

Logica e algebrizzazione di Boole

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

La logica formale

La logica formale è lo studio delle regole sintattiche che devono essere rispettate, per esempio, da un ragionamento matematico per essere considerato tale.

La logica formale

La logica formale è lo studio delle regole sintattiche che devono essere rispettate, per esempio, da un ragionamento matematico per essere considerato tale. In matematica esistono infatti delle *proposizioni*, che non sono altro che frasi, affermazioni alle quali può essere attribuito un *valore di verità*.

La logica formale

La logica formale è lo studio delle regole sintattiche che devono essere rispettate, per esempio, da un ragionamento matematico per essere considerato tale. In matematica esistono infatti delle *proposizioni*, che non sono altro che frasi, affermazioni alle quali può essere attribuito un *valore di verità*. Ad esempio, l'affermazione

ogni numero multiplo di 4 è pari

è una proposizione (matematica) siccome possiamo stabilirne un valore di verità.

La logica formale

La logica formale è lo studio delle regole sintattiche che devono essere rispettate, per esempio, da un ragionamento matematico per essere considerato tale. In matematica esistono infatti delle *proposizioni*, che non sono altro che frasi, affermazioni alle quali può essere attribuito un *valore di verità*. Ad esempio, l'affermazione

ogni numero multiplo di 4 è pari

è una proposizione (matematica) siccome possiamo stabilirne un valore di verità. Nella logica formale non ha nessuna importanza in realtà il valore di verità in sé,

La logica formale

La logica formale è lo studio delle regole sintattiche che devono essere rispettate, per esempio, da un ragionamento matematico per essere considerato tale. In matematica esistono infatti delle *proposizioni*, che non sono altro che frasi, affermazioni alle quali può essere attribuito un *valore di verità*. Ad esempio, l'affermazione

ogni numero multiplo di 4 è pari

è una proposizione (matematica) siccome possiamo stabilirne un valore di verità. Nella logica formale non ha nessuna importanza in realtà il valore di verità in sé, ma quello che conta è come connettere tra loro diverse proposizioni in modo da formarne di più complesse e studiare quindi il valore di verità della proposizione così ottenuta.

La negazione logica

Il primo modo per ottenere una nuova proposizione a partire da una proposizione P assegnata è quello della *negazione logica*:

La negazione logica

Il primo modo per ottenere una nuova proposizione a partire da una proposizione P assegnata è quello della *negazione logica*: la negazione di P è data dalla proposizione denotata con

$$\neg P$$

La negazione logica

Il primo modo per ottenere una nuova proposizione a partire da una proposizione P assegnata è quello della *negazione logica*: la negazione di P è data dalla proposizione denotata con

$$\neg P$$

e che risulta quindi falsa se P è vera, e vera se P è falsa.

La negazione logica

Il primo modo per ottenere una nuova proposizione a partire da una proposizione P assegnata è quello della *negazione logica*: la negazione di P è data dalla proposizione denotata con

$$\neg P$$

e che risulta quindi falsa se P è vera, e vera se P è falsa. Mettendo i valori di verità in una tabella abbiamo quindi la *tabola di verità della negazione*:

P	$\neg P$
V	F
F	V

La congiunzione logica

Un altro facile modo per ottenere una nuova proposizione a partire stavolta da due proposizioni P e Q assegnate è quello della *congiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione e della lingua italiana:

La congiunzione logica

Un altro facile modo per ottenere una nuova proposizione a partire stavolta da due proposizioni P e Q assegnate è quello della *congiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione e della lingua italiana: la proposizione P e Q è la proposizione denotata con

$$P \wedge Q$$

La congiunzione logica

Un altro facile modo per ottenere una nuova proposizione a partire stavolta da due proposizioni P e Q assegnate è quello della *congiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione e della lingua italiana: la proposizione P e Q è la proposizione denotata con

$$P \wedge Q$$

e ha come tavola di verità la seguente:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La congiunzione logica

Un altro facile modo per ottenere una nuova proposizione a partire stavolta da due proposizioni P e Q assegnate è quello della *congiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione e della lingua italiana: la proposizione P e Q è la proposizione denotata con

$$P \wedge Q$$

e ha come tavola di verità la seguente:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

In sostanza, come accade nel linguaggio comune, P e Q è vera se e solo se P e Q sono entrambe vere.

