La teoria di Cantor sugli insiemi infiniti

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In sintesi

In questa lezione introdurremo i risultati che, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alcuni matematici scoprirono riguardo alla Teoria degli Insiemi. In particolare vedremo:

In sintesi

In questa lezione introdurremo i risultati che, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alcuni matematici scoprirono riguardo alla Teoria degli Insiemi. In particolare vedremo:

- la *definizione* di insieme infinito (che è già una cosa molto affascinante)

In sintesi

In questa lezione introdurremo i risultati che, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alcuni matematici scoprirono riguardo alla Teoria degli Insiemi. In particolare vedremo:

- la *definizione* di insieme infinito (che è già una cosa molto affascinante)
- la scoperta che esistono *diversi* tipi di "infinito"

In sintesi

In questa lezione introdurremo i risultati che, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alcuni matematici scoprirono riguardo alla Teoria degli Insiemi. In particolare vedremo:

- la *definizione* di insieme infinito (che è già una cosa molto affascinante)
- la scoperta che esistono *diversi* tipi di "infinito"
- la scoperta che i diversi tipi di infinito possono essere *ordinati* (cioè ci sono "infiniti più piccoli di altri infiniti")

In sintesi

In questa lezione introdurremo i risultati che, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alcuni matematici scoprirono riguardo alla Teoria degli Insiemi. In particolare vedremo:

- la *definizione* di insieme infinito (che è già una cosa molto affascinante)
- la scoperta che esistono *diversi* tipi di "infinito"
- la scoperta che i diversi tipi di infinito possono essere *ordinati* (cioè ci sono "infiniti più piccoli di altri infiniti")
- l'enunciato della cosiddetta *ipotesi del continuo*

In sintesi

In questa lezione introdurremo i risultati che, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alcuni matematici scoprirono riguardo alla Teoria degli Insiemi. In particolare vedremo:

- la *definizione* di insieme infinito (che è già una cosa molto affascinante)
- la scoperta che esistono *diversi* tipi di "infinito"
- la scoperta che i diversi tipi di infinito possono essere *ordinati* (cioè ci sono "infiniti più piccoli di altri infiniti")
- l'enunciato della cosiddetta *ipotesi del continuo*

Tra gli autori di queste scoperte troviamo parecchi matematici di lingua tedesca: Richard Dedekind, Ernst Schröder, Felix Bernstein, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel, ma soprattutto

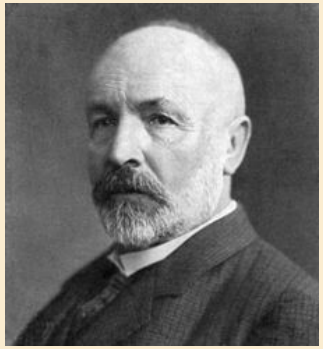
In sintesi

In questa lezione introdurremo i risultati che, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alcuni matematici scoprirono riguardo alla Teoria degli Insiemi. In particolare vedremo:

- la *definizione* di insieme infinito (che è già una cosa molto affascinante)
- la scoperta che esistono *diversi* tipi di "infinito"
- la scoperta che i diversi tipi di infinito possono essere *ordinati* (cioè ci sono "infiniti più piccoli di altri infiniti")
- l'enunciato della cosiddetta *ipotesi del continuo*

Tra gli autori di queste scoperte troviamo parecchi matematici di lingua tedesca: Richard Dedekind, Ernst Schröder, Felix Bernstein, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel, ma soprattutto

George Cantor



George Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) è un personaggio alquanto affascinante, anche se un po' "strano" (come parecchi matematici, d'altra parte).

George Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) è un personaggio alquanto affascinante, anche se un po' "strano" (come parecchi matematici, d'altra parte).
Le sue incredibili scoperte faticarono ad essere riconosciute dalla maggior parte dei suoi contemporanei. A questo si aggiunse la sua ossessiva ostinazione nel voler dimostrare l'**ipotesi del continuo** (che però oggi sappiamo essere impossibile da dimostrare). Cantor quindi cominciò attorno ai 40 anni a soffrire di crisi depressive, pur riuscendo comunque ancora a far ricerca.

George Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) è un personaggio alquanto affascinante, anche se un po' "strano" (come parecchi matematici, d'altra parte).
Le sue incredibili scoperte faticarono ad essere riconosciute dalla maggior parte dei suoi contemporanei. A questo si aggiunse la sua ossessiva ostinazione nel voler dimostrare l'**ipotesi del continuo** (che però oggi sappiamo essere impossibile da dimostrare). Cantor quindi cominciò attorno ai 40 anni a soffrire di crisi depressive, pur riuscendo comunque ancora a far ricerca.
Negli anni però la sua ossessione verso la matematica peggiorò, ed egli cominciò a dedicarsi alla Filosofia, alla Teologia e alla Letteratura. Morì in povertà in un ospedale psichiatrico ad Halle, in Germania.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

La corrispondenza biunivoca

Prima di partire dobbiamo introdurre due concetti tipici di teoria degli insiemi, che molti di voi magari già conoscono: la corrispondenza biunivoca tra due insiemi e la cardinalità.

La corrispondenza biunivoca

Prima di partire dobbiamo introdurre due concetti tipici di teoria degli insiemi, che molti di voi magari già conoscono: la corrispondenza biunivoca tra due insiemi e la cardinalità.

