L'ellisse

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

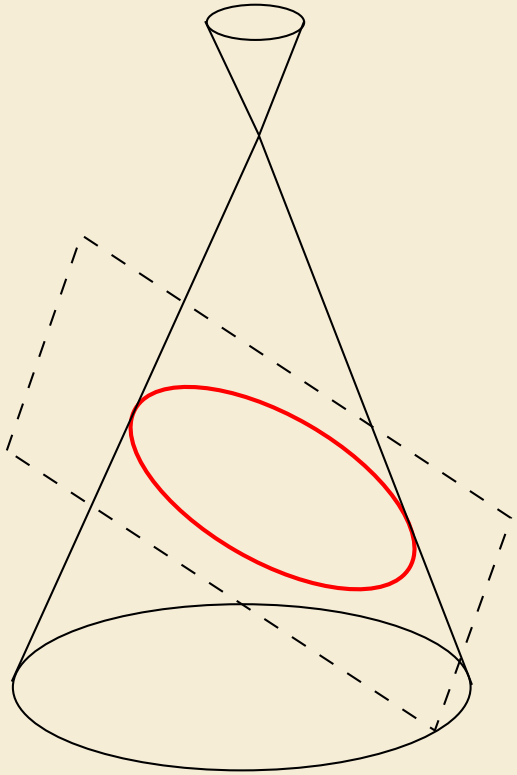
Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Introduzione

L'ellisse è una *conica*, ovvero una curva che si può ottenere come intersezione della superficie di un cono con un piano. Quando il piano è inclinato in modo che la curva-intersezione sia limitata, allora tale intersezione è un'ellisse. La circonferenza ne è un caso particolare (il caso in cui il piano che interseca la superficie conica è ortogonale all'asse del cono).

Introduzione

L'ellisse è una *conica*, ovvero una curva che si può ottenere come intersezione della superficie di un cono con un piano. Quando il piano è inclinato in modo che la curva-intersezione sia limitata, allora tale intersezione è un'ellisse. La circonferenza ne è un caso particolare (il caso in cui il piano che interseca la superficie conica è ortogonale all'asse del cono).



Definizione di ellisse

L'ellisse può anche essere definita come *luogo di punti*, in almeno due modi diversi:

Prima definizione

Data una retta d e un punto F che non stia su d, l'ellisse è il luogo di punti del piano il cui rapporto tra la distanza da F e la distanza da d è costante e minore di 1, ovvero

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d)} = e < 1.$$

Definizione di ellisse

L'ellisse può anche essere definita come *luogo di punti*, in almeno due modi diversi:

Prima definizione

Data una retta d e un punto F che non stia su d, l'ellisse è il luogo di punti del piano il cui rapporto tra la distanza da F e la distanza da d è costante e minore di 1, ovvero

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d)} = e < 1.$$

La retta d è una *direttrice*, il punto F un *fuoco* e il rapporto costante e l'*eccentricità* dell'ellisse: più e si avvicina a 1 e più l'ellisse è "allungata".

Definizione di ellisse

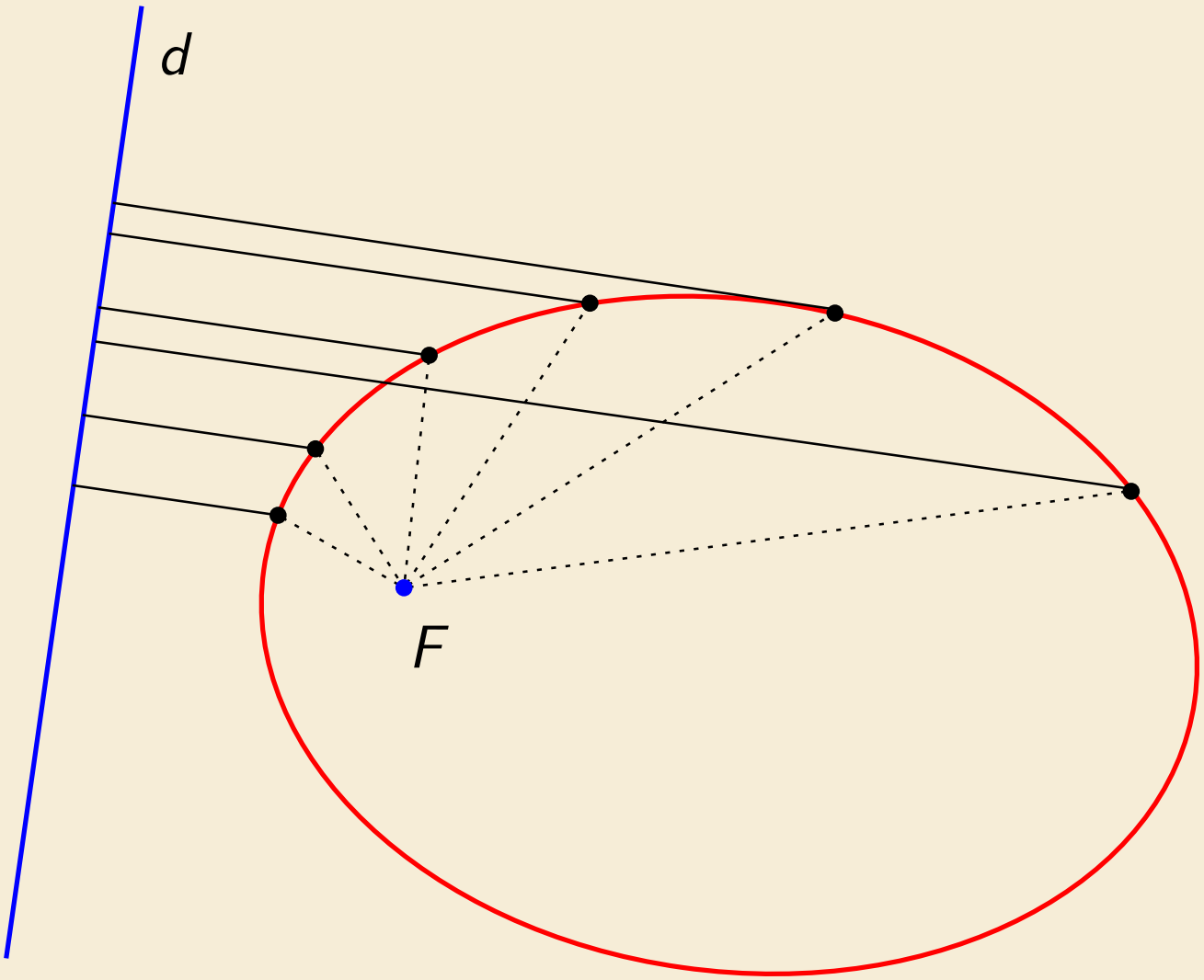
L'ellisse può anche essere definita come *luogo di punti*, in almeno due modi diversi:

Prima definizione

Data una retta d e un punto F che non stia su d, l'ellisse è il luogo di punti del piano il cui rapporto tra la distanza da F e la distanza da d è costante e minore di 1, ovvero