La disgiunzione logica

Ancora facile è l'operazione di *disgiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione o, non esclusiva, della lingua italiana:

La disgiunzione logica

Ancora facile è l'operazione di *disgiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione o, non esclusiva, della lingua italiana: la proposizione P o Q è la proposizione denotata con

$$P \vee Q$$

La disgiunzione logica

Ancora facile è l'operazione di *disgiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione o, non esclusiva, della lingua italiana: la proposizione P o Q è la proposizione denotata con

$$P \vee Q$$

e ha come tavola di verità la seguente:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione logica

Ancora facile è l'operazione di *disgiunzione logica*, che corrisponde alla congiunzione o, non esclusiva, della lingua italiana: la proposizione P o Q è la proposizione denotata con

$$P \vee Q$$

e ha come tavola di verità la seguente:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

In sostanza, come accade nel linguaggio comune, P o Q è vera se e solo se almeno una tra P e Q è vera.

L'implicazione logica

L'*implicazione logica* rappresenta il modo più difficile da comprendere per legare due proposizioni P e Q ,

L'implicazione logica

L'*implicazione logica* rappresenta il modo più difficile da comprendere per legare due proposizioni P e Q , ma è anche il più importante per la matematica, dal momento che tutti i teoremi matematici sono scritti come implicazione:

L'implicazione logica

L'*implicazione logica* rappresenta il modo più difficile da comprendere per legare due proposizioni P e Q , ma è anche il più importante per la matematica, dal momento che tutti i teoremi matematici sono scritti come implicazione: infatti, l'implicazione

$$P \Rightarrow Q$$

vuole formalizzare ciò che nel linguaggio comune diciamo nel seguente modo: *se vale P allora vale Q .*

L'implicazione logica

L'*implicazione logica* rappresenta il modo più difficile da comprendere per legare due proposizioni P e Q , ma è anche il più importante per la matematica, dal momento che tutti i teoremi matematici sono scritti come implicazione: infatti, l'implicazione

$$P \Rightarrow Q$$

vuole formalizzare ciò che nel linguaggio comune diciamo nel seguente modo: *se vale P allora vale Q* . Per capire la tavola di verità dell'implicazione consideriamo prima un esempio tratto dalla stessa matematica.

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera,

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari.

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari. Ora vediamo che casi si possono presentare, essendo

$$P : n \text{ multiplo di } 4, Q : n \text{ pari.}$$

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari. Ora vediamo che casi si possono presentare, essendo

$$P : n \text{ multiplo di } 4, Q : n \text{ pari.}$$

Ci può capitare che P sia falsa, cioè che n non sia multiplo di 4:

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari. Ora vediamo che casi si possono presentare, essendo

$$P : n \text{ multiplo di } 4, Q : n \text{ pari.}$$

Ci può capitare che P sia falsa, cioè che n non sia multiplo di 4: ad esempio $n = 5$ oppure $n = 6$.

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari. Ora vediamo che casi si possono presentare, essendo

$$P : n \text{ multiplo di } 4, Q : n \text{ pari.}$$

Ci può capitare che P sia falsa, cioè che n non sia multiplo di 4: ad esempio $n = 5$ oppure $n = 6$. Osserviamo che quindi Q può essere sia vera sia falsa:

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari. Ora vediamo che casi si possono presentare, essendo

$$P : n \text{ multiplo di } 4, Q : n \text{ pari.}$$

Ci può capitare che P sia falsa, cioè che n non sia multiplo di 4: ad esempio $n = 5$ oppure $n = 6$. Osserviamo che quindi Q può essere sia vera sia falsa: se $n = 5$ allora Q è falsa,

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari. Ora vediamo che casi si possono presentare, essendo

$$P : n \text{ multiplo di } 4, Q : n \text{ pari.}$$

Ci può capitare che P sia falsa, cioè che n non sia multiplo di 4: ad esempio $n = 5$ oppure $n = 6$. Osserviamo che quindi Q può essere sia vera sia falsa: se $n = 5$ allora Q è falsa, se $n = 6$ allora Q è vera.