Definizione

Due insiemi si dicono in **corrispondenza biunivoca** se ogni elemento del primo insieme può essere associato a uno e un solo elemento del secondo, e viceversa.
Diremo che due insiemi hanno la stessa **cardinalità** se essi sono in corrispondenza biunivoca.

La corrispondenza biunivoca

Prima di partire dobbiamo introdurre due concetti tipici di teoria degli insiemi, che molti di voi magari già conoscono: la corrispondenza biunivoca tra due insiemi e la cardinalità.

Definizione

Due insiemi si dicono in **corrispondenza biunivoca** se ogni elemento del primo insieme può essere associato a uno e un solo elemento del secondo, e viceversa.
Diremo che due insiemi hanno la stessa **cardinalità** se essi sono in corrispondenza biunivoca.

Chi conosce un po' le funzioni capirà che due insiemi sono in corrispondenza biunivoca quando esiste una funzione **biiettiva** (o biunivoca, appunto) da un insieme all'altro.

La corrispondenza biunivoca

Prima di partire dobbiamo introdurre due concetti tipici di teoria degli insiemi, che molti di voi magari già conoscono: la corrispondenza biunivoca tra due insiemi e la cardinalità.

Definizione

Due insiemi si dicono in **corrispondenza biunivoca** se ogni elemento del primo insieme può essere associato a uno e un solo elemento del secondo, e viceversa.
Diremo che due insiemi hanno la stessa **cardinalità** se essi sono in corrispondenza biunivoca.

Chi conosce un po' le funzioni capirà che due insiemi sono in corrispondenza biunivoca quando esiste una funzione **biiettiva** (o biunivoca, appunto) da un insieme all'altro.
Il concetto di corrispondenza biunivoca non è certo una novità, ma ci aiuta a capire quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi, anche senza doverli contare.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Cardinalità

Si preferisce dire che due insiemi hanno "la stessa cardinalità", e non semplicemente "lo stesso numero di elementi", perché il concetto di cardinalità vale anche per insiemi infiniti, per i quali non è molto significativo parlare di numero di elementi (visto che "infinito" non è un numero...)

Cardinalità

Si preferisce dire che due insiemi hanno "la stessa cardinalità", e non semplicemente "lo stesso numero di elementi", perché il concetto di cardinalità vale anche per insiemi infiniti, per i quali non è molto significativo parlare di numero di elementi (visto che "infinito" non è un numero...)

Per esempio, mostreremo più avanti che $\mathbb{N}$ (l'insieme dei numeri naturali) e $\mathbb{Q}$ (l'insieme dei numeri razionali) hanno la stessa cardinalità! Ma non avrebbe molto senso dire che hanno lo stesso numero di elementi, anche se il significato è simile.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Gli insiemi infiniti

Una delle definizioni più belle, e più semplici, della teoria degli insiemi è quella di insieme infinito:

Definizione

Si dice che un insieme è infinito, o più precisamente che ha **cardinalità infinita**, se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
Altrimenti, si dice che un insieme è finito, o che ha **cardinalità finita**.

Gli insiemi infiniti

Una delle definizioni più belle, e più semplici, della teoria degli insiemi è quella di insieme infinito:

Definizione

Si dice che un insieme è infinito, o più precisamente che ha **cardinalità infinita**, se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
Altrimenti, si dice che un insieme è finito, o che ha **cardinalità finita**.

Vale la pena soffermarsi un attimo sulla bellezza di questa definizione: l'idea intuitiva, vecchia di millenni, per cui l'infinito "non cambia" anche se gli viene tolto qualcosa, viene qui formalizzata e sfruttata proprio per *definire* l'infinito!

Gli insiemi infiniti

Una delle definizioni più belle, e più semplici, della teoria degli insiemi è quella di insieme infinito:

Definizione

Si dice che un insieme è infinito, o più precisamente che ha **cardinalità infinita**, se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
Altrimenti, si dice che un insieme è finito, o che ha **cardinalità finita**.

Vale la pena soffermarsi un attimo sulla bellezza di questa definizione: l'idea intuitiva, vecchia di millenni, per cui l'infinito "non cambia" anche se gli viene tolto qualcosa, viene qui formalizzata e sfruttata proprio per *definire* l'infinito!
Un altro aspetto molto interessante della definizione è che si definisce *prima* il concetto di infinito, che parrebbe essere quello più difficile, e si definisce poi il concetto di finito come negazione dell'infinito. La prospettiva è stata completamente capovolta.

Alcuni esempi di insiemi infiniti

Ora è facile dimostrare che $\mathbb{N}$ ha cardinalità infinita. Consideriamo per esempio l'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri pari: esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, eppure si può stabilire la corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathcal{P} \\ n & \mapsto & 2n. \end{array}$$

Quindi $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio: allora è infinito.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Alcuni esempi di insiemi infiniti

Ora è facile dimostrare che $\mathbb{N}$ ha cardinalità infinita. Consideriamo per esempio l'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri pari: esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, eppure si può stabilire la corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathcal{P} \\ n & \mapsto & 2n. \end{array}$$

Quindi $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio: allora è infinito. Allo stesso modo, anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono tutti insiemi infiniti, visto che in particolare contengono $\mathbb{N}$ che ha cardinalità infinita.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Alcuni esempi di insiemi infiniti

Ora è facile dimostrare che $\mathbb{N}$ ha cardinalità infinita. Consideriamo per esempio l'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri pari: esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, eppure si può stabilire la corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathcal{P} \\ n & \mapsto & 2n. \end{array}$$

Quindi $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio: allora è infinito. Allo stesso modo, anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono tutti insiemi infiniti, visto che in particolare contengono $\mathbb{N}$ che ha cardinalità infinita.

L'insieme $\{A, B, C, D, E\}$ invece non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcun suo sottoinsieme proprio (provare per credere), quindi è finito.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Alcuni esempi di insiemi infiniti

Ora è facile dimostrare che $\mathbb{N}$ ha cardinalità infinita. Consideriamo per esempio l'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri pari: esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, eppure si può stabilire la corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathcal{P} \\ n & \mapsto & 2n. \end{array}$$

Quindi $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio: allora è infinito. Allo stesso modo, anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono tutti insiemi infiniti, visto che in particolare contengono $\mathbb{N}$ che ha cardinalità infinita.

L'insieme $\{A, B, C, D, E\}$ invece non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcun suo sottoinsieme proprio (provare per credere), quindi è finito.

Domanda/esercizio: L'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri pari è finito o infinito? Come dimostrarlo?

Insiemi numerabili

Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si chiamano **numerabili**. Si può dimostrare che, tra tutti gli insiemi infiniti, tale cardinalità è la più piccola possibile, quindi si può dare una caratterizzazione alternativa degli insiemi infiniti, che non dimostriamo:

Insiemi numerabili

Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si chiamano **numerabili**. Si può dimostrare che, tra tutti gli insiemi infiniti, tale cardinalità è la più piccola possibile, quindi si può dare una caratterizzazione alternativa degli insiemi infiniti, che non dimostriamo:

Teorema

Un insieme è infinito se e solo se contiene un sottoinsieme numerabile.

Insiemi numerabili

Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si chiamano **numerabili**. Si può dimostrare che, tra tutti gli insiemi infiniti, tale cardinalità è la più piccola possibile, quindi si può dare una caratterizzazione alternativa degli insiemi infiniti, che non dimostriamo:

Teorema

Un insieme è infinito se e solo se contiene un sottoinsieme numerabile.

Cantor denotò questa cardinalità con un nuovo simbolo: $\aleph_0$ (pronuncia: *alef-zero*), usando la prima lettera dell'alfabeto ebraico.

Insiemi numerabili

Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si chiamano **numerabili**. Si può dimostrare che, tra tutti gli insiemi infiniti, tale cardinalità è la più piccola possibile, quindi si può dare una caratterizzazione alternativa degli insiemi infiniti, che non dimostriamo:

Teorema

Un insieme è infinito se e solo se contiene un sottoinsieme numerabile.

Cantor denotò questa cardinalità con un nuovo simbolo: $\aleph_0$ (pronuncia: *alef-zero*), usando la prima lettera dell'alfabeto ebraico.

Ora una domanda sorge spontanea: esiste un solo tipo di infinito o ce ne sono tanti? Ci sono insiemi infiniti "più che numerabili"?

Insiemi numerabili

Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si chiamano **numerabili**. Si può dimostrare che, tra tutti gli insiemi infiniti, tale cardinalità è la più piccola possibile, quindi si può dare una caratterizzazione alternativa degli insiemi infiniti, che non dimostriamo:

Teorema

Un insieme è infinito se e solo se contiene un sottoinsieme numerabile.

Cantor denotò questa cardinalità con un nuovo simbolo: $\aleph_0$ (pronuncia: *alef-zero*), usando la prima lettera dell'alfabeto ebraico.

Ora una domanda sorge spontanea: esiste un solo tipo di infinito o ce ne sono tanti? Ci sono insiemi infiniti "più che numerabili"?
In modo più formale:

esistono insiemi infiniti che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$?

La cardinalità dei razionali

Poiché è facile vedere che $\mathbb{Z}$ è numerabile (lo si provi per esercizio), il candidato più credibile di insieme più che numerabile diventa $\mathbb{Q}$.

La cardinalità dei razionali

Poiché è facile vedere che $\mathbb{Z}$ è numerabile (lo si provi per esercizio), il candidato più credibile di insieme più che numerabile diventa $\mathbb{Q}$.
I numeri razionali, infatti, sono ben di più di quelli naturali: hanno la proprietà della **densità**, cioè che tra due numeri razionali ne esiste sempre almeno un altro strettamente compreso.

La cardinalità dei razionali

Poiché è facile vedere che $\mathbb{Z}$ è numerabile (lo si provi per esercizio), il candidato più credibile di insieme più che numerabile diventa $\mathbb{Q}$.
I numeri razionali, infatti, sono ben di più di quelli naturali: hanno la proprietà della **densità**, cioè che tra due numeri razionali ne esiste sempre almeno un altro strettamente compreso.
Eppure, Cantor dimostrò in modo abbastanza semplice che anche i razionali sono numerabili, e lo fece con lo schema seguente:

La cardinalità dei razionali

Poiché è facile vedere che $\mathbb{Z}$ è numerabile (lo si provi per esercizio), il candidato più credibile di insieme più che numerabile diventa $\mathbb{Q}$.
I numeri razionali, infatti, sono ben di più di quelli naturali: hanno la proprietà della **densità**, cioè che tra due numeri razionali ne esiste sempre almeno un altro strettamente compreso.
Eppure, Cantor dimostrò in modo abbastanza semplice che anche i razionali sono numerabili, e lo fece con lo schema seguente:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0/1 \rightarrow & 0/2 & 0/3 \rightarrow & 0/4 & 0/5 \rightarrow & 0/6 & 0/7 \rightarrow & 0/8 & \cdots \\
\swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & \\
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 2/6 & 2/7 & 2/8 & \cdots \\
\swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & & & \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & 3/6 & 3/7 & 3/8 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & & & \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & 4/6 & 4/7 & 4/8 & \cdots \\
\swarrow & \nearrow & \swarrow & & & & & & \\
5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & 5/6 & 5/7 & 5/8 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \swarrow & & & & & & \\
6/1 & 6/2 & 6/3 & 6/4 & 6/5 & 6/6 & 6/7 & 6/8 & \cdots \\
\swarrow & & & & & & & & \\
7/1 & 7/2 & 7/3 & 7/4 & 7/5 & 7/6 & 7/7 & 7/8 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Cerchiamo di capire il ragionamento: lo schema è

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0/1 \rightarrow & 0/2 & 0/3 \rightarrow & 0/4 & 0/5 \rightarrow & 0/6 & 0/7 \rightarrow & 0/8 & \cdots \\
\swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & \\
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 2/6 & 2/7 & 2/8 & \cdots \\
\swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & & & \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & 3/6 & 3/7 & 3/8 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \swarrow & & & & \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & 4/6 & 4/7 & 4/8 & \cdots \\
\swarrow & \nearrow & \swarrow & & & & & & \\
5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & 5/6 & 5/7 & 5/8 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \swarrow & & & & & & \\
6/1 & 6/2 & 6/3 & 6/4 & 6/5 & 6/6 & 6/7 & 6/8 & \cdots \\
\swarrow & & & & & & & & \\
7/1 & 7/2 & 7/3 & 7/4 & 7/5 & 7/6 & 7/7 & 7/8 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

ed è ottenuto da una tabella a doppia entrata in cui mettiamo sulle righe i numeratori (tutti i numeri naturali), e sulle colonne i denominatori (i numeri naturali tranne 0).

Cerchiamo di capire il ragionamento: lo schema è

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0/1 & 0/2 & 0/3 & 0/4 & 0/5 & 0/6 & 0/7 & 0/8 & \cdots \\
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & \cdots \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 2/6 & 2/7 & 2/8 & \cdots \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & 3/6 & 3/7 & 3/8 & \cdots \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & 4/6 & 4/7 & 4/8 & \cdots \\
5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & 5/6 & 5/7 & 5/8 & \cdots \\
6/1 & 6/2 & 6/3 & 6/4 & 6/5 & 6/6 & 6/7 & 6/8 & \cdots \\
7/1 & 7/2 & 7/3 & 7/4 & 7/5 & 7/6 & 7/7 & 7/8 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

ed è ottenuto da una tabella a doppia entrata in cui mettiamo sulle righe i numeratori (tutti i numeri naturali), e sulle colonne i denominatori (i numeri naturali tranne 0).

Ora associamo ad ogni frazione della tabella un numero naturale, partendo dal primo elemento 0/1 contando 0, e seguendo il percorso a serpentina indicato dalle frecce blu. Se incontriamo una frazione equivalente a una già contata (sono quelle in rosso), la saltiamo e passiamo alla frazione successiva nel percorso.

In questo modo associamo:

$$
\begin{array}{ccc}
0/1 & \leftrightarrow & 0 \\
0/2 & \text{saltato} & \\
1/1 & \leftrightarrow & 1 \\
2/1 & \leftrightarrow & 2 \\
1/2 & \leftrightarrow & 3 \\
0/3 & \text{saltato} & \\
0/4 & \text{saltato} & \\
1/3 & \leftrightarrow & 4 \\
2/2 & \text{saltato} & \\
3/1 & \leftrightarrow & 5 \\
4/1 & \leftrightarrow & 6 \\
\ldots & \leftrightarrow & \ldots
\end{array}
$$

e così scopriamo che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità!

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

A questo punto può venire il sospetto che *tutti* gli insiemi infiniti abbiano la stessa cardinalità. Ma questo non è vero.

A questo punto può venire il sospetto che *tutti* gli insiemi infiniti abbiano la stessa cardinalità. Ma questo non è vero.
Cantor infatti dimostrò il seguente teorema:

Teorema

L'intervallo $[0;1]$ *non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme* $\mathbb{N}$.
Quindi $[0;1]$, *e a maggior ragione* $\mathbb{R}$, *non è numerabile.*

A questo punto può venire il sospetto che *tutti* gli insiemi infiniti abbiano la stessa cardinalità. Ma questo non è vero.
Cantor infatti dimostrò il seguente teorema:

Teorema

L'intervallo $[0;1]$ *non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme* $\mathbb{N}$.
Quindi $[0;1]$, *e a maggior ragione* $\mathbb{R}$, *non è numerabile.*

Si usa denotare col simbolo $\mathfrak{c}$ (una "c" minuscola scritta in carattere gotico, che sta per "continuo") la cardinalità di $\mathbb{R}$. Quindi scriviamo che

$$\mathfrak{c} > \aleph_0.$$

La cardinalità $\mathfrak{c}$ viene chiamata **cardinalità del continuo**.

A questo punto può venire il sospetto che *tutti* gli insiemi infiniti abbiano la stessa cardinalità. Ma questo non è vero.
Cantor infatti dimostrò il seguente teorema:

Teorema

L'intervallo $[0;1]$ *non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme* $\mathbb{N}$.
Quindi $[0;1]$, *e a maggior ragione* $\mathbb{R}$, *non è numerabile.*

Si usa denotare col simbolo $\mathfrak{c}$ (una "c" minuscola scritta in carattere gotico, che sta per "continuo") la cardinalità di $\mathbb{R}$. Quindi scriviamo che

$$\mathfrak{c} > \aleph_0.$$

La cardinalità $\mathfrak{c}$ viene chiamata **cardinalità del continuo**.
Cantor dimostrò il teorema inventando una tecnica molto semplice (e per questo geniale) che è diventata famosa come l'**argomento diagonale di Cantor**.

L'argomento diagonale

L'idea è la seguente: supponiamo *per assurdo* che esista una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'intervallo $[0; 1]$. Questo significa che gli elementi di $[0; 1]$ possono essere "etichettati" con i numeri naturali, nel senso che avremo un elenco

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

in cui compaiono tutti i numeri reali tra 0 e 1.

L'argomento diagonale

L'idea è la seguente: supponiamo *per assurdo* che esista una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'intervallo $[0; 1]$. Questo significa che gli elementi di $[0; 1]$ possono essere "etichettati" con i numeri naturali, nel senso che avremo un elenco

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

in cui compaiono tutti i numeri reali tra 0 e 1.
Ora scriviamo questi numeri in forma decimale. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.4745316732667256\ldots \\
a_2 &= 0.1121678923309042\ldots \\
a_3 &= 0.4113344440077385\ldots \\
&\vdots \\
a_n &= 0.4212199999932190\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;
- al primo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_1;

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;
- al primo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_1;
- al secondo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_2;

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;
- al primo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_1;
- al secondo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_2;
- ...
- all'n-esimo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_n;
- ...

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;
- al primo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_1;
- al secondo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_2;
- ...
- all'n-esimo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_n;
- ...

Cosa possiamo dire su questo numero q appena costruito? Intanto che sta in $[0; 1]$. Poi che:

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;
- al primo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_1;
- al secondo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_2;
- ...
- all'n-esimo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_n;
- ...

Cosa possiamo dire su questo numero q appena costruito? Intanto che sta in $[0; 1]$. Poi che:

- è diverso da a_1 perché ha la prima cifra decimale diversa;

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;
- al primo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_1;
- al secondo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_2;
- ...
- all'n-esimo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_n;
- ...

Cosa possiamo dire su questo numero q appena costruito? Intanto che sta in $[0; 1]$. Poi che:

- è diverso da a_1 perché ha la prima cifra decimale diversa;
- è diverso da a_2 perché ha la seconda cifra decimale diversa;

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Consideriamo ora un numero q, scritto in forma decimale, così fatto:

- la parte intera del numero sia 0, in modo che stia nell'intervallo $[0; 1]$;
- al primo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_1;
- al secondo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_2;
- ...
- all'n-esimo posto decimale mettiamo una cifra *diversa* da quella di a_n;
- ...

Cosa possiamo dire su questo numero q appena costruito? Intanto che sta in $[0; 1]$. Poi che:

- è diverso da a_1 perché ha la prima cifra decimale diversa;
- è diverso da a_2 perché ha la seconda cifra decimale diversa;
- ...
- è diverso da a_n perché ha l'n-esima cifra decimale diversa;
- ...

Quindi il numero q sta in $[0; 1]$ e *non* è tra quelli elencati in

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Quindi il numero q sta in $[0;1]$ e *non* è tra quelli elencati in

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Ma avevamo appena detto che l'elenco conteneva *tutti* gli elementi di $[0;1]$. Quindi abbiamo trovato una contraddizione e il teorema è dimostrato:

$$\mathfrak{c} > \aleph_0.$$

Quello che si può anche dimostrare è che $\mathbb{R}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Infiniti tipi di infinito

Si potrà anche andare oltre? Esistono insiemi infiniti di cardinalità più grande di $\mathfrak{c}$, cioè che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$?

Infiniti tipi di infinito

Si potrà anche andare oltre? Esistono insiemi infiniti di cardinalità più grande di $\mathfrak{c}$, cioè che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$?
La risposta è: sì!

Infiniti tipi di infinito

Si potrà anche andare oltre? Esistono insiemi infiniti di cardinalità più grande di $\mathfrak{c}$, cioè che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$?
La risposta è: sì!
L'argomento diagonale di Cantor, infatti, può essere sfruttato per mostrare un teorema ancora più generale:

Teorema

Dato un insieme X, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ non può mai essere messo in corrispondenza biunivoca con X.

Infiniti tipi di infinito

Si potrà anche andare oltre? Esistono insiemi infiniti di cardinalità più grande di $\mathfrak{c}$, cioè che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$?
La risposta è: sì!
L'argomento diagonale di Cantor, infatti, può essere sfruttato per mostrare un teorema ancora più generale:

Teorema

Dato un insieme X, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ non può mai essere messo in corrispondenza biunivoca con X.

Quindi $\mathcal{P}(X)$ ha sempre cardinalità più grande di X. Esiste una gerarchia *infinita* di infiniti!

Infiniti tipi di infinito

Si potrà anche andare oltre? Esistono insiemi infiniti di cardinalità più grande di $\mathfrak{c}$, cioè che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$?
La risposta è: sì!
L'argomento diagonale di Cantor, infatti, può essere sfruttato per mostrare un teorema ancora più generale:

Teorema

Dato un insieme X, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ non può mai essere messo in corrispondenza biunivoca con X.

Quindi $\mathcal{P}(X)$ ha sempre cardinalità più grande di X. Esiste una gerarchia *infinita* di infiniti!
Non vedremo la dimostrazione di questo teorema più generale, ma essa si basa proprio sull'argomento diagonale.

Gerarchia di infiniti

Quindi esiste una gerarchia infinita di insiemi

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots$$

che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca l'un l'altro, quindi le loro cardinalità (che sono infinite) sono diverse.

Gerarchia di infiniti

Quindi esiste una gerarchia infinita di insiemi

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots$$

che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca l'un l'altro, quindi le loro cardinalità (che sono infinite) sono diverse.
Denotando con $|X|$ la cardinalità di un insieme X, potremo scrivere

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \cdots$$

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Gerarchia di infiniti

Quindi esiste una gerarchia infinita di insiemi

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots$$

che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca l'un l'altro, quindi le loro cardinalità (che sono infinite) sono diverse.
Denotando con $|X|$ la cardinalità di un insieme X, potremo scrivere

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \cdots$$

Cantor ci ha insegnato che non tutti gli infiniti sono uguali, e che esistono infiniti tipi di infinito!

Gerarchia di infiniti

Quindi esiste una gerarchia infinita di insiemi

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots$$

che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca l'un l'altro, quindi le loro cardinalità (che sono infinite) sono diverse.
Denotando con $|X|$ la cardinalità di un insieme X, potremo scrivere

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \cdots$$

Cantor ci ha insegnato che non tutti gli infiniti sono uguali, e che esistono infiniti tipi di infinito!
Ci ha anche insegnato che la cardinalità (infinita) di $\mathbb{R}$ è più grande della cardinalità (infinita) di $\mathbb{N}$.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ma esistono altri infiniti?

Ci fu però una cosa che mise in crisi Cantor, e fu la seguente semplice domanda:

Ma esistono altri infiniti?

Ci fu però una cosa che mise in crisi Cantor, e fu la seguente semplice domanda:

esistono degli insiemi con cardinalità strettamente compresa tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$?

Ma esistono altri infiniti?

Ci fu però una cosa che mise in crisi Cantor, e fu la seguente semplice domanda:

esistono degli insiemi con cardinalità strettamente compresa tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$?

In altre parole: c'è qualcosa tra $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$? Esiste un insieme X tale che

$$\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c} \quad ?$$

Ma esistono altri infiniti?

Ci fu però una cosa che mise in crisi Cantor, e fu la seguente semplice domanda:

esistono degli insiemi con cardinalità strettamente compresa tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$?

In altre parole: c'è qualcosa tra $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$? Esiste un insieme X tale che

$$\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c} \quad ?$$

Cantor supponeva (intuitivamente) che non ci fosse niente. Lo stesso simbolo $\aleph_0$ da lui introdotto lascia intendere che era forte la tentazione di dire che $\mathfrak{c} = \aleph_1$ e successivamente che

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = \aleph_2$$

e così via.

Ma esistono altri infiniti?

Ci fu però una cosa che mise in crisi Cantor, e fu la seguente semplice domanda:

esistono degli insiemi con cardinalità strettamente compresa tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$?

In altre parole: c'è qualcosa tra $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$? Esiste un insieme X tale che

$$\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c} \quad ?$$

Cantor supponeva (intuitivamente) che non ci fosse niente. Lo stesso simbolo $\aleph_0$ da lui introdotto lascia intendere che era forte la tentazione di dire che $\mathfrak{c} = \aleph_1$ e successivamente che

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = \aleph_2$$

e così via.
Per parecchio tempo cercò di dimostrare ciò, senza però riuscirci.

Soltanto quando constatò che i suoi sforzi erano vani, Cantor cominciò ad insospettirsi e a pensare che la sua intuizione lo imbrogliasse. Cominciò quindi a cercare di mostrare l'esistenza di un insieme che non fosse numerabile e che avesse cardinalità più piccola di $\mathfrak{c}$.

Soltanto quando constatò che i suoi sforzi erano vani, Cantor cominciò ad insospettirsi e a pensare che la sua intuizione lo imbrogliasse. Cominciò quindi a cercare di mostrare l'esistenza di un insieme che non fosse numerabile e che avesse cardinalità più piccola di $\mathfrak{c}$.

Ma anche questi sforzi risultarono vani.

Soltanto quando constatò che i suoi sforzi erano vani, Cantor cominciò ad insospettirsi e a pensare che la sua intuizione lo imbrogliasse. Cominciò quindi a cercare di mostrare l'esistenza di un insieme che non fosse numerabile e che avesse cardinalità più piccola di $\mathfrak{c}$.

Ma anche questi sforzi risultarono vani.

Cantor era all'*impasse*. Non riusciva a dimostrare né la verità né la falsità di un'affermazione, ed era tra i pochi matematici di quel periodo ad avere le capacità e gli strumenti per farlo.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Soltanto quando constatò che i suoi sforzi erano vani, Cantor cominciò ad insospettirsi e a pensare che la sua intuizione lo imbrogliasse. Cominciò quindi a cercare di mostrare l'esistenza di un insieme che non fosse numerabile e che avesse cardinalità più piccola di $\mathfrak{c}$.

Ma anche questi sforzi risultarono vani.

Cantor era all'*impasse*. Non riusciva a dimostrare né la verità né la falsità di un'affermazione, ed era tra i pochi matematici di quel periodo ad avere le capacità e gli strumenti per farlo.

Ci si trovava, dopo quasi 2000 anni, in una situazione analoga a quella del V postulato di Euclide: ci si trovava ad avere un'affermazione, intuitivamente vera, di cui però non si riusciva a dimostrare la verità o la falsità.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Soltanto quando constatò che i suoi sforzi erano vani, Cantor cominciò ad insospettirsi e a pensare che la sua intuizione lo imbrogliasse. Cominciò quindi a cercare di mostrare l'esistenza di un insieme che non fosse numerabile e che avesse cardinalità più piccola di $\mathfrak{c}$.

Ma anche questi sforzi risultarono vani.

Cantor era all'*impasse*. Non riusciva a dimostrare né la verità né la falsità di un'affermazione, ed era tra i pochi matematici di quel periodo ad avere le capacità e gli strumenti per farlo.

Ci si trovava, dopo quasi 2000 anni, in una situazione analoga a quella del V postulato di Euclide: ci si trovava ad avere un'affermazione, intuitivamente vera, di cui però non si riusciva a dimostrare la verità o la falsità.

Cantor a un certo punto si rassegnò e dirottò le sue ricerche su altri problemi, perdendone però notevolmente in salute. Egli morì il 6 gennaio 1918 senza poter conoscere la fine della storia.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

L'ipotesi del continuo

L'enunciato che Cantor voleva dimostrare prese il nome di **ipotesi del continuo** (in breve (CH), dall'inglese *Continuum Hypothesis*):

Ipotesi del continuo

Non esiste alcun insieme X tale che $\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}$.

L'ipotesi del continuo

L'enunciato che Cantor voleva dimostrare prese il nome di **ipotesi del continuo** (in breve (CH), dall'inglese *Continuum Hypothesis*):

Ipotesi del continuo

Non esiste alcun insieme X tale che $\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}$.

Ora si ripropongono i problemi tipici del V postulato di Euclide:

- la CH è veramente un'ipotesi o si può dimostrare?

L'ipotesi del continuo

L'enunciato che Cantor voleva dimostrare prese il nome di **ipotesi del continuo** (in breve (CH), dall'inglese *Continuum Hypothesis*):

Ipotesi del continuo

Non esiste alcun insieme X tale che $\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}$.

Ora si ripropongono i problemi tipici del V postulato di Euclide:

- la CH è veramente un'ipotesi o si può dimostrare?
- Se non si può dimostrare, siamo sicuri che sia *coerente* con gli assiomi della teoria degli insiemi e non generi contraddizioni?

L'ipotesi del continuo

L'enunciato che Cantor voleva dimostrare prese il nome di **ipotesi del continuo** (in breve (CH), dall'inglese *Continuum Hypothesis*):

Ipotesi del continuo

Non esiste alcun insieme X tale che $\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}$.

Ora si ripropongono i problemi tipici del V postulato di Euclide:

- la CH è veramente un'ipotesi o si può dimostrare?
- Se non si può dimostrare, siamo sicuri che sia *coerente* con gli assiomi della teoria degli insiemi e non generi contraddizioni?

Ebbene, la matematica del XX secolo è riuscita a rispondere a queste domande, anche se ha dovuto impiegare le sue migliori risorse: la risposta è arrivata grazie a Kurt Gödel e Paul Cohen.

CH non è contraddittoria

Sfortunatamente non potremo dimostrare le cose che diremo ora, poiché le dimostrazioni richiedono conoscenze che vanno addirittura al di là di quelle fornite in un corso universitario di Matematica.

CH non è contraddittoria

Sfortunatamente non potremo dimostrare le cose che diremo ora, poiché le dimostrazioni richiedono conoscenze che vanno addirittura al di là di quelle fornite in un corso universitario di Matematica.

Però possiamo cercare di capire cos'è successo storicamente: nel 1940 il grande logico e matematico Gödel, già famoso per i suoi Teoremi di incompletezza, dimostrò che CH è coerente con gli assiomi della teoria degli insiemi (i cosiddetti assiomi di Zermelo-Fraenkel).

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

CH non è contraddittoria

Sfortunatamente non potremo dimostrare le cose che diremo ora, poiché le dimostrazioni richiedono conoscenze che vanno addirittura al di là di quelle fornite in un corso universitario di Matematica.

Però possiamo cercare di capire cos'è successo storicamente: nel 1940 il grande logico e matematico Gödel, già famoso per i suoi Teoremi di incompletezza, dimostrò che CH è coerente con gli assiomi della teoria degli insiemi (i cosiddetti assiomi di Zermelo-Fraenkel).

Ciò significa che è lecito assumerla come ipotesi, ma non risolve completamente la questione.

CH non è contraddittoria

Sfortunatamente non potremo dimostrare le cose che diremo ora, poiché le dimostrazioni richiedono conoscenze che vanno addirittura al di là di quelle fornite in un corso universitario di Matematica.

Però possiamo cercare di capire cos'è successo storicamente: nel 1940 il grande logico e matematico Gödel, già famoso per i suoi Teoremi di incompletezza, dimostrò che CH è coerente con gli assiomi della teoria degli insiemi (i cosiddetti assiomi di Zermelo-Fraenkel).

Ciò significa che è lecito assumerla come ipotesi, ma non risolve completamente la questione.

Però il risultato fu interpretato come un segnale positivo: la CH non era contraddittoria, quindi non era falsa, e si poteva ancora sperare di trovarne una dimostrazione, coronando così il sogno di Cantor.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

CH non è dimostrabile

Ma la risposta finale venne da parte di Paul Cohen, matematico statunitense. All'età di 29 anni, nel 1963, egli mostrò che anche la *negazione* di CH è coerente con la teoria degli insiemi e non genera contraddizione.

CH non è dimostrabile

Ma la risposta finale venne da parte di Paul Cohen, matematico statunitense. All'età di 29 anni, nel 1963, egli mostrò che anche la *negazione* di CH è coerente con la teoria degli insiemi e non genera contraddizione.

Questo chiude in qualche modo la partita: CH è un'affermazione indipendente dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel: non è possibile dimostrarne la verità o la falsità. Il sogno di Cantor si spegne qui.

CH non è dimostrabile

Ma la risposta finale venne da parte di Paul Cohen, matematico statunitense. All'età di 29 anni, nel 1963, egli mostrò che anche la *negazione* di CH è coerente con la teoria degli insiemi e non genera contraddizione.

Questo chiude in qualche modo la partita: CH è un'affermazione indipendente dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel: non è possibile dimostrarne la verità o la falsità. Il sogno di Cantor si spegne qui.

Cohen divenne in breve una celebrità: lo stesso Gödel si complimentò con lui per il risultato raggiunto, e nel 1966 gli venne assegnata la medaglia Fields (il premio più importante per un matematico).

CH non è dimostrabile

Ma la risposta finale venne da parte di Paul Cohen, matematico statunitense. All'età di 29 anni, nel 1963, egli mostrò che anche la *negazione* di CH è coerente con la teoria degli insiemi e non genera contraddizione.

Questo chiude in qualche modo la partita: CH è un'affermazione indipendente dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel: non è possibile dimostrarne la verità o la falsità. Il sogno di Cantor si spegne qui.

Cohen divenne in breve una celebrità: lo stesso Gödel si complimentò con lui per il risultato raggiunto, e nel 1966 gli venne assegnata la medaglia Fields (il premio più importante per un matematico).

La tecnica usata da Cohen per dimostrare questo risultato è chiamata *forcing*, ed ha permesso di dimostrare parecchi altri risultati significativi nel campo della Logica Matematica.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Conclusioni

Georg Cantor può dormire sonni tranquilli: la sua incapacità di dimostrare la CH era dovuta al fatto che tale proposizione è indimostrabile.

Conclusioni

Georg Cantor può dormire sonni tranquilli: la sua incapacità di dimostrare la CH era dovuta al fatto che tale proposizione è indimostrabile.

Quindi l'ipotesi del continuo CH va trattata alla stregua del V postulato di Euclide: si può porre come assioma, ottenendo una certa teoria matematica, oppure si può assumere la sua negazione, ottenendo un'altra teoria. Entrambe le teorie hanno una ragione di esistere.

Conclusioni

Georg Cantor può dormire sonni tranquilli: la sua incapacità di dimostrare la CH era dovuta al fatto che tale proposizione è indimostrabile.

Quindi l'ipotesi del continuo CH va trattata alla stregua del V postulato di Euclide: si può porre come assioma, ottenendo una certa teoria matematica, oppure si può assumere la sua negazione, ottenendo un'altra teoria. Entrambe le teorie hanno una ragione di esistere.

Il dibattito però resta aperto, poiché non è chiaro se una delle teorie sia preferibile all'altra. Alcuni ricercatori contemporanei stanno cercando nuovi sistemi assiomatici, alternativi a quello di Zermelo-Fraenkel, ma altrettanto ragionevoli, in cui CH assuma un ruolo definito.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Conclusioni

Georg Cantor può dormire sonni tranquilli: la sua incapacità di dimostrare la CH era dovuta al fatto che tale proposizione è indimostrabile.

Quindi l'ipotesi del continuo CH va trattata alla stregua del V postulato di Euclide: si può porre come assioma, ottenendo una certa teoria matematica, oppure si può assumere la sua negazione, ottenendo un'altra teoria. Entrambe le teorie hanno una ragione di esistere.

Il dibattito però resta aperto, poiché non è chiaro se una delle teorie sia preferibile all'altra. Alcuni ricercatori contemporanei stanno cercando nuovi sistemi assiomatici, alternativi a quello di Zermelo-Fraenkel, ma altrettanto ragionevoli, in cui CH assuma un ruolo definito.

Curiosamente, sembra che la Matematica contemporanea si stia orientando verso un sistema assiomatico che *neghi* la CH, anche se non c'è, almeno per ora, una scelta definitiva.

Alessandro Musesti - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA