = \frac{p(P \cap Q)}{p(Q)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} p(\bar{P})^7 \cdot p(\bar{G})^7 \cdot p(P)}{\frac{1}{2} p(\bar{P})^7 \cdot p(\bar{G})^7 \cdot [p(P) + p(G)]} = 0,48. \end{aligned}$$

Il quesito era tutt'altro che banale per gli studenti, perché dovevano capire dalle prime due domande il meccanismo di calcolo della

probabilità di vincita di Paolo o Giovanni, in particolare:

- che a tirare per primo sia Paolo o Giovanni non importa, perché la probabilità è 1/2 in entrambi i casi;
- a seconda di chi fa il primo lancio, la vittoria di ciascuno dei due giocatori avviene solo nei lanci pari o solo in quelli dispari;
- poiché si susseguono le probabilità di non fare centro di Paolo e di Giovanni fino a che uno dei due fa centro, è molto più semplice usare le potenze che non i prodotti di tali probabilità.

Dalle precedenti considerazioni scaturisce che la scelta del quindicesimo è casuale ma non troppo: infatti, il risultato sarebbe lo stesso se al posto di 15 sostituissimo un altro numero dispari. Ciò discende dal fatto che, se vince Paolo, significa che è stato lui a tirare per primo, ha compiuto sette errori (anche Giovanni ha compiuto sette errori), finché ha fatto centro.

La vittoria ad un lancio dispari presuppone che ci sia stato un numero pari di perdite: metà di un giocatore e metà dell'altro.

La quarta richiesta (la probabilità che vinca

Paolo in un qualunque lancio se ad iniziare è stato Giovanni: evento E_4) è più facile della precedente per quanto riguarda la matematica, però contiene anche la progettazione di un algoritmo.
L'informazione chiave è che ad iniziare sia stato Giovanni, e ciò facilita il compito allo studente che ha capito il meccanismo del gioco, perché significa che Paolo può vincere solo in un lancio pari.
La probabilità che Paolo vinca all'ennesimo lancio si calcola:

$$p(E_4) = p(\overline{G})^{\frac{n}{2}} \cdot p(\overline{P})^{\frac{n}{2}-1} \cdot p(P).$$

La procedura richiesta può essere suddivisa nei seguenti sottoproblemi:
1. acquisire n, numero del tiro vincente;
2. calcolare $p(E_4)$ utilizzando la formula precedente;
3. stampare il valore di $p(E_4)$.

Nel risolvere il primo sottoproblema bisogna ricordare che è indispensabile un controllo sul numero n del lancio in cui Paolo vince: tale numero deve essere pari e maggiore di zero.
Nel risolvere il secondo va notato che la formula richiede il calcolo di due potenze di base fissata ed esponente dipendente da n: è opportuno quindi prevedere una funzione (ricorsiva o iterativa) che calcoli una generica potenza noti la base e l'esponente.
In figura 7 è rappresentato il grafo GNS della funzione che calcola la potenza in modo ricorsivo e quello dell'intero algoritmo; a fianco la codifica della procedura in linguaggio Pascal.

Il compito di matematica della maturità di quest'anno, ci sembra in linea con gli obiettivi, i metodi e i contenuti dei programmi ministeriali, segue la tradizione dei precedenti temi del P.N.I. e verifica il generale obiettivo dell'integrazione disciplinare tra matematica e informatica.
Il primo quesito offre una situazione problematica di buon livello in cui sono coinvolte



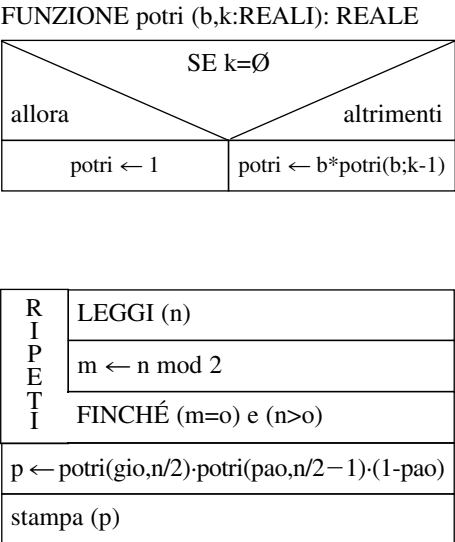
sia la geometria euclidea che la geometria analitica, sia la trigonometria che l'analisi. Lo studente nel risolvere i vari punti deve passare più volte dall'ambito geometrico-grafico a quello algebrico-simbolico e viceversa, dimostrando di saper utilizzare le conoscenze acquisite nei vari ambiti.
Il secondo quesito, a parte l'insidia nel punto c) già segnalata precedentemente, è ben articolato nelle richieste di difficoltà crescente perché, partendo da una situazione geometrica semplice e circoscritta, la amplia e l'approfondisce verso temi dell'analisi di alto livello (uso degli integrali per calcolare volumi di solidi non di rotazione). Ci spiace che tutti gli altri argomenti di analisi infinitesimale e numerica, a cui viene dedicata la

maggior parte delle lezioni del quinto anno, non compaiano in questo tema di maturità.
Il terzo quesito non smentisce la linea di tendenza degli ultimi anni, che privilegia il tema di probabilità e statistica come tema innovativo e prioritario, al fine di uniformare le prove di maturità scientifica a quelle del resto d'Europa.
Il problema non presenta particolari insidie se non quella di distinguere tra il numero pari e dispari di lanci. L'algoritmo richiesto è ben integrato con le domande di matematica.

Nicoletta Nolli
Liceo scientifico «G. Aselli», Cremona
Ornella Robutti

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Fig. 7



```
program tiroconarco;
uses crt;
const pao = 0.25;
      gio = 0.20;
var p: real;
    n,esp,m: integer;
(* funzione ricorsiva che calcola la potenza dati la base e l'esponente *)
function potri(b,k:real):real;
begin
  if k=0 then potri:=1
    else potri:=b*potri(b,k-1);
end;

BEGIN (* inizio programma principale *)
  clrscr;
  (* acquisizione dati *)
  repeat
    write(' tiro vincente (numero pari) = ');
    readln(n);
    m:=n mod 2
  until (m=0) and (n>0);

  writeln;
  (* calcolo della probabilità e stampa del risultato *)
  p:=potri(gio,n/2)*potri(pao,n/2-1)*(1-pao);
  write(' La probabilità che Paolo vinca al ',n, '° tiro è: ',p);
  readln;
END.
```