Qualunque significato logico diamo alla proposizione $P \Rightarrow Q$ deve essere vero che l'affermazione

$$n \text{ multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$$

è vera, in quanto se $n = 4m$ per un certo m allora $n = 2 \cdot 2m$ e dunque n è un numero pari. Ora vediamo che casi si possono presentare, essendo

$$P : n \text{ multiplo di } 4, Q : n \text{ pari.}$$

Ci può capitare che P sia falsa, cioè che n non sia multiplo di 4: ad esempio $n = 5$ oppure $n = 6$. Osserviamo che quindi Q può essere sia vera sia falsa: se $n = 5$ allora Q è falsa, se $n = 6$ allora Q è vera. Dunque, riassumendo, se P è falsa Q potrebbe essere sia vera sia falsa.

Invece, se P è vera allora necessariamente anche Q lo deve essere:

Invece, se P è vera allora necessariamente anche Q lo deve essere: la dimostrazione scritta precedentemente mostra proprio che non può capitare il caso in cui P sia vera e Q sia falsa:

Invece, se P è vera allora necessariamente anche Q lo deve essere: la dimostrazione scritta precedentemente mostra proprio che non può capitare il caso in cui P sia vera e Q sia falsa: questo è quindi l'unico caso in cui $P \Rightarrow Q$ è falsa.

Invece, se P è vera allora necessariamente anche Q lo deve essere: la dimostrazione scritta precedentemente mostra proprio che non può capitare il caso in cui P sia vera e Q sia falsa: questo è quindi l'unico caso in cui $P \Rightarrow Q$ è falsa. La tavola di verità dell'implicazione logica è quindi data da

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Invece, se P è vera allora necessariamente anche Q lo deve essere: la dimostrazione scritta precedentemente mostra proprio che non può capitare il caso in cui P sia vera e Q sia falsa: questo è quindi l'unico caso in cui $P \Rightarrow Q$ è falsa. La tavola di verità dell'implicazione logica è quindi data da

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Questa tavola è l'unica tavola di verità possibile che, applicata all'esempio considerato, dice che la proposizione $P \Rightarrow Q$ è sempre vera, qualunque sia il valore dato a n .

Dalla logica all'algebra

In un saggio del 1847, il matematico e filosofo inglese George Boole (1815-1864) propone un'interpretazione algebrica delle operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$:

Dalla logica all'algebra

In un saggio del 1847, il matematico e filosofo inglese George Boole (1815-1864) propone un'interpretazione algebrica delle operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$: questa algebrizzazione dei tre connettivi logici $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ è alla base del funzionamento logico dei calcolatori elettronici digitali, quindi anche dei moderni computer,

Dalla logica all'algebra

In un saggio del 1847, il matematico e filosofo inglese George Boole (1815-1864) propone un'interpretazione algebrica delle operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$: questa algebrizzazione dei tre connettivi logici $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ è alla base del funzionamento logico dei calcolatori elettronici digitali, quindi anche dei moderni computer, in quanto lavora solo con le cifre 0 e 1.

L'idea fondamentale di Boole è stata quella di chiamare 0 e 1 rispettivamente i valori di verità F e V delle proposizioni:

L'idea fondamentale di Boole è stata quella di chiamare 0 e 1 rispettivamente i valori di verità F e V delle proposizioni: la generica proposizione P diventa quindi una variabile numerica X che può assumere valori solamente nell'insieme

$$\{0, 1\}.$$

L'idea fondamentale di Boole è stata quella di chiamare 0 e 1 rispettivamente i valori di verità F e V delle proposizioni: la generica proposizione P diventa quindi una variabile numerica X che può assumere valori solamente nell'insieme

$$\{0, 1\}.$$

Diciamo in tal caso che X è una variabile *booleana*.

L'idea fondamentale di Boole è stata quella di chiamare 0 e 1 rispettivamente i valori di verità F e V delle proposizioni: la generica proposizione P diventa quindi una variabile numerica X che può assumere valori solamente nell'insieme

$$\{0, 1\}.$$

Diciamo in tal caso che X è una variabile *booleana*. L'idea adesso è quella di scrivere delle operazioni sulle variabili booleane X, Y che riflettano i connettivi logici $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.

La negazione

Sia data la variabile booleana X .

La negazione

Sia data la variabile booleana X . Se X fosse una proposizione, allora potrebbe assumere due valori di verità, F e V , ovvero X assume valori 0 o 1 rispettivamente.

La negazione

Sia data la variabile booleana X . Se X fosse una proposizione, allora potrebbe assumere due valori di verità, F e V , ovvero X assume valori 0 o 1 rispettivamente. Sappiamo che la proposizione $\neg P$ assume quindi i valori di verità opposti V e F , rispettivamente.

La negazione

Sia data la variabile booleana X . Se X fosse una proposizione, allora potrebbe assumere due valori di verità, F e V , ovvero X assume valori 0 o 1 rispettivamente. Sappiamo che la proposizione $\neg P$ assume quindi i valori di verità opposti V e F , rispettivamente. Dunque la negazione di P si riflette su X mutando 0 in 1 e viceversa mutando 1 in 0:

La negazione

Sia data la variabile booleana X . Se X fosse una proposizione, allora potrebbe assumere due valori di verità, F e V , ovvero X assume valori 0 o 1 rispettivamente. Sappiamo che la proposizione $\neg P$ assume quindi i valori di verità opposti V e F , rispettivamente. Dunque la negazione di P si riflette su X mutando 0 in 1 e viceversa mutando 1 in 0: algebricamente ciò corrisponde a fare l'operazione

$$X \mapsto 1 - X.$$

La negazione

Sia data la variabile booleana X . Se X fosse una proposizione, allora potrebbe assumere due valori di verità, F e V , ovvero X assume valori 0 o 1 rispettivamente. Sappiamo che la proposizione $\neg P$ assume quindi i valori di verità opposti V e F , rispettivamente. Dunque la negazione di P si riflette su X mutando 0 in 1 e viceversa mutando 1 in 0: algebricamente ciò corrisponde a fare l'operazione

$$X \mapsto 1 - X.$$

Infatti, se $X = 0$ allora $1 - X = 1$,

La negazione

Sia data la variabile booleana X . Se X fosse una proposizione, allora potrebbe assumere due valori di verità, F e V , ovvero X assume valori 0 o 1 rispettivamente. Sappiamo che la proposizione $\neg P$ assume quindi i valori di verità opposti V e F , rispettivamente. Dunque la negazione di P si riflette su X mutando 0 in 1 e viceversa mutando 1 in 0: algebricamente ciò corrisponde a fare l'operazione

$$X \mapsto 1 - X.$$

Infatti, se $X = 0$ allora $1 - X = 1$, invece se $X = 1$ allora $1 - X = 0$;

La negazione

Sia data la variabile booleana X . Se X fosse una proposizione, allora potrebbe assumere due valori di verità, F e V , ovvero X assume valori 0 o 1 rispettivamente. Sappiamo che la proposizione $\neg P$ assume quindi i valori di verità opposti V e F , rispettivamente. Dunque la negazione di P si riflette su X mutando 0 in 1 e viceversa mutando 1 in 0: algebricamente ciò corrisponde a fare l'operazione

$$X \mapsto 1 - X.$$

Infatti, se $X = 0$ allora $1 - X = 1$, invece se $X = 1$ allora $1 - X = 0$; osserviamo che se X è una variabile booleana anche $1 - X$ è ancora booleana.

Dalla congiunzione al prodotto

Siano date due variabili booleane X, Y .

Dalla congiunzione al prodotto

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \wedge Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Dalla congiunzione al prodotto

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \wedge Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definiamo quindi l'operazione $\cdot$ tra variabili booleane che riflette l'operazione logica di congiunzione:

Dalla congiunzione al prodotto

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \wedge Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definiamo quindi l'operazione $\cdot$ tra variabili booleane che riflette l'operazione logica di congiunzione: basta porre

$$X \cdot Y := 1 \quad \text{se } X = Y = 1, \quad X \cdot Y := 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Dalla congiunzione al prodotto

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \wedge Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definiamo quindi l'operazione $\cdot$ tra variabili booleane che riflette l'operazione logica di congiunzione: basta porre

$$X \cdot Y := 1 \quad \text{se } X = Y = 1, \quad X \cdot Y := 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Così facendo si ha perfetta corrispondenza tra l'operazione logica $\wedge$ e l'operazione algebrica $\cdot$.

Dalla disgiunzione alla somma

Siano date due variabili booleane X, Y .

Dalla disgiunzione alla somma

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \vee Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dalla disgiunzione alla somma

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \vee Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definiamo quindi l'operazione $+$ tra variabili booleane che riflette l'operazione logica di disgiunzione:

Dalla disgiunzione alla somma

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \vee Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definiamo quindi l'operazione $+$ tra variabili booleane che riflette l'operazione logica di disgiunzione: basta porre

$$0 + 0 := 0, 0 + 1 = 1 + 0 := 1, 1 + 1 := 0.$$

Dalla disgiunzione alla somma

Siano date due variabili booleane X, Y . Se X, Y fossero proposizioni, allora si potrebbe considerare la proposizione $P \vee Q$ che ha come tavola di verità

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definiamo quindi l'operazione $+$ tra variabili booleane che riflette l'operazione logica di disgiunzione: basta porre

$$0 + 0 := 0, 0 + 1 = 1 + 0 := 1, 1 + 1 := 0.$$

Così facendo si ha perfetta corrispondenza tra l'operazione logica $\vee$ e l'operazione algebrica $+$.

Regole di calcolo

Le operazioni $\cdot$ e $+$ appena definite su variabili booleane soddisfano a regole di calcolo naturali, ereditate dalle regole del calcolo algebrico classico.

Regole di calcolo

Le operazioni $\cdot$ e $+$ appena definite su variabili booleane soddisfano a regole di calcolo naturali, ereditate dalle regole del calcolo algebrico classico. Elenchiamo le più importanti:

Regole di calcolo

Le operazioni $\cdot$ e $+$ appena definite su variabili booleane soddisfano a regole di calcolo naturali, ereditate dalle regole del calcolo algebrico classico. Elenchiamo le più importanti:

- Proprietà *commutativa*: $X + Y = Y + X$, $X \cdot Y = Y \cdot X$.

Regole di calcolo

Le operazioni $\cdot$ e $+$ appena definite su variabili booleane soddisfano a regole di calcolo naturali, ereditate dalle regole del calcolo algebrico classico. Elenchiamo le più importanti:

- Proprietà *commutativa*: $X + Y = Y + X$, $X \cdot Y = Y \cdot X$.
- Proprietà *associativa*: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
 $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$.

Regole di calcolo

Le operazioni $\cdot$ e $+$ appena definite su variabili booleane soddisfano a regole di calcolo naturali, ereditate dalle regole del calcolo algebrico classico. Elenchiamo le più importanti:

- Proprietà *commutativa*: $X + Y = Y + X$, $X \cdot Y = Y \cdot X$.
- Proprietà *associativa*: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
 $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$.
- Proprietà di *idempotenza*: $X + X = X$, $X \cdot X = X$.

Regole di calcolo

Le operazioni $\cdot$ e $+$ appena definite su variabili booleane soddisfano a regole di calcolo naturali, ereditate dalle regole del calcolo algebrico classico. Elenchiamo le più importanti:

- Proprietà *commutativa*: $X + Y = Y + X$, $X \cdot Y = Y \cdot X$.
- Proprietà *associativa*: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
 $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$.
- Proprietà di *idempotenza*: $X + X = X$, $X \cdot X = X$.
- Proprietà *distributiva*: $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$.

Regole di calcolo

Le operazioni $\cdot$ e $+$ appena definite su variabili booleane soddisfano a regole di calcolo naturali, ereditate dalle regole del calcolo algebrico classico. Elenchiamo le più importanti:

- Proprietà *commutativa*: $X + Y = Y + X$, $X \cdot Y = Y \cdot X$.
- Proprietà *associativa*: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
 $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$.
- Proprietà di *idempotenza*: $X + X = X$, $X \cdot X = X$.
- Proprietà *distributiva*: $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$.

Un esempio

Facciamo un esempio per mostrare quanto sia più veloce il calcolo booleano rispetto al calcolo logico.

Un esempio

Facciamo un esempio per mostrare quanto sia più veloce il calcolo booleano rispetto al calcolo logico. Supponiamo di voler costruire la tavola di verità della seguente proposizione:

$$(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \vee R).$$

Un esempio

Facciamo un esempio per mostrare quanto sia più veloce il calcolo booleano rispetto al calcolo logico. Supponiamo di voler costruire la tavola di verità della seguente proposizione:

$$(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \vee R).$$

Si ha, con un po' di pazienza, la tavola:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg Q$	R	$\neg Q \vee R$	$(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \vee R)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	F

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole:

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole.

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole. Si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) =$$

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole. Si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = X \cdot Y \cdot (1 - Y + Z) =$$

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole. Si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = X \cdot Y \cdot (1 - Y + Z) =$$

$$= X \cdot (Y \cdot 1 - Y \cdot Y + Y \cdot Z) =$$

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole. Si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = X \cdot Y \cdot (1 - Y + Z) =$$

$$= X \cdot (Y \cdot 1 - Y \cdot Y + Y \cdot Z) = X \cdot (Y - Y + Y \cdot Z) =$$

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole. Si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = X \cdot Y \cdot (1 - Y + Z) =$$

$$= X \cdot (Y \cdot 1 - Y \cdot Y + Y \cdot Z) = X \cdot (Y - Y + Y \cdot Z) = X \cdot Y \cdot Z.$$

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole. Si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = X \cdot Y \cdot (1 - Y + Z) =$$

$$= X \cdot (Y \cdot 1 - Y \cdot Y + Y \cdot Z) = X \cdot (Y - Y + Y \cdot Z) = X \cdot Y \cdot Z.$$

Dunque

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = 1$$

se e solo se $X = Y = Z = 1$,

Rifacciamo l'esercizio usando l'algebra di Boole: dobbiamo calcolare

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z)$$

utilizzando ovviamente le regole dell'algebra di Boole. Si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = X \cdot Y \cdot (1 - Y + Z) =$$

$$= X \cdot (Y \cdot 1 - Y \cdot Y + Y \cdot Z) = X \cdot (Y - Y + Y \cdot Z) = X \cdot Y \cdot Z.$$

Dunque

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = 1$$

se e solo se $X = Y = Z = 1$, altrimenti si ha

$$(X \cdot Y) \cdot ((1 - Y) + Z) = 0$$

che è proprio ciò che dice la tavola di verità.

E l'implicazione logica?

Abbiamo visto come algebrizzare le operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$,

E l'implicazione logica?

Abbiamo visto come algebrizzare le operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, ma il connettivo $\Rightarrow$?

E l'implicazione logica?

Abbiamo visto come algebrizzare le operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, ma il connettivo $\Rightarrow$? In realtà l'implicazione logica si può costruire a partire dai primi tre connettivi.

E l'implicazione logica?

Abbiamo visto come algebrizzare le operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, ma il connettivo $\Rightarrow$? In realtà l'implicazione logica si può costruire a partire dai primi tre connettivi. Infatti la proposizione

$$P \Rightarrow Q$$

equivale logicamente alla proposizione

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P).$$

E l'implicazione logica?

Abbiamo visto come algebrizzare le operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, ma il connettivo $\Rightarrow$? In realtà l'implicazione logica si può costruire a partire dai primi tre connettivi. Infatti la proposizione

$$P \Rightarrow Q$$

equivale logicamente alla proposizione

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P).$$

Per mostrare questo facciamo vedere che $P \Rightarrow Q$ e $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$ hanno la stessa tavola di verità:

E l'implicazione logica?

Abbiamo visto come algebrizzare le operazioni logiche $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, ma il connettivo $\Rightarrow$? In realtà l'implicazione logica si può costruire a partire dai primi tre connettivi. Infatti la proposizione

$$P \Rightarrow Q$$

equivale logicamente alla proposizione

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P).$$

Per mostrare questo facciamo vedere che $P \Rightarrow Q$ e $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$ hanno la stessa tavola di verità:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge Q$	$\neg P$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P)$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Un secondo esempio: la dimostrazione per assurdo

Concludiamo con un interessante esempio, che costituisce la base logica della tecnica di dimostrazione per assurdo.

Un secondo esempio: la dimostrazione per assurdo

Concludiamo con un interessante esempio, che costituisce la base logica della tecnica di dimostrazione per assurdo. Mostriamo cioè che la proposizione

$$P \Rightarrow Q$$

equivale logicamente alla proposizione

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Un secondo esempio: la dimostrazione per assurdo

Concludiamo con un interessante esempio, che costituisce la base logica della tecnica di dimostrazione per assurdo. Mostriamo cioè che la proposizione

$$P \Rightarrow Q$$

equivale logicamente alla proposizione

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Facciamolo vedere prima con le tavole di verità:

Un secondo esempio: la dimostrazione per assurdo

Concludiamo con un interessante esempio, che costituisce la base logica della tecnica di dimostrazione per assurdo. Mostriamo cioè che la proposizione

$$P \Rightarrow Q$$

equivale logicamente alla proposizione

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Facciamolo vedere prima con le tavole di verità:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole.

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane.

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$,

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$, cioè

$$X \cdot Y + 1 - X.$$

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$, cioè

$$X \cdot Y + 1 - X.$$

Invece, la proposizione $\neg Q \Rightarrow \neg P$ equivale a $(\neg Q \wedge \neg P) \vee Q$,

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$, cioè

$$X \cdot Y + 1 - X.$$

Invece, la proposizione $\neg Q \Rightarrow \neg P$ equivale a $(\neg Q \wedge \neg P) \vee Q$, cioè

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$, cioè

$$X \cdot Y + 1 - X.$$

Invece, la proposizione $\neg Q \Rightarrow \neg P$ equivale a $(\neg Q \wedge \neg P) \vee Q$, cioè

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Dobbiamo quindi dimostrare che

$$X \cdot Y + 1 - X = (1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$, cioè

$$X \cdot Y + 1 - X.$$

Invece, la proposizione $\neg Q \Rightarrow \neg P$ equivale a $(\neg Q \wedge \neg P) \vee Q$, cioè

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Dobbiamo quindi dimostrare che

$$X \cdot Y + 1 - X = (1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Si ha

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y = 1 - Y - X + X \cdot Y + Y =$$

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$, cioè

$$X \cdot Y + 1 - X.$$

Invece, la proposizione $\neg Q \Rightarrow \neg P$ equivale a $(\neg Q \wedge \neg P) \vee Q$, cioè

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Dobbiamo quindi dimostrare che

$$X \cdot Y + 1 - X = (1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Si ha

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y = 1 - Y - X + X \cdot Y + Y = 1 - X + X \cdot Y$$

Dimostriamo lo stesso risultato sfruttando l'algebra di Boole. Anzitutto osserviamo come si traducono le proposizioni date in termini di variabili booleane. La proposizione $P \Rightarrow Q$ equivale a $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$, cioè

$$X \cdot Y + 1 - X.$$

Invece, la proposizione $\neg Q \Rightarrow \neg P$ equivale a $(\neg Q \wedge \neg P) \vee Q$, cioè

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Dobbiamo quindi dimostrare che

$$X \cdot Y + 1 - X = (1 - Y) \cdot (1 - X) + Y.$$

Si ha

$$(1 - Y) \cdot (1 - X) + Y = 1 - Y - X + X \cdot Y + Y = 1 - X + X \cdot Y$$

che è la tesi.