

LA LEGGE E LA BOTTIGLIA DI MARIOTTE

Ledo Stefanini

Si tratta dello stesso *Mariotte* il cui nome è perennemente associato a quello di *Boyle* per indicare la legge dei gas ideali. Di nome faceva *Edme* e visse in Francia (1620 – 1684) al tempo di Pascal col quale condivise l'interesse per l'aria. Pubblicò due importanti saggi sui fluidi: un “Discorso sulla natura dell'aria” nel 1676 in cui espose quella che diventerà nota come *legge di Boyle & Mariotte* e, dieci anni dopo, un “Trattato sul movimento delle acque” in cui pose le basi dell'idrodinamica. La nostra lezione sarà divisa in due parti: la prima, di carattere storico, dedicata alla legge dei gas che abbiamo ricordato; la seconda di carattere sperimentale, dedicata alla *bottiglia*.

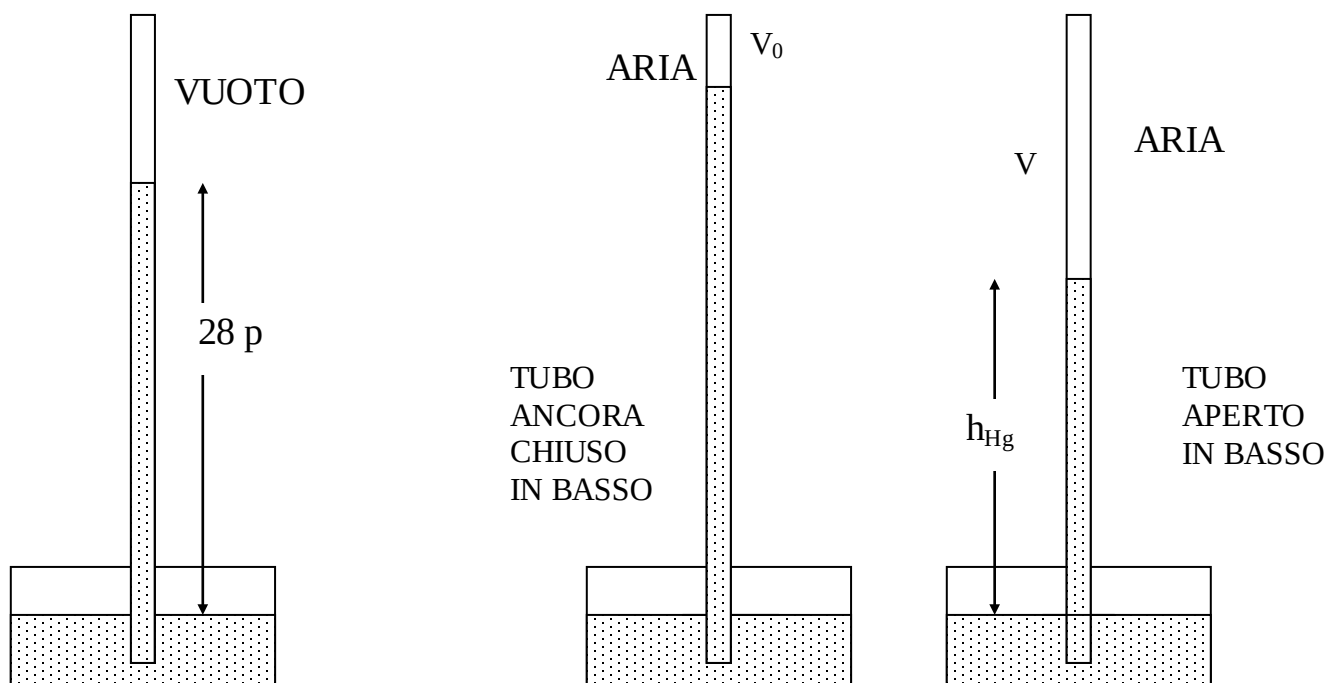
LA LEGGE SECONDO MARIOTTE

Seguiremo la linea adottata da Mariotte nel suo saggio sulla natura dell'aria.

Per fare l'esperienza di Torricelli prendiamo un tubo chiuso ad un estremo e lo riempiamo completamente di mercurio.

Ripetiamo ora l'esperienza con il tubo solo parzialmente pieno di mercurio.

TUBO



All'inizio, con l'estremità inferiore ancora tappata, il tubo contiene mercurio fino ad una certa altezza, mentre il volume rimanente è pieno d'aria a pressione atmosferica. Quando si apre la bocca inferiore del tubo, il livello del mercurio si abbassa e l'aria si dilata. Tuttavia, la pressione dell'aria contenuta nel tubo, sommata alla pressione esercitata dalla colonna di mercurio rimarrà uguale alla pressione atmosferica :

$$p(\text{aria}) + h_{Hg} = p_0 = 28 \quad (1)$$

Più grande è la pressione dell'aria, minore l'altezza della colonna di mercurio. Pertanto la differenza tra 28 pollici e l'altezza della colonna di mercurio è una misura della pressione dell'aria contenuta nel tubo. Se poi si ipotizza che la pressione dell'aria sia inversamente proporzionale al suo volume, dovrebbe valere anche la relazione

$$p(\text{aria}) \times V(\text{aria}) = p_0 V_0 \quad (2).$$

Usando le parole stesse di Mariotte:

Se l'aria si condensa in proporzione al peso da cui è compressa, bisogna che in un'esperienza nella quale il mercurio si ferma a 14 pollici, l'aria che è contenuta nel resto del tubo risulti dilatata del doppio rispetto al volume che occupava prima dell'esperienza ...

Per chiarire il concetto Mariotte propone tre problemi.

I° PROBLEMA

Data l'altezza del mercurio che si vuole rimanga nel tubo di grandezza data, trovare la quantità d'aria che bisogna lasciarvi prima dell'esperienza.

Sia 4 pollici l'altezza data del mercurio e sia 37 pollici il tubo, di cui si deve affondare di un pollice nel mercurio del vaso, cosicché ne rimangono 36 pollici al di sopra. Mettiamo che l'esperienza sia fatta e che il mercurio si sia fermato a 4 pollici di altezza. Dunque, resteranno 32 pollici di aria dilatata. Ma come 28 pollici, peso intero dell'atmosfera, stanno a 24, che è la differenza rispetto ai 4 pollici assegnati rispetto ai 28, così 32 sta a $27 \frac{2}{5}$. Dunque, 27 pollici e $\frac{2}{5}$ è l'estensione dell'aria che bisogna lasciare al di sopra del mercurio prima dell'esperienza, di modo che, dopo l'esperienza, il mercurio si fermi a 4 pollici di altezza.

In linguaggio odierno: la lunghezza emersa è 36p, di cui 4 occupati dal mercurio e 32p dall'aria. La pressione dell'aria è quindi

$$p(\text{aria}) = (28 - 4) p_{Hg} \quad (3)$$

Per la legge di Mariotte

$$p(\text{aria}) \times V(\text{aria}) = p_0 V_0 = 28 V_0 \quad (4)$$

Ne segue

$$V_0 = \frac{p(\text{aria}) \times V(\text{aria})}{28} = \frac{24 \times 32}{28} = 27,4p \quad (5)$$