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d)} = e < 1.$$

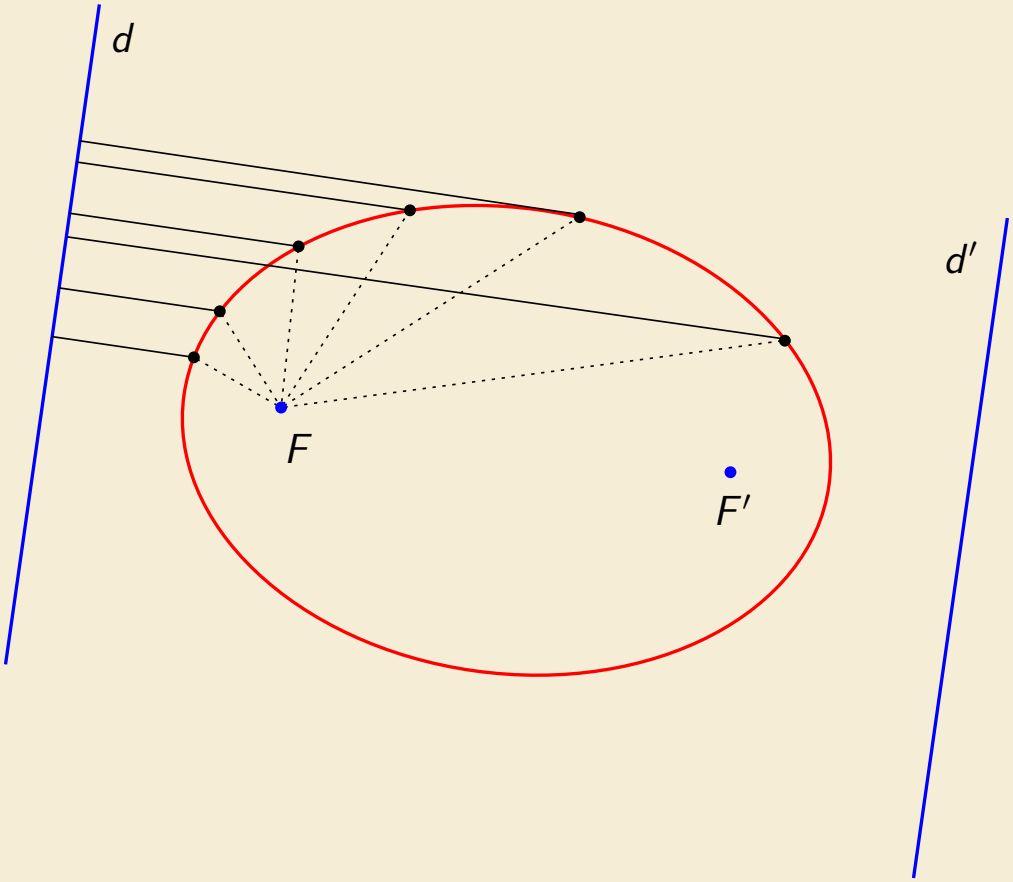
La retta d è una *direttrice*, il punto F un *fuoco* e il rapporto costante e l'*eccentricità* dell'ellisse: più e si avvicina a 1 e più l'ellisse è "allungata". La circonferenza è una particolare ellisse, che però si ottiene solo come caso limite quando l'eccentricità tende a 0.



Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

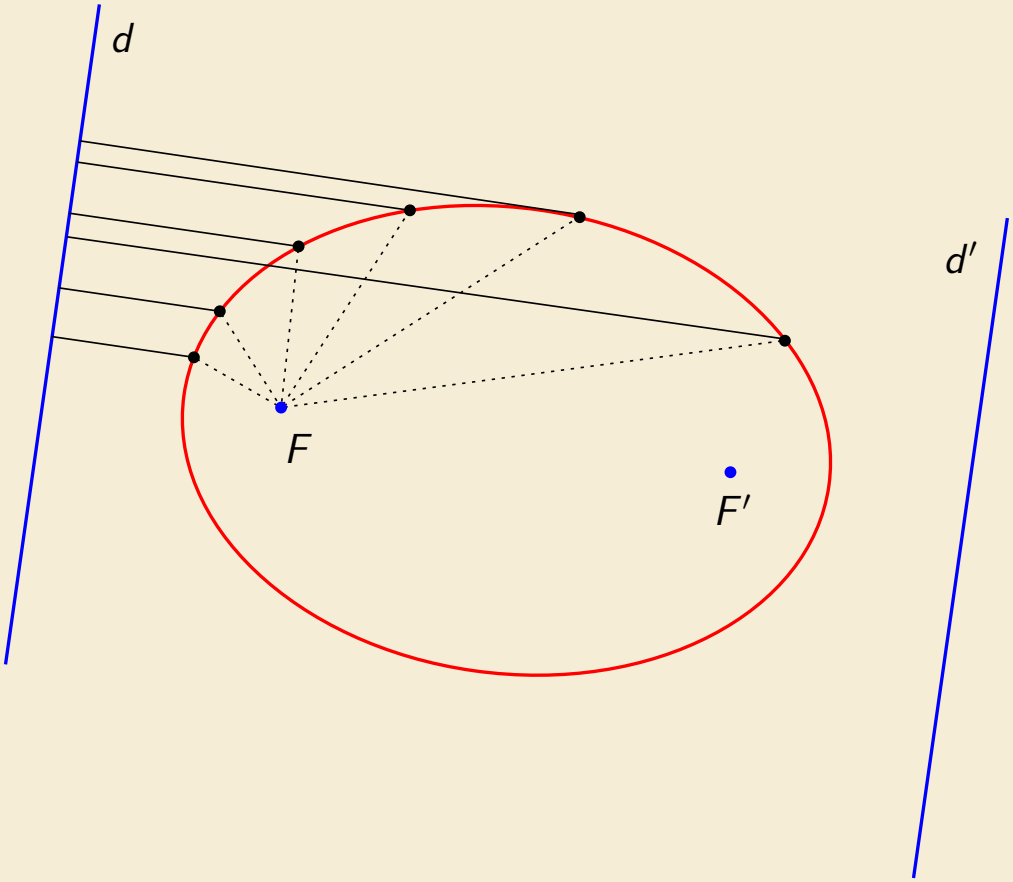
Ancora sulla prima definizione

Osservando bene il disegno ci si accorge che la stessa ellisse può essere costruita anche a partire da un'altra direttrice d' e da un'altro fuoco F', che sono i simmetrici di d e F rispetto al centro dell'ellisse.



Ancora sulla prima definizione

Osservando bene il disegno ci si accorge che la stessa ellisse può essere costruita anche a partire da un'altra direttrice d' e da un'altro fuoco F', che sono i simmetrici di d e F rispetto al centro dell'ellisse.



Quindi l'ellisse ha **due** fuochi e due direttrici.

Altra definizione di ellisse

Un altro modo, forse più tradizionale, per ottenere l'ellisse come luogo di punti è il seguente:

Seconda definizione

Dati due punti F e F', l'ellisse è il luogo di punti del piano la cui somma delle distanze da F e da F' è costante, ovvero

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \text{cost.}$$

Altra definizione di ellisse

Un altro modo, forse più tradizionale, per ottenere l'ellisse come luogo di punti è il seguente:

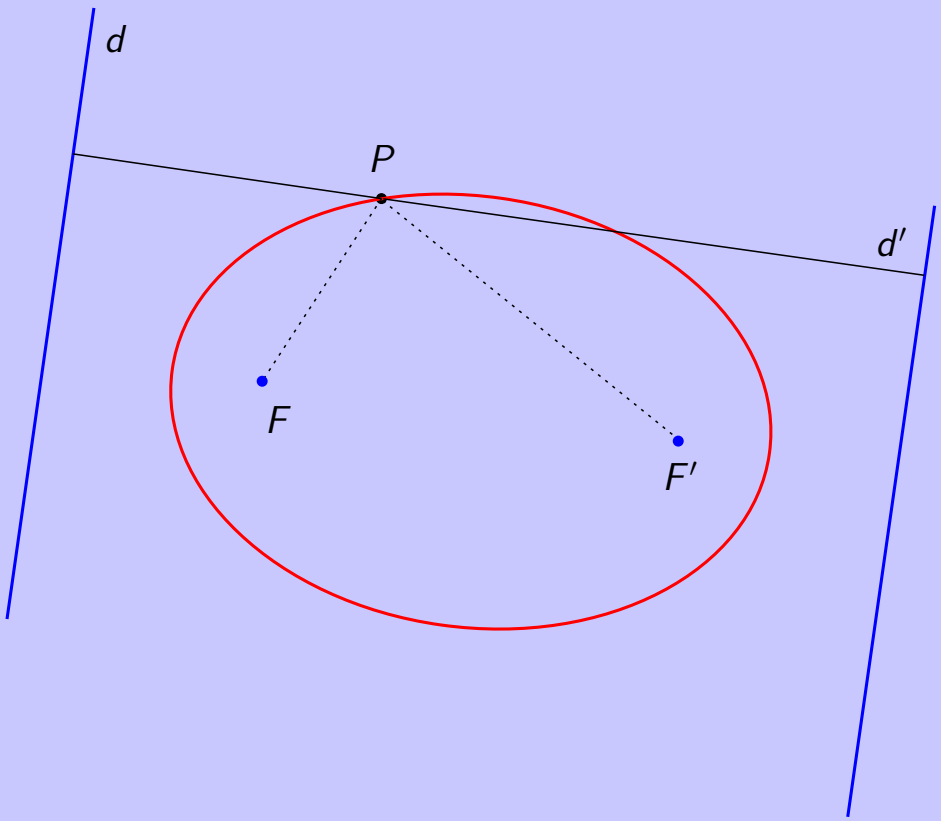
Seconda definizione

Dati due punti F e F', l'ellisse è il luogo di punti del piano la cui somma delle distanze da F e da F' è costante, ovvero

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \text{cost.}$$

I punti F e F' sono proprio i due fuochi dell'ellisse visti prima.

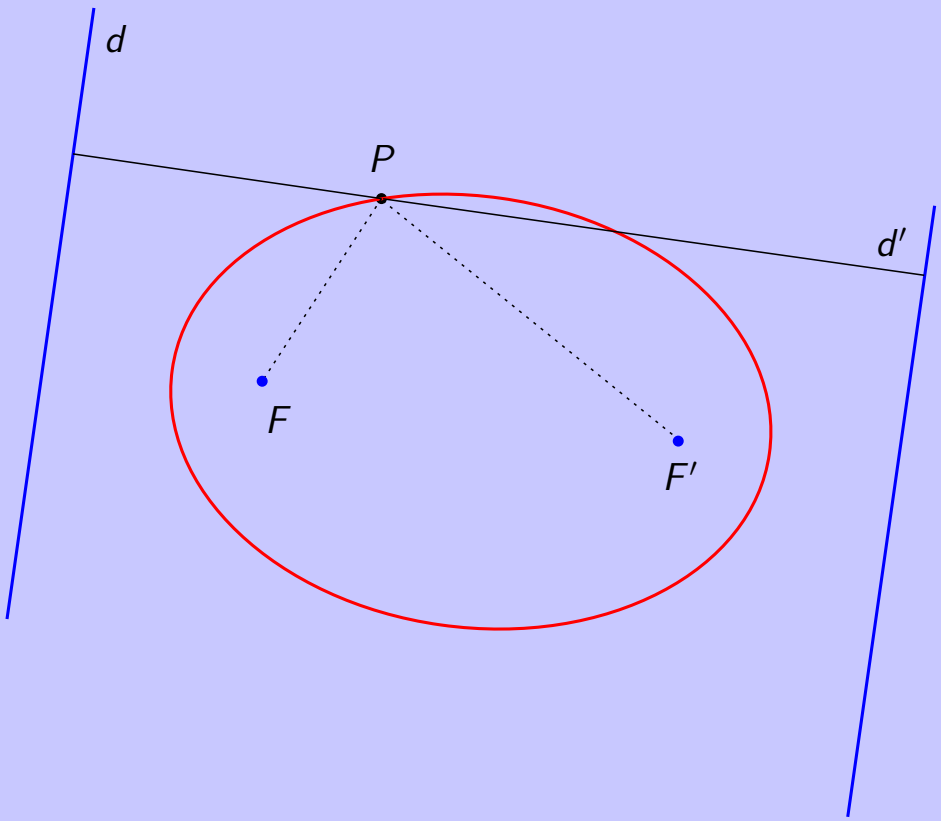
Approfondimento: equivalenza delle due definizioni



Dalla prima definizione abbiamo che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d)} = \frac{\overline{PF'}}{\text{dist}(P, d')} = e.$$

Approfondimento: equivalenza delle due definizioni



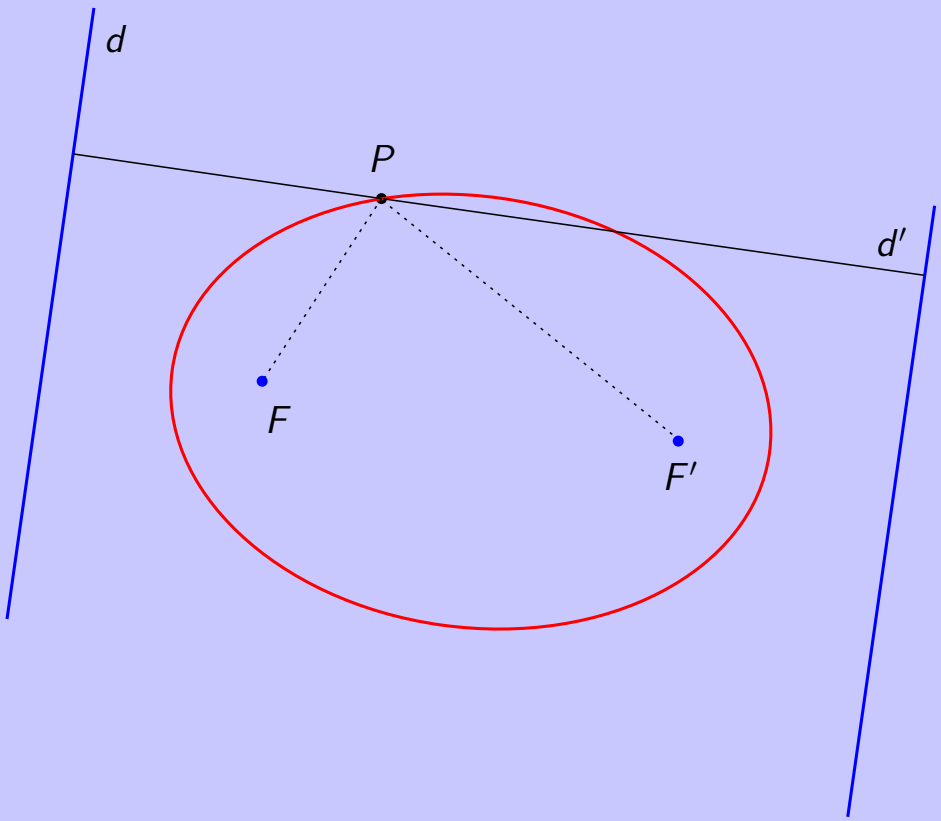
Dalla prima definizione abbiamo che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = \frac{\overline{PF'}}{\text{dist}(P,d')} = e.$$

Si vede subito poi che $\text{dist}(P,d) + \text{dist}(P,d')$ è la distanza tra le rette d e d', quindi è costante. Chiameremo k questa costante. In particolare

$$\text{dist}(P,d') = k - \text{dist}(P,d').$$

Approfondimento: equivalenza delle due definizioni



Dalla prima definizione abbiamo che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = \frac{\overline{PF'}}{\text{dist}(P,d')} = e.$$

Si vede subito poi che $\text{dist}(P,d) + \text{dist}(P,d')$ è la distanza tra le rette d e d', quindi è costante. Chiameremo k questa costante. In particolare

$$\text{dist}(P,d') = k - \text{dist}(P,d').$$

Sostituendo nella prima formula

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = \frac{\overline{PF'}}{k - \text{dist}(P,d)} = e.$$

Approfondimento: equivalenza delle due definizioni

Siamo arrivati a dire che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d)} = \frac{\overline{PF'}}{k - \text{dist}(P, d)} = e.$$

Approfondimento: equivalenza delle due definizioni

Siamo arrivati a dire che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = \frac{\overline{PF'}}{k - \text{dist}(P,d)} = e.$$

Facendo il denominatore comune otteniamo

$$k\overline{PF} = \text{dist}(P,d)(\overline{PF} + \overline{PF'})$$

Approfondimento: equivalenza delle due definizioni

Siamo arrivati a dire che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = \frac{\overline{PF'}}{k - \text{dist}(P,d)} = e.$$

Facendo il denominatore comune otteniamo

$$k\overline{PF} = \text{dist}(P,d)(\overline{PF} + \overline{PF'})$$

e quindi

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = k\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = ke = \text{cost}.$$

che ci dà la seconda definizione.

Approfondimento: equivalenza delle due definizioni

Siamo arrivati a dire che

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = \frac{\overline{PF'}}{k - \text{dist}(P,d)} = e.$$

Facendo il denominatore comune otteniamo

$$k\overline{PF} = \text{dist}(P,d)(\overline{PF} + \overline{PF'})$$

e quindi

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = k\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,d)} = ke = \text{cost}.$$

che ci dà la seconda definizione.
Ripercorrendo al contrario i passaggi si può ottenere la prima definizione a partire dalla seconda.

Equazione dell'ellisse

Cerchiamo ora di scrivere l'equazione cartesiana dell'ellisse. Per fare le cose più semplici, supporremo che la direttrice sia la retta verticale $x = \frac{c}{e^2}$ e il fuoco il punto $F(c, 0)$. Questo semplifica la formula finale.

Equazione dell'ellisse

Cerchiamo ora di scrivere l'equazione cartesiana dell'ellisse. Per fare le cose più semplici, supporremo che la direttrice sia la retta verticale $x = \frac{c}{e^2}$ e il fuoco il punto $F(c, 0)$. Questo semplifica la formula finale.
L'ellisse è l'insieme dei punti P del piano che verificano

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d)} = e,$$

quindi, considerando un generico punto $P(x, y)$, imponiamo la condizione

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{c}{e^2} \right| = \left| ex - \frac{c}{e} \right|.$$

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Equazione dell'ellisse

Cerchiamo ora di scrivere l'equazione cartesiana dell'ellisse. Per fare le cose più semplici, supporremo che la direttrice sia la retta verticale $x = \frac{c}{e^2}$ e il fuoco il punto $F(c, 0)$. Questo semplifica la formula finale.
L'ellisse è l'insieme dei punti P del piano che verificano

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d)} = e,$$

quindi, considerando un generico punto $P(x, y)$, imponiamo la condizione

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{c}{e^2}\right| = \left|ex - \frac{c}{e}\right|.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2cx + \frac{c^2}{e^2}$$

e quindi $\quad (1 - e^2)x^2 + y^2 + c^2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = 0.$

Equazione dell'ellisse

Ora dividiamo tutto per $c^2\left(\frac{1-e^2}{e^2}\right)$, per ottenere 1 nel secondo membro:

$$\frac{e^2}{c^2}x^2 + \frac{e^2}{c^2(1-e^2)}y^2 = 1.$$

Equazione dell'ellisse

Ora dividiamo tutto per $c^2\left(\frac{1-e^2}{e^2}\right)$, per ottenere 1 nel secondo membro:

$$\frac{e^2}{c^2}x^2 + \frac{e^2}{c^2(1-e^2)}y^2 = 1.$$

Ponendo $a = \frac{c}{e}$ e $b = \frac{c}{e}\sqrt{1-e^2}$ ne risulta l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si trova anche la relazione $b = a\sqrt{1-e^2}$, e quindi in particolare $b < a$.

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Equazione dell'ellisse

Ora dividiamo tutto per $c^2\left(\frac{1-e^2}{e^2}\right)$, per ottenere 1 nel secondo membro:

$$\frac{e^2}{c^2}x^2 + \frac{e^2}{c^2(1-e^2)}y^2 = 1.$$

Ponendo $a = \frac{c}{e}$ e $b = \frac{c}{e}\sqrt{1-e^2}$ ne risulta l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si trova anche la relazione $b = a\sqrt{1-e^2}$, e quindi in particolare $b < a$.

Partendo invece da una direttrice orizzontale e un fuoco sull'asse y, avremmo ottenuto un'equazione analoga con $a < b$.

Formule per l'ellisse

L'equazione trovata si chiama **equazione canonica dell'ellisse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Formule per l'ellisse

L'equazione trovata si chiama **equazione canonica dell'ellisse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a è la lunghezza del **semiasse orizzontale**
b è la lunghezza del **semiasse verticale**.

Formule per l'ellisse

L'equazione trovata si chiama **equazione canonica dell'ellisse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a è la lunghezza del **semiasse orizzontale**
b è la lunghezza del **semiasse verticale**.
I punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ sono i **vertici** dell'ellisse

Formule per l'ellisse

L'equazione trovata si chiama **equazione canonica dell'ellisse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a è la lunghezza del **semiasse orizzontale**
b è la lunghezza del **semiasse verticale**.
I punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ sono i **vertici** dell'ellisse
Fuochi: ponendo $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$, si ha

$$F = (\pm c, 0) \quad \text{nel caso } a > b, \qquad F = (0, \pm c) \quad \text{nel caso } a < b.$$

Formule per l'ellisse

L'equazione trovata si chiama **equazione canonica dell'ellisse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a è la lunghezza del **semiasse orizzontale**
b è la lunghezza del **semiasse verticale**.
I punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ sono i **vertici** dell'ellisse
Fuochi: ponendo $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$, si ha

$$F = (\pm c, 0) \quad \text{nel caso } a > b, \qquad F = (0, \pm c) \quad \text{nel caso } a < b.$$

Eccentricità: si ha

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad \text{se } a > b, \qquad e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} \quad \text{se } a < b.$$

Formule per l'ellisse

L'equazione trovata si chiama **equazione canonica dell'ellisse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a è la lunghezza del **semiasse orizzontale**
b è la lunghezza del **semiasse verticale**.
I punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ sono i **vertici** dell'ellisse
Fuochi: ponendo $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$, si ha

$$F = (\pm c, 0) \quad \text{nel caso } a > b, \qquad F = (0, \pm c) \quad \text{nel caso } a < b.$$

Eccentricità: si ha

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad \text{se } a > b, \qquad e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} \quad \text{se } a < b.$$

Se $a = b$ si ha una **circonferenza**; in questo caso $e = 0$.

Ellisse traslata

L'ellisse può anche non presentarsi in forma canonica, ma traslata rispetto all'origine del sistema di riferimento. Partendo dall'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e applicando la traslazione

$$\begin{cases} X = x + x_0 \\ Y = y + y_0, \end{cases}$$

che porta l'origine nel punto (x_0, y_0), otteniamo l'equazione

Ellisse traslata

L'ellisse può anche non presentarsi in forma canonica, ma traslata rispetto all'origine del sistema di riferimento. Partendo dall'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e applicando la traslazione

$$\begin{cases} X = x + x_0 \\ Y = y + y_0, \end{cases}$$

che porta l'origine nel punto (x_0, y_0), otteniamo l'equazione

$$\frac{(X - x_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Ellisse traslata

L'ellisse può anche non presentarsi in forma canonica, ma traslata rispetto all'origine del sistema di riferimento. Partendo dall'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e applicando la traslazione

$$\begin{cases} X = x + x_0 \\ Y = y + y_0, \end{cases}$$

che porta l'origine nel punto (x_0, y_0), otteniamo l'equazione

$$\frac{(X - x_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 2\,\frac{x_0}{a^2}\,X - 2\,\frac{y_0}{b^2}\,Y + \frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} = 1$$

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ellisse traslata

L'ellisse può anche non presentarsi in forma canonica, ma traslata rispetto all'origine del sistema di riferimento. Partendo dall'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e applicando la traslazione

$$\begin{cases} X = x + x_0 \\ Y = y + y_0, \end{cases}$$

che porta l'origine nel punto (x_0, y_0), otteniamo l'equazione

$$\frac{(X - x_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 2\,\frac{x_0}{a^2}\,X - 2\,\frac{y_0}{b^2}\,Y + \frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} = 1$$

Il centro di questa ellisse si trova nel punto (x_0, y_0).

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ellisse traslata

Quindi in generale un'equazione della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

in cui A e B hanno lo stesso segno (cioè $AB > 0$) rappresenta un ellisse (in particolare, se $A = B$ abbiamo una circonferenza).

Ellisse traslata

Quindi in generale un'equazione della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

in cui A e B hanno lo stesso segno (cioè $AB > 0$) rappresenta un ellisse (in particolare, se $A = B$ abbiamo una circonferenza).
L'ellisse traslata può essere **portata in forma canonica**, applicando una traslazione in modo da portare il centro (x_0, y_0) nell'origine (e quindi annullare i coefficienti dei termini di primo grado Cx, Dy).

Ellisse traslata

Quindi in generale un'equazione della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

in cui A e B hanno lo stesso segno (cioè $AB > 0$) rappresenta un ellisse (in particolare, se $A = B$ abbiamo una circonferenza).
L'ellisse traslata può essere **portata in forma canonica**, applicando una traslazione in modo da portare il centro (x_0, y_0) nell'origine (e quindi annullare i coefficienti dei termini di primo grado Cx, Dy).
Dai conti fatti sopra si ha

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = -2\frac{x_0}{a^2} = -2Ax_0, \quad D = -2\frac{y_0}{b^2} = -2By_0$$

e quindi $x_0 = -\frac{C}{2A}$ e $y_0 = -\frac{D}{2B}$.

Ellisse traslata

Quindi in generale un'equazione della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

in cui A e B hanno lo stesso segno (cioè $AB > 0$) rappresenta un ellisse (in particolare, se $A = B$ abbiamo una circonferenza).
L'ellisse traslata può essere **portata in forma canonica**, applicando una traslazione in modo da portare il centro (x_0, y_0) nell'origine (e quindi annullare i coefficienti dei termini di primo grado Cx, Dy).
Dai conti fatti sopra si ha

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = -2\frac{x_0}{a^2} = -2Ax_0, \quad D = -2\frac{y_0}{b^2} = -2By_0$$

e quindi $x_0 = -\frac{C}{2A}$ e $y_0 = -\frac{D}{2B}$. Quindi la traslazione da effettuare è

$$X = x + \frac{C}{2A}, \qquad Y = y + \frac{D}{2B}.$$

Completamento del quadrato

I conti precedenti possono essere svolti più semplicemente usando la tecnica del *completamento del quadrato*: partendo dall'equazione $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, la si scrive come

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}y\right) + E = 0$$

Completamento del quadrato

I conti precedenti possono essere svolti più semplicemente usando la tecnica del *completamento del quadrato*: partendo dall'equazione $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, la si scrive come

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}y\right) + E = 0$$

Poi si cerca di completare a quadrato perfetto il binomio $x^2 + \frac{C}{A}x$, aggiungendo (e poi togliendo) una costante opportuna; lo stesso per il binomio $y^2 + \frac{D}{B}y$. In questo modo si riesce a scrivere l'equazione nella forma

$$A(X - x_0)^2 + B(Y - y_0)^2 + k = 0$$

che mette in evidenza il centro (x_0, y_0) dell'ellisse.

Ellisse ruotata

Finora abbiamo studiato solo ellissi "non ruotate", nel senso che i loro fuochi erano allineati in verticale o in orizzontale. Questo corrisponde all'assenza di un termine xy nell'equazione.

Ellisse ruotata

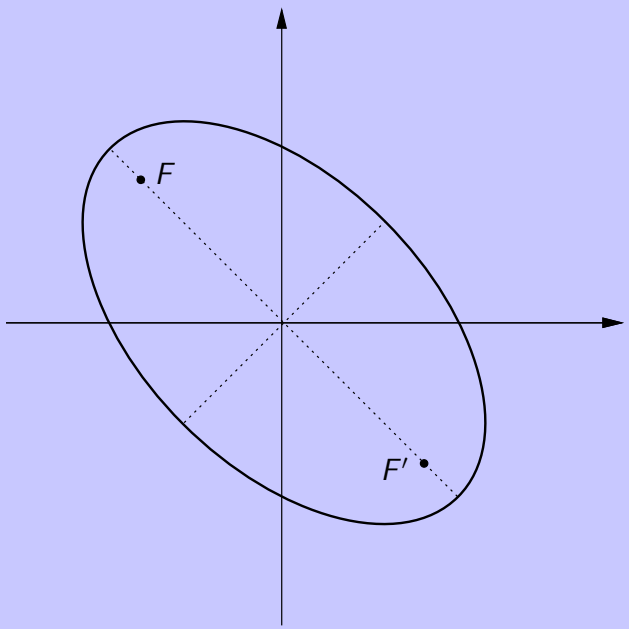
Finora abbiamo studiato solo ellissi "non ruotate", nel senso che i loro fuochi erano allineati in verticale o in orizzontale. Questo corrisponde all'assenza di un termine xy nell'equazione.

Se invece prendiamo l'equazione $x^2 + xy + y^2 = 2$, questa rappresenta un'ellisse centrata nell'origine e con i fuochi sulla retta $x + y = 0$.

Ellisse ruotata

Finora abbiamo studiato solo ellissi "non ruotate", nel senso che i loro fuochi erano allineati in verticale o in orizzontale. Questo corrisponde all'assenza di un termine xy nell'equazione.

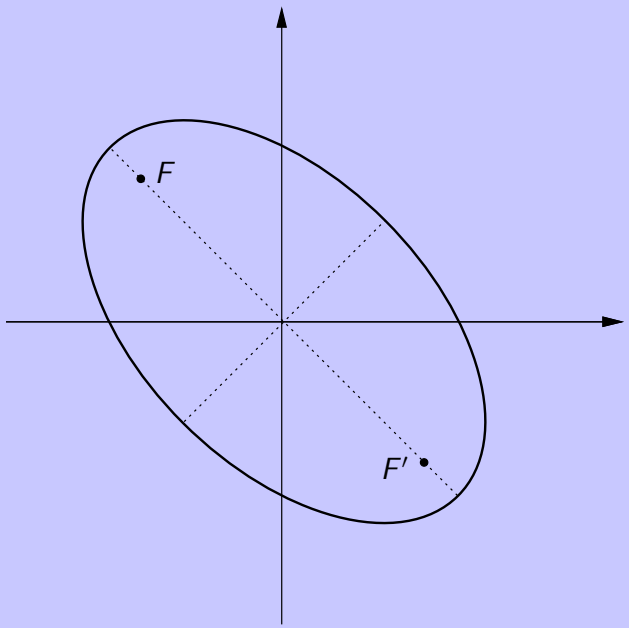
Se invece prendiamo l'equazione $x^2 + xy + y^2 = 2$, questa rappresenta un'ellisse centrata nell'origine e con i fuochi sulla retta $x + y = 0$.



Ellisse ruotata

Finora abbiamo studiato solo ellissi "non ruotate", nel senso che i loro fuochi erano allineati in verticale o in orizzontale. Questo corrisponde all'assenza di un termine xy nell'equazione.

Se invece prendiamo l'equazione $x^2 + xy + y^2 = 2$, questa rappresenta un'ellisse centrata nell'origine e con i fuochi sulla retta $x + y = 0$.



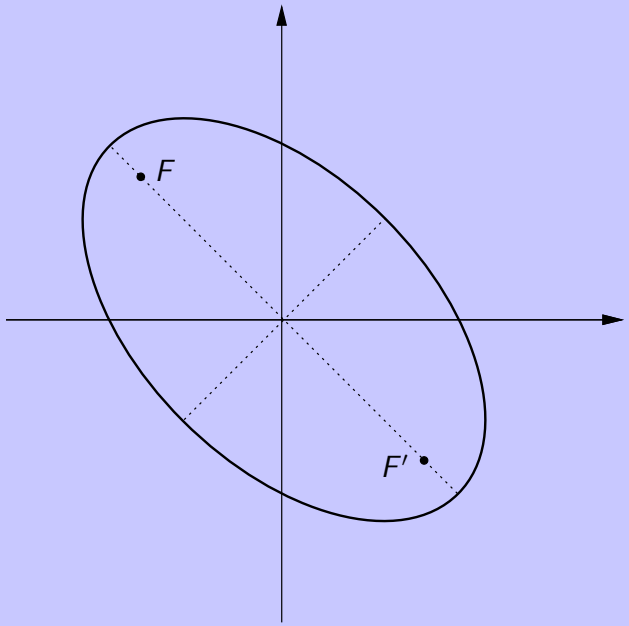
Partendo dall'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, si può dimostrare che la condizione perché essa rappresenti un'ellisse è

$$b^2 - 4ac < 0,$$

Ellisse ruotata

Finora abbiamo studiato solo ellissi "non ruotate", nel senso che i loro fuochi erano allineati in verticale o in orizzontale. Questo corrisponde all'assenza di un termine xy nell'equazione.

Se invece prendiamo l'equazione $x^2 + xy + y^2 = 2$, questa rappresenta un'ellisse centrata nell'origine e con i fuochi sulla retta $x + y = 0$.



Partendo dall'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, si può dimostrare che la condizione perché essa rappresenti un'ellisse è

$$b^2 - 4ac < 0, \qquad \text{ovvero } \Delta < 0.$$

Tangenti all'ellisse

Per imporre la condizione di tangenza, bisogna costruire il sistema di intersezione retta-ellisse e porre $\Delta = 0$ nell'equazione di secondo grado che risolve il sistema.

Tangenti all'ellisse

Per imporre la condizione di tangenza, bisogna costruire il sistema di intersezione retta-ellisse e porre $\Delta = 0$ nell'equazione di secondo grado che risolve il sistema.
Se si deve trovare la tangente all'ellisse in un suo punto (x_0, y_0), è comodo usare la **formula di sdoppiamento**, facendo le sostituzioni

$$x^2 \to x_0 x, \quad y^2 \to y_0 y, \quad x \to \frac{x_0 + x}{2}, \quad y \to \frac{y_0 + y}{2}$$

nell'equazione dell'ellisse.

Tangenti all'ellisse

Per imporre la condizione di tangenza, bisogna costruire il sistema di intersezione retta-ellisse e porre $\Delta = 0$ nell'equazione di secondo grado che risolve il sistema.
Se si deve trovare la tangente all'ellisse in un suo punto (x_0, y_0), è comodo usare la **formula di sdoppiamento**, facendo le sostituzioni

$$x^2 \to x_0 x, \quad y^2 \to y_0 y, \quad x \to \frac{x_0 + x}{2}, \quad y \to \frac{y_0 + y}{2}$$

nell'equazione dell'ellisse.
Se è presente anche il termine di secondo grado xy (ellisse ruotata) nella formula di sdoppiamento si usa anche la sostituzione

$$xy \to \frac{y_0 x + x_0 y}{2}.$$

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Esempio di calcolo della tangente

Ad esempio, se vogliamo trovare la tangente all'ellisse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{nel suo punto } (3, 1),$$

procediamo con la formula di sdoppiamento:

Esempio di calcolo della tangente

Ad esempio, se vogliamo trovare la tangente all'ellisse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{nel suo punto } (3, 1),$$

procediamo con la formula di sdoppiamento:

$$x^2 \to 3x, \quad y^2 \to y,$$

Esempio di calcolo della tangente

Ad esempio, se vogliamo trovare la tangente all'ellisse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{nel suo punto } (3, 1),$$

procediamo con la formula di sdoppiamento:

$$x^2 \to 3x, \quad y^2 \to y,$$

quindi

$$\frac{3x}{18} + \frac{y}{2} = 1$$

Esempio di calcolo della tangente

Ad esempio, se vogliamo trovare la tangente all'ellisse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{nel suo punto } (3, 1),$$

procediamo con la formula di sdoppiamento:

$$x^2 \to 3x, \quad y^2 \to y,$$

quindi

$$\frac{3x}{18} + \frac{y}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$$

Esempio di calcolo della tangente

Ad esempio, se vogliamo trovare la tangente all'ellisse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{nel suo punto } (3, 1),$$

procediamo con la formula di sdoppiamento:

$$x^2 \to 3x, \quad y^2 \to y,$$

quindi

$$\frac{3x}{18} + \frac{y}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x + 3y - 6 = 0.$$

Altre proprietà dell'ellisse

Una proprietà notevole dell'ellisse è la seguente: prendiamo un punto qualsiasi P di una ellisse; allora gli angoli formati dai segmenti PF e PF' con la tangente in P sono uguali.

Altre proprietà dell'ellisse

Una proprietà notevole dell'ellisse è la seguente: prendiamo un punto qualsiasi P di una ellisse; allora gli angoli formati dai segmenti PF e PF' con la tangente in P sono uguali.
Questo significa, ad esempio, che se un raggio di luce viene emesso da uno dei due fuochi e viene riflesso sul bordo, esso passerà per l'altro fuoco.

Altre proprietà dell'ellisse

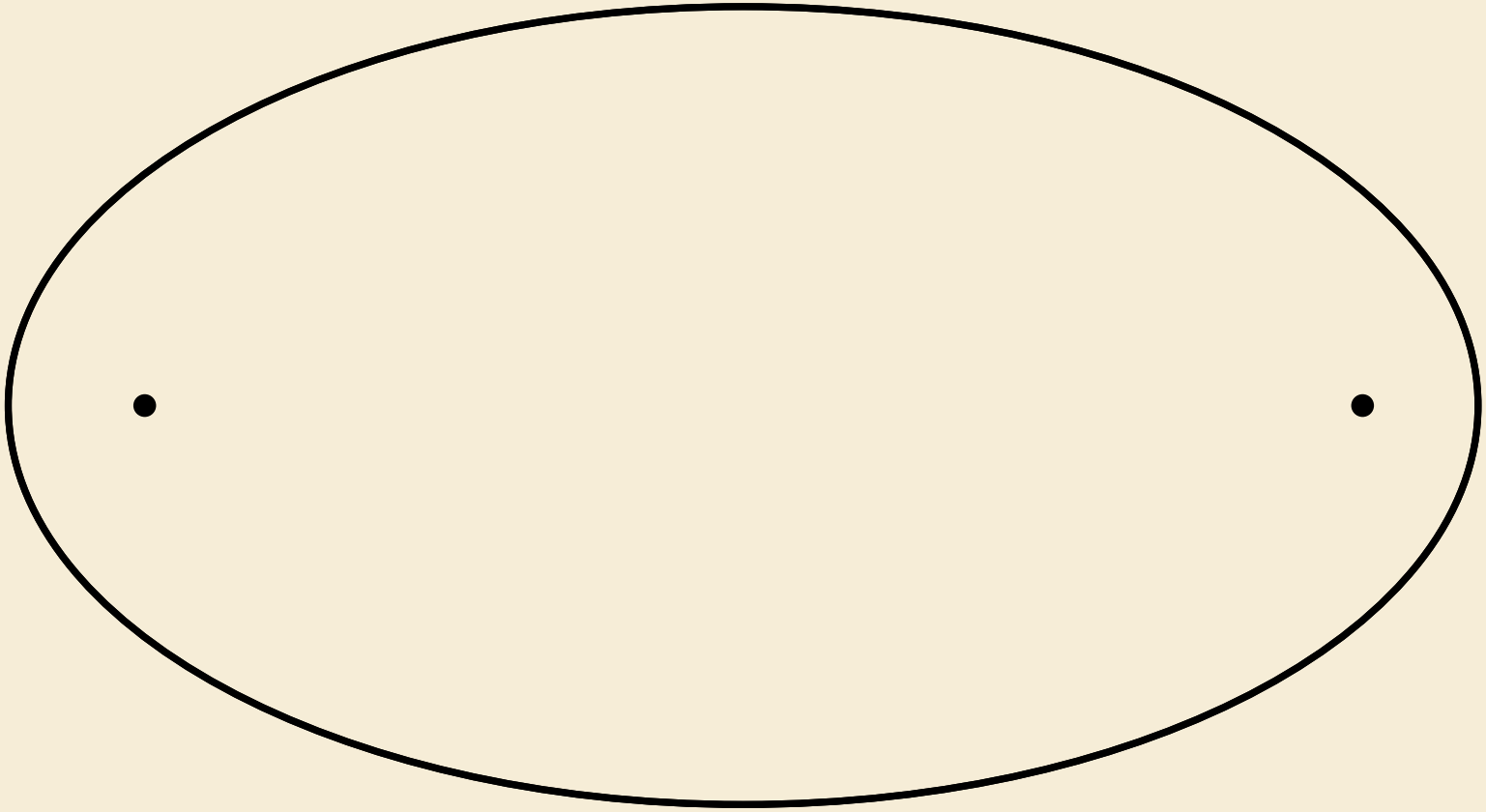
Una proprietà notevole dell'ellisse è la seguente: prendiamo un punto qualsiasi P di una ellisse; allora gli angoli formati dai segmenti PF e PF' con la tangente in P sono uguali.
Questo significa, ad esempio, che se un raggio di luce viene emesso da uno dei due fuochi e viene riflesso sul bordo, esso passerà per l'altro fuoco.
Oppure, se in un biliardo di forma ellittica si colpisce una palla posta su un fuoco, essa colpirà un birillo posto sull'altro fuoco, indipendentemente dalla direzione in cui la si manda.

Altre proprietà dell'ellisse

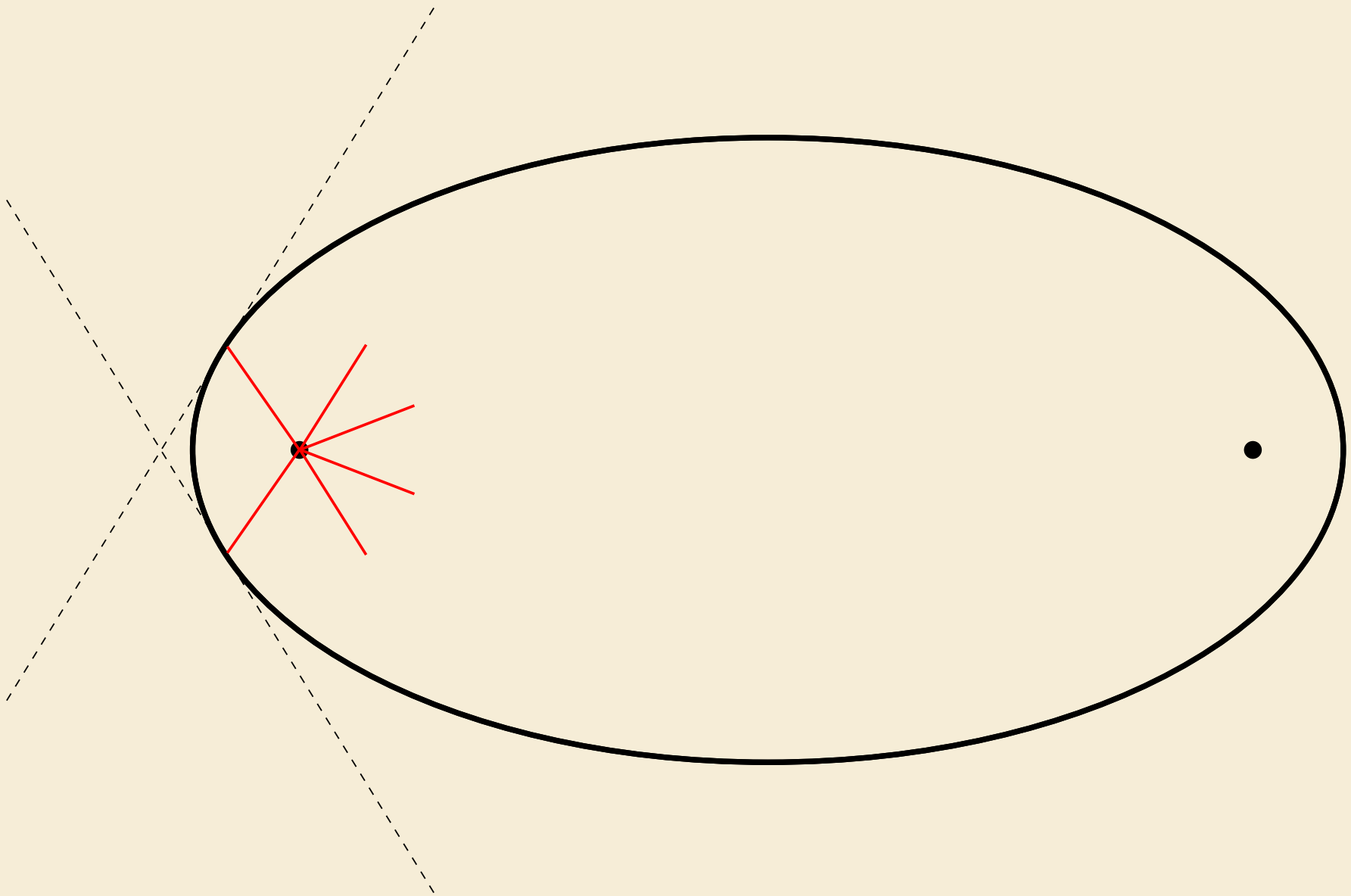
Una proprietà notevole dell'ellisse è la seguente: prendiamo un punto qualsiasi P di una ellisse; allora gli angoli formati dai segmenti PF e PF' con la tangente in P sono uguali.
Questo significa, ad esempio, che se un raggio di luce viene emesso da uno dei due fuochi e viene riflesso sul bordo, esso passerà per l'altro fuoco.
Oppure, se in un biliardo di forma ellittica si colpisce una palla posta su un fuoco, essa colpirà un birillo posto sull'altro fuoco, indipendentemente dalla direzione in cui la si manda.
Inoltre, per le proprietà viste in precedenza, la somma di PF e PF' non dipende da P, quindi il raggio di luce (o la palla da biliardo) impiegherà sempre lo stesso tempo per raggiungere l'altro fuoco, indipendentemente dalla direzione seguita.

Alessandro Musesti - ©2010–2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

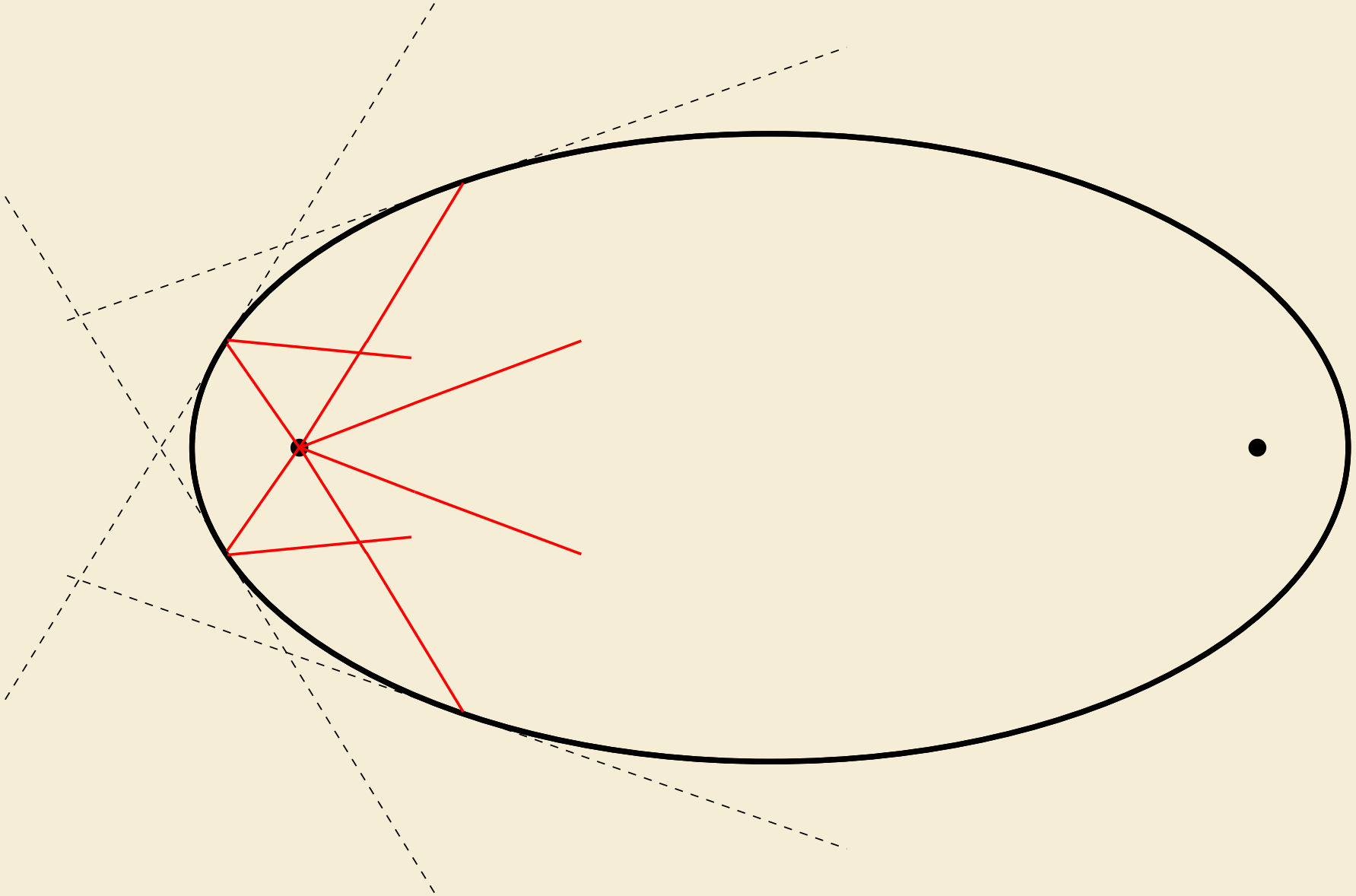
Animazione



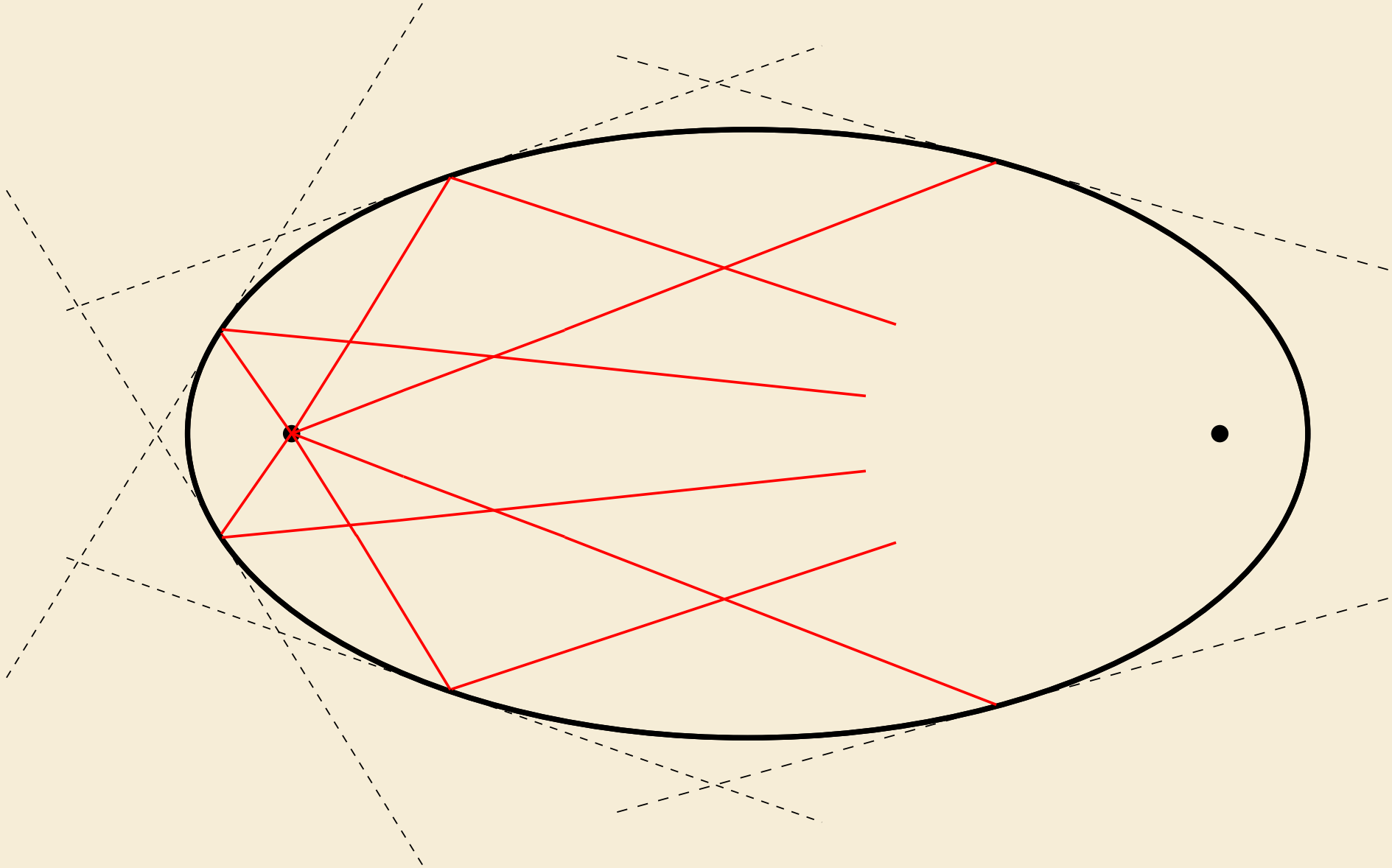
Animazione



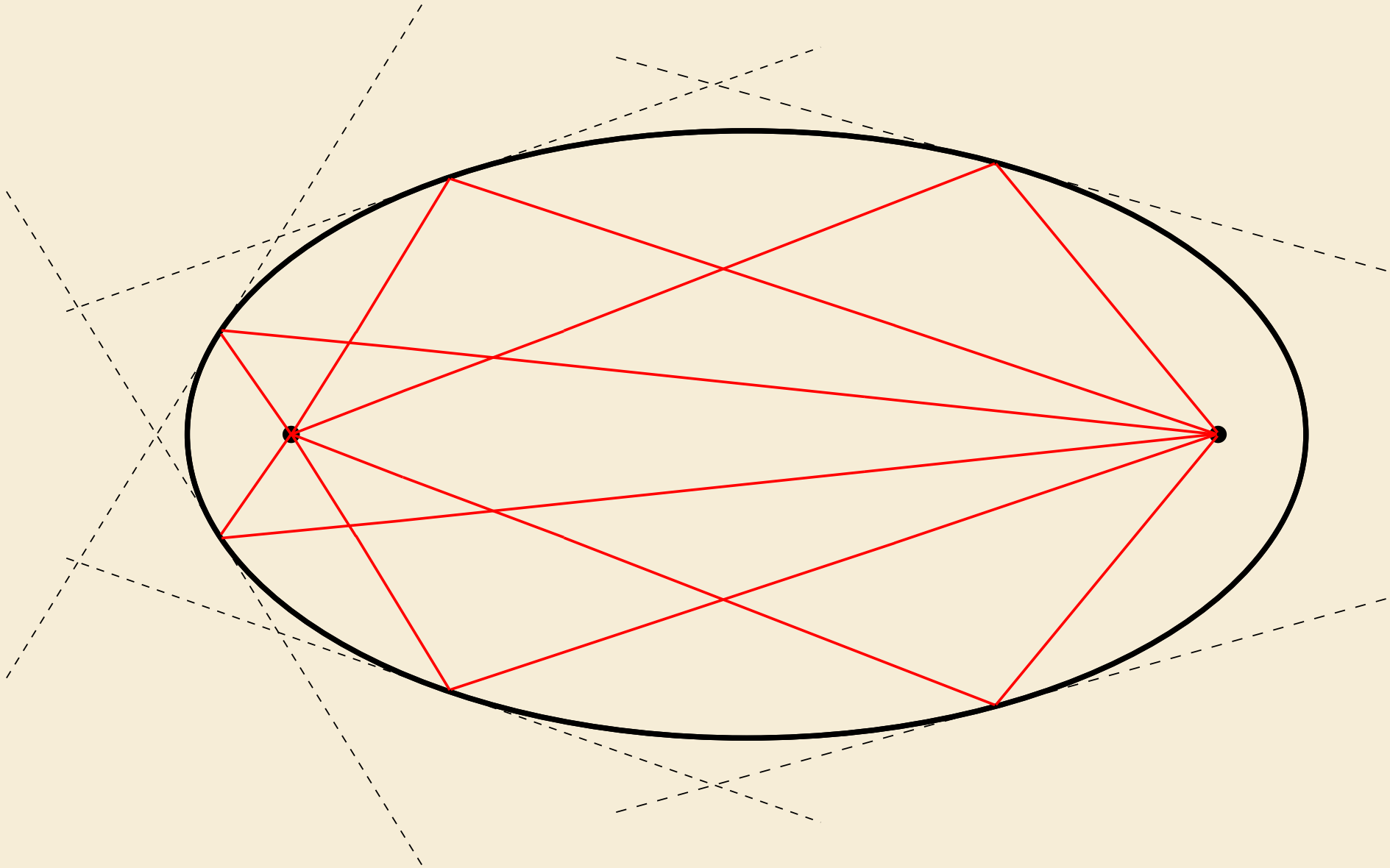
Animazione



Animazione



Animazione



Esperimento

Se si possiede un recipiente di forma approssimativamente ellittica, si può provare a fare il seguente esperimento, che mette in evidenza la proprietà appena vista.

Esperimento

Se si possiede un recipiente di forma approssimativamente ellittica, si può provare a fare il seguente esperimento, che mette in evidenza la proprietà appena vista.
Si riempie d'acqua il recipiente e si crea un onda (ad esempio con un dito) esattamente in uno dei due fuochi: si dovrebbero vedere delle onde che vengono riflesse dalle pareti del recipiente e poi raggiungono tutte l'altro fuoco, annullandosi a vicenda e scomparendovi attorno.

Orbite dei pianeti

Un'altra proprietà sorprendente, anche se molto nota, è quella delle orbite dei pianeti del sistema solare: esse sono delle ellissi e il Sole ne occupa uno dei due fuochi. Questa è stata la grande intuizione di Keplero, che ha smontato teorie durate millenni e basate sulla traiettoria circolare.

Orbite dei pianeti

Un'altra proprietà sorprendente, anche se molto nota, è quella delle orbite dei pianeti del sistema solare: esse sono delle ellissi e il Sole ne occupa uno dei due fuochi. Questa è stata la grande intuizione di Keplero, che ha smontato teorie durate millenni e basate sulla traiettoria circolare.

Più tardi, Newton fu in grado di capire in modo rigoroso il perché l'attrazione gravitazionale tra due corpi celesti genera traiettorie che sono delle **coniche**, ovvero ellissi, iperboli, parabole.

Orbite dei pianeti

Un'altra proprietà sorprendente, anche se molto nota, è quella delle orbite dei pianeti del sistema solare: esse sono delle ellissi e il Sole ne occupa uno dei due fuochi. Questa è stata la grande intuizione di Keplero, che ha smontato teorie durate millenni e basate sulla traiettoria circolare.

Più tardi, Newton fu in grado di capire in modo rigoroso il perché l'attrazione gravitazionale tra due corpi celesti genera traiettorie che sono delle **coniche**, ovvero ellissi, iperboli, parabole.

Purtroppo la dimostrazione di Newton richiede alcuni strumenti di calcolo differenziale, e quindi non può essere spiegata in questi lucidi, ma resta senza dubbio uno dei più bei monumenti della matematica.