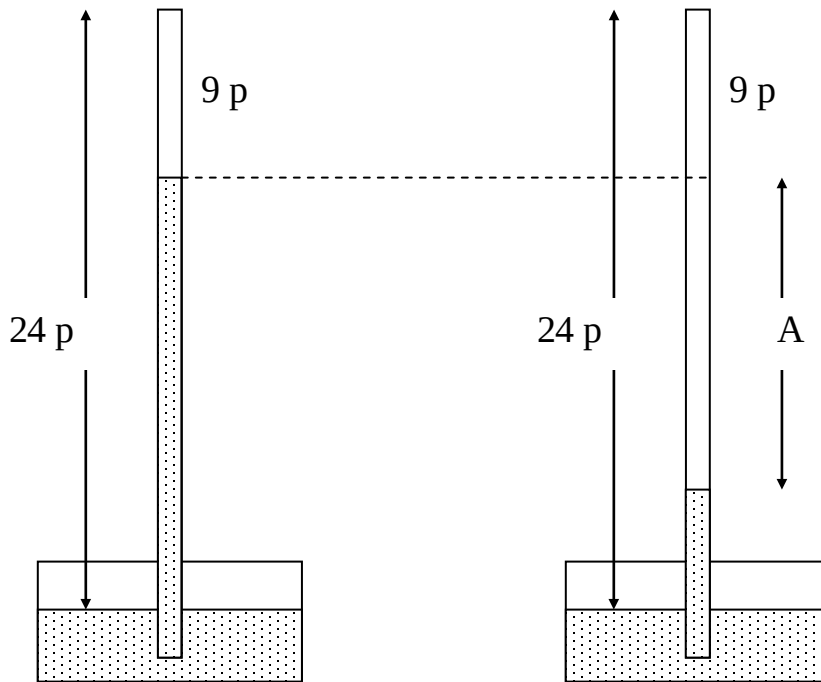
II° PROBLEMA

Data la quantità d'aria che si vuole lasciare al di sopra del mercurio in un tubo di grandezza data, trovare a quale altezza si metterà il mercurio dopo l'esperienza.

Questo problema si può risolvere mediante il calcolo dell'Algebra, in questo modo.

Sia l'altezza del tubo 25 pollici e l'estensione data dell'aria 9 pollici; si domanda: a quale altezza si metterà il mercurio nel tubo dopo l'esperienza? Si indichi con A l'aumento dell'estensione dell'aria contenuta; e poiché l'estremità del tubo deve affondare nel mercurio del vaso per un

pollice, per cui resteranno solo 24 pollici; se si indica con $9+A$ l'estensione dell'aria dilatata, il resto del tubo fino a 24 sarà $15-A$, che è la grandezza incognita che cerchiamo.



In linguaggio odierno:

Poiché il volume dell'aria diventa $9+A$, l'altezza della colonna di mercurio diventa $15-A$ e la pressione dell'aria

$$p(\text{aria}) = 28 - (15 - A) = 13 + A \quad (6)$$

La legge ipotizzata da Mariotte

$$pV = p_0V_0 \quad (7)$$

diventa

$$(13 + A)(9 + A) = 28 \times 9 \quad (8)$$

cioè una banale equazione di secondo grado:

$$A^2 + 22A - 135 = 0 \quad (9)$$

che, risolta, produce

$$A = 5 \text{ p}$$

Dal punto di vista della matematica è interessante la soluzione proposta da Mariotte:

Ora, per la regola spiegata prima; 28 pollici di mercurio devono stare nello stesso rapporto con la differenza che vi è tra questi 28 pollici e l'altezza che deve restare nel tubo, come l'estensione dell'aria dilatata, vale a dire 9 pollici più A , sta a 9 pollici.

$$\frac{28}{13 + A} = \frac{9 + A}{9} \quad (10)$$

Dunque, convertendo la ragione, $9+A$ starà ad A , come 28 sta a $15-A$.

$$\frac{9 + A}{A} = \frac{28}{15 - A} \quad (11)$$

Da ciò consegue che il prodotto degli estremi $9+A$ e $15-A$ sarà uguale a quello di 28 per A .

$$(9 + A)(15 - A) = 28A \quad (12)$$

Dunque il primo prodotto, cioè $135 + 6A - A^2$ sarà uguale a $28A$

$$135 + 6A - A^2 = 28A \quad (13)$$

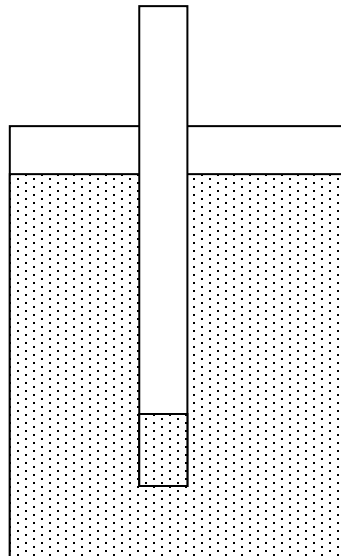
e sommando A^2 da una parte e dall'altra, si produrrà uguaglianza tra $135+6A$ e $28A + A^2$; e togliendo $6A$ da ciascuna di queste grandezze, si avrà ancora uguaglianza tra $A^2 + 22A$ e 135 , e infine tra A^2 e $135 - 22A$;

$$A^2 = 135 - 22A$$

e se si somma il quadrato di 11, metà di 22, a 135, la somma sarà 256, la radice quadrata del quale è 16, e da questo togliendo 11, il resto 5 sarà il valore dell'estensione che abbiamo indicato con A , e di conseguenza $15 - A$ varrà 10 pollici, l'altezza richiesta a cui si metterà il mercurio dopo l'esperimento.

III° PROBLEMA

Data l'altezza di un tubo pieno d'aria, trovare a quale profondità bisognerà immergere l'estremità aperta nel mercurio di un vaso, affinché questo risalga nel tubo (verticale) fino ad un'assegnata altezza.



Il tubo sia di 10 pollici e l'altezza assegnata sia un pollice. Allora il volume iniziale era 10p; quello finale 9p. La pressione iniziale era 28p (Hg); quella finale $28+y-1$, se indichiamo con y la lunghezza immersa del tubo. Applicando la legge ipotizzata da Mariotte:

$$(28 + y - 1) \times 9 = 10 \times 28 \quad (14)$$

da cui

$$y = 4,1 p$$

LA BOTTIGLIA DI MARIOTTE: UNA DESCRIZIONE D'ANTAN

La bottiglia di Mariotte era un componente normale dei gabinetti di fisica delle scuole fino alla metà del secolo scorso; attualmente scomparsa anche dai manuali scolastici. Ma è un peccato perché il suo comportamento può essere all'origine di alcuni conflitti cognitivi che inducono ad un salutare ripensamento delle nostre nozioni in fatto di pressione atmosferica. A condizione che si sia capaci – e la cosa è tutt'altro che difficile – di realizzarne, con bottiglie e tubi di plastica, almeno un esemplare.

Crediamo che la descrizione migliore sia quella che Adolphe Ganot ha dato in un manuale che, nell'800, ha avuto innumerevoli edizioni in varie lingue, tra cui l'italiano:

**TRATTATO ELEMENTARE DI
FISICA SPERIMENTALE ED APPLICATA
E DI METEOROLOGIA
CON UNA NUMEROSA RACCOLTA DI PROBLEMI**

Illustrato con 586 incisioni sul legno intercalate nel testo

DI A. GANOT

PROFESSORE DI MATEMATICA E DI FISICA

VERSIONE DEL DOTT. GEMELLO GORINI

NUOVA EDIZIONE SULL'ULTIMA EDIZIONE ORIGINALE

Aumentata di nuove incisioni, pure intercalate nel testo,
e dei lavori più recenti nei diversi rami della Fisica

MILANO

FRANCESCO PAGNONI, TIPOGRAFO-EDITORE

Contrada di Ciovasso N. 9

1861

Il testo è il seguente:

Bottiglia di Mariotte, ed uso della medesima. - La bottiglia di Mariotte è un apparato che offre diversi effetti rimarchevoli di pressione atmosferica. È una bottiglia alquanto grande, il cui collo è chiuso da un turacciolo, trapassato da un tubo di vetro aperto alle due estremità.

Sulla superficie laterale della bottiglia vi sono tre tubulature *a*, *b*, *c*, ciascuna delle quali ad orifizio ristretto e chiuso da un piccolo turacciolo di legno.

Am messo che la bottiglia ed il tubo sieno pieni d'acqua, consideriamo ciò che accade quando si apre successivamente una delle tubulature *a*, *b*, *c*, supponendo, come mostra la figura, che l'estremità inferiore del tubo *g* si trovi tra le due tubulature *b* e *c*.

1.° Se si apre dapprincipio la tubulatura *b*, evvi efflusso, il livello si abbassa nel tubo *g*, ed appenachè è giunto in *c* cessa l'efflusso. Questi fenomeni trovano spiegazione nell'eccesso di pressione, che prima aveva luogo in *b* dall'interno all'esterno: eccesso di pressione che dispare quando il liquido nella bottiglia e nel tubo *g* è allo stesso livello. Infatti prima che incominciasse l'efflusso, la pressione su tutti i punti dello strato orizzontale *be* non era eguale. In *e* essa risultava e dalla pressione atmosferica e dal peso della colonna d'acqua *ge*, mentrecchè in *b* la pressione è soltanto eguale a quella dell'atmosfera. Ma quando il livello in *b* ed in *e* è lo stesso, evvi equilibrio, imperciocchè nella bottiglia e nel tubo allora la pressione è eguale per tutti i punti dello strato orizzontale *be*. Difatti, essendo la pressione, che si esercita in questo caso in *b* ed in *e*, eguale a quella dell'atmosfera, torna facile il dimostrare che qualsivoglia punto *o* dello strato *be* soffra la

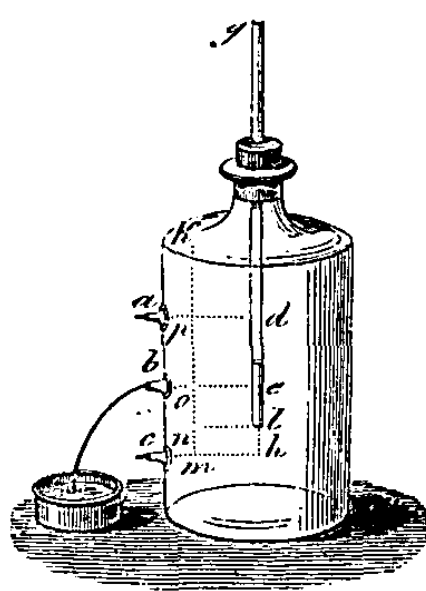
stessa pressione. Perciò rappresentiamo con H la pressione atmosferica: questa forza, agendo direttamente in b ed e , si trasmette in tutti i sensi nell'interno della bottiglia, giusta il principio di Pascal e la parete k sopporta dal basso all'alto una pressione uguale ad $H - k_o$, poichè il peso della colonna d'acqua k_o distrugge in parte la pressione che tende a trasmettersi in k . Ora, pel principio di meccanica che la reazione è sempre uguale e contraria all'azione, la pressione Hk_o

viene riguardata dall'alto al basso dalla parete k sullo strato be ; dimodochè la molecola o sopporta in realtà due pressioni, l'una eguale al peso della colonna d'acqua k_o , l'altra alla pressione $H - k_o$, proveniente dalla reazione della parete k .

Adunque la pressione reale, che sopporta la molecola o è $k_o + H - k_o$, ossia H , come dovevasi dimostrare.

2.° Se si chiude la tubulatura b e si apre la tubulatura a , non evvi efflusso; al contrario l'aria rientra nella bottiglia per l'orifizio a , e l'acqua risale nel tubo g fino allo strato ad : allora l'equilibrio è ristabilito. Infatti, si può di leggeri riconoscere mediante un ragionamento simile al precedente, che la pressione è allora eguale per tutti i punti dello strato orizzontale ad .

3.° Chiusi gli orifizi a e b , aprasi l'orifizio c . In questo caso evvi efflusso con velocità costante fintantochè il livello dell'acqua nella bottiglia non sia disceso al disotto dell'orifizio d del tubo; l'aria rientra allora bolla per bolla per questo orifizio, e si porta alla parte superiore della bottiglia, dove prende il posto dell'acqua che affluisce.



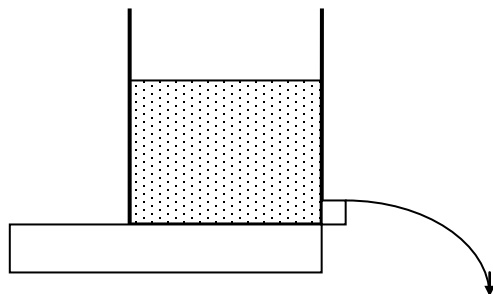
Per dimostrare che l'efflusso dell'orifizio c è costante, bisogna far vedere che la pressione che si esercita sullo strato orizzontale ch è invariabilmente uguale alla pressione atmosferica aumentata di quella della colonna d'acqua hl .

Supponiamo infatti che nella bottiglia il livello dell'acqua si sia abbassato fino allo strato ad . L'aria, che è penetrata nella bottiglia sopporta allora una pressione uguale ad $H - p_m$. In virtù della sua elasticità l'aria rinvia questa pressione allo strato ch . Ora questo sopporta anche il peso della colonna d'acqua p_m . Dunque la pressione trasmessa in m è in realtà $p_m + H - p_m$ ossia $H + p_n$, cioè $H + hl$. Si dimostrerebbe del pari che questa pressione è ancora la stessa quando il livello si è abbassato in eb , e così di seguito finchè il livello è superiore all'orifizio. Dunque la pressione sullo strato ch è costante, e per conseguenza la velocità di efflusso. Ma quando il livello è disceso al disotto del punto l , questa pressione decresce e per conseguenza la velocità di efflusso.

Per quanto abbiamo detto la bottiglia di Mariotte offre il mezzo di ottenere un efflusso costante; a tale intento la si riempie d'acqua e si tiene aperta la tubulatura collocata al disotto dell'orifizio l del tubo. La velocità d'efflusso è allora proporzionale alla radice quadrata dell'altezza lh .

LA BOTTIGLIA DI MARIOTTE: UNA DESCRIZIONE MODERNA

Mettiamo di avere una botte, e che sia aperta e munita di una spina (o cannello) attraverso la quale spillare il liquido che contiene; p.e.vino.



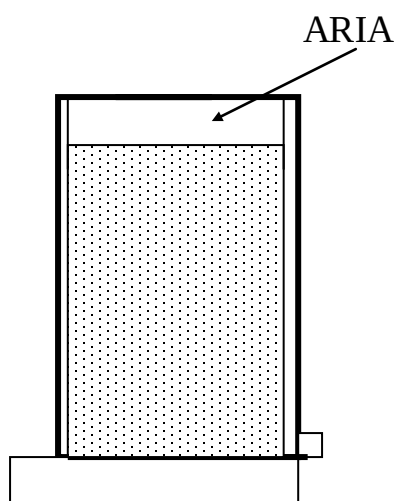
Quando si apre il rubinetto, il vino comincia a fluire; ma la sua velocità di uscita (portata) diminuisce progressivamente. La legge di Torricelli insegna infatti che

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho gh$$

dove ρ è la densità del liquido, v la velocità di efflusso ed h l'altezza del liquido nel recipiente. Da questa si trae che, come dice Ganot, “La velocità d'efflusso è allora proporzionale alla radice quadrata dell'altezza”

Poiché questa diminuisce nel tempo, diminuisce anche la differenza di pressione ai capi del tubo di uscita e, di conseguenza, diminuisce la portata.

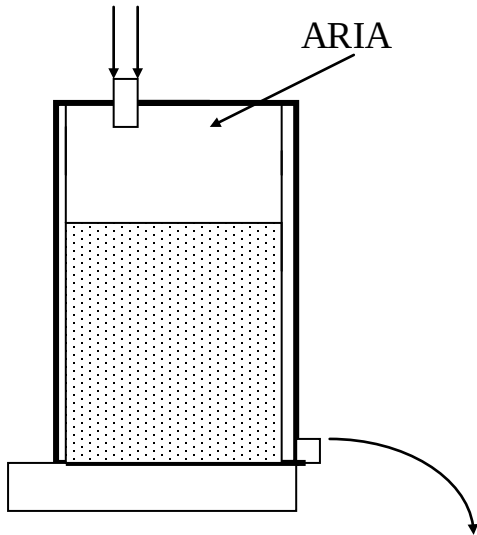
Mettiamo ora di fare la stessa esperienza con la botte chiusa (come tutte le botti).



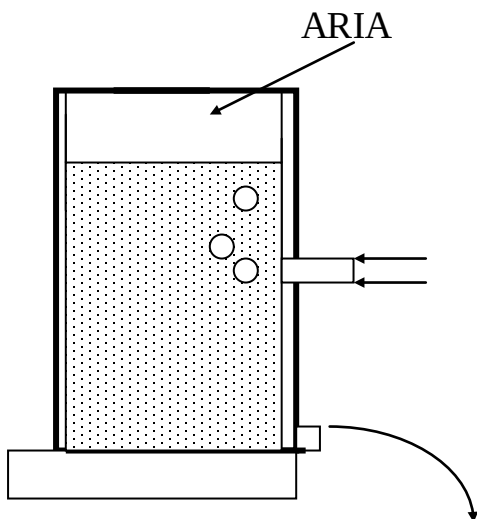
In questo caso il flusso si smorza rapidamente ed è facile comprenderne il motivo: nella zona superiore, occupata dall'aria, la pressione diminuisce per cui la pressione all'estremità interna della spina diventa uguale alla pressione all'estremità esterna (che è quella atmosferica). Significa che la pressione nella zona occupata dall'aria è la pressione atmosferica diminuita della pressione idrostatica dovuta al vino:

$$P_{aria} = P_0 - \rho gh$$

Il flusso del vino riprende se pratichiamo un foro nella parte alta del recipiente.



Dal foro inferiore esce vino e dal superiore entra aria. Se, col dito, si tappa uno dei due fori, ambedue i flussi cessano. La pressione nella camera d'aria è uguale alla pressione esterna. Che succede se si pratica un foro nella parete laterale, al di sotto del livello dell'acqua?

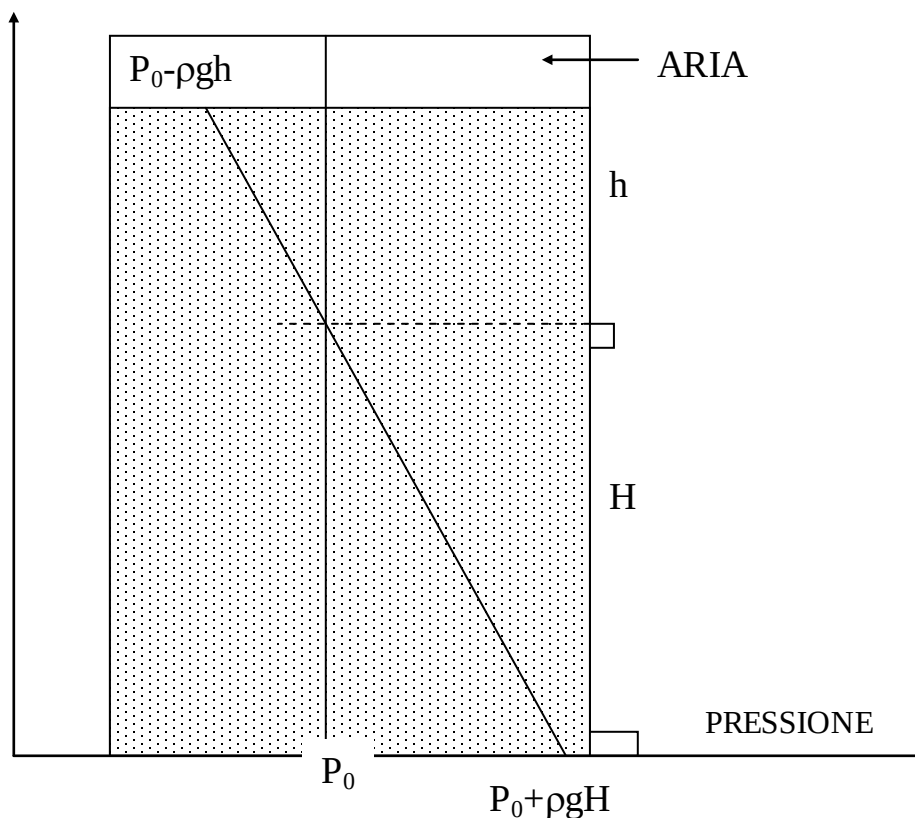


Mentre il vino esce dal foro in basso, l'aria entra attraverso il foro in alto. Le bolle d'aria salgono e danno luogo ad una camera d'aria nella quale la pressione, diversamente da prima, è inferiore alla pressione atmosferica. La differenza rispetto alla pressione atmosferica è misurata dal dislivello tra la superficie del liquido e il foro

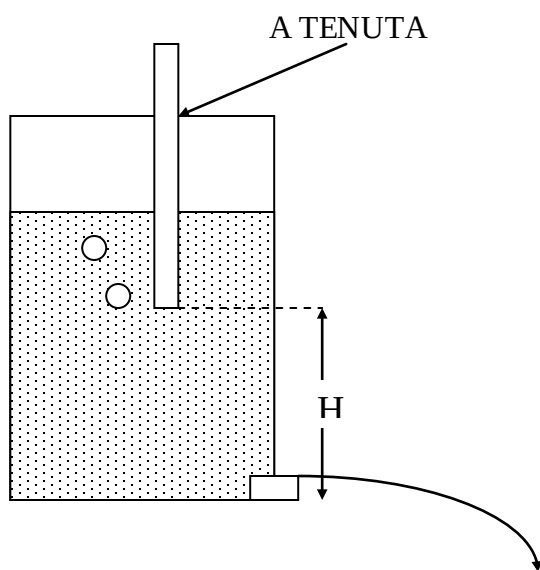
$$p = p_0 - \rho gh$$

dove ρ è la densità del liquido, ed h il dislivello.

Volendo dare una rappresentazione grafica dell'andamento della pressione in funzione della quota:



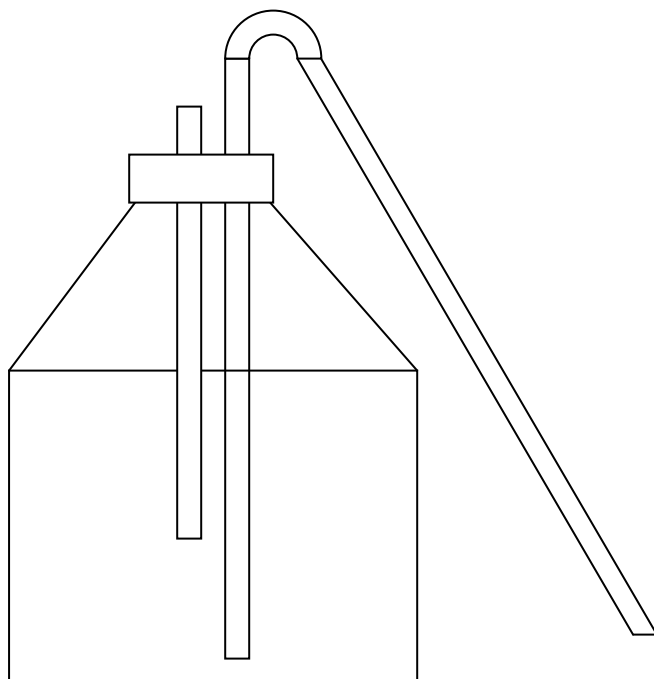
Per la legge di Torricelli, la portata dipende solo dalla differenza di quota H tra due fori e quindi si mantiene costante al variare del livello del liquido. In questo modo la bottiglia di Mariotte rappresenta un erogatore di liquido a portata costante, e che si può variare cambiando il dislivello tra di due fori. Questo si può fare inserendo nella bottiglia un tubo attraverso un tappo a tenuta:



Variando il dislivello H , possiamo regolare la velocità di efflusso.

Naturalmente, non è necessario che il recipiente sia sagomato come le bottiglie di Mariotte che si osservano (dimenticate) negli armadi dei *gabinetti di fisica* delle scuole. Anche una normale damigiana può diventare una *bottiglia di Mariotte* con l'inserimento di una tappo forato attraverso il

quale passano due tubi: uno lungo e flessibile che funge da sifone e uno breve e diritto che serve a regolare la velocità di efflusso.



Per innescare il sifone vi sono due modi. Si può aspirare dal tubo ad U- e questo è il metodo prediletto da coloro che amano il vino- oppure si può soffiare nel tubo secondario. Una volta innescato il sifone si ha un flusso costante la cui intensità dipende dalla distanza tra la bocca del tubo secondario e il fondo della damigiana. Se, col dito, si tappa l'orifizio superiore del tubo, il flusso si interrompe.

Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia