

SIMILITUDINE GEOMETRICA

Ledo Stefanini

1. TEOREMI FONDAMENTALI

I principi della similitudine geometrica era già noti ai greci e si trovano esposti negli *Elementi* di Euclide.

La teoria della similitudine geometrica si è trasformata, nei moderni, nel problema della scelta delle unità di misura e, anzi, si è, in qualche modo, nascosta dietro di questo.

Assunta come intuitiva la nozione di similitudine nel piano e nello spazio, daremo una formulazione «fisica» dei teoremi relativi:

TEOREMA 1: Se due figure sono simili, il rapporto tra due seguenti corrispondenti è lo stesso per tutti i segmenti: si chiama *rapporto di similitudine* o *fattore di scala*.

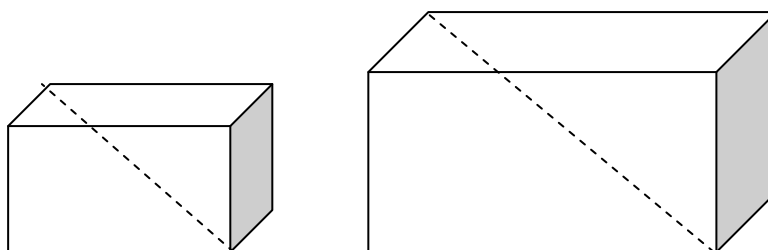


Fig.1. Se i due solidi sono simili, il rapporto tra le diagonali corrispondenti è uguale al rapporto dei lati corrispondenti.

Questa proposizione non presuppone per niente che i segmenti corrispondenti siano stati *misurati*, ovvero che le loro lunghezze siano espresse da un numero e da una unità di lunghezza. Al contrario, garantisce che è possibile misurarli con uno stesso campione di lunghezza.

TEOREMA 2. Se due figure sono simili, le superfici corrispondenti stanno nello stesso rapporto e questo è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

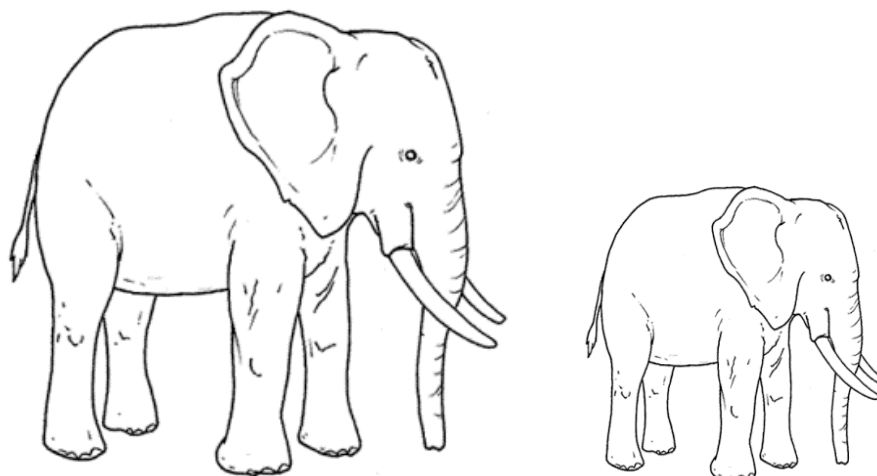
Per esempio, se nel caso illustrato in figura il rapporto di similitudine è R , il rapporto delle superfici corrispondenti è R^2 .

TEOREMA 3. Se due figure sono simili, i volumi corrispondenti stanno nello stesso rapporto e questo è uguale al cubo del rapporto di similitudine.

Per esempio, se nel caso illustrato in figura il rapporto di similitudine è R , il rapporto dei volumi corrispondenti è R^3 .

2. RELAZIONE TRA SUPERFICIE , VOLUMI E DIMENSIONI

Nonostante queste nozioni facciano parte dei normali corsi di geometria, è cosa piuttosto rara che diventi patrimonio culturale degli studenti.



In altre parole, se diamo allo studente l'informazione che due figure sono simili e che il rapporto di similitudine è 1.2 , difficilmente lo studente sa calcolare il rapporto tra le due superfici e tra i due volumi.

Eppure, da questa nozione, si possono ricavare interessanti ed elementari considerazioni fisiche, per esempio sul raffreddamento:

1. In certi ristoranti il risotto (o la polenta o il budino) vengono serviti sotto forma di semisfera con la sezione appoggiata sul piatto. Se il risotto scotta, per affrettarne il raffreddamento, conviene distribuirlo sulla superficie del piatto.
2. Un uomo (o anche un animale) esposto a basse temperature si raggomitola, ovvero cerca di assumere una forma che approssima il più possibile quella sferica.
3. I termosifoni hanno una grande superficie.

Questi fenomeni si spiegano con la *legge del raffreddamento di Newton* che afferma che *la potenza emessa da un corpo caldo è proporzionale alla sua superficie*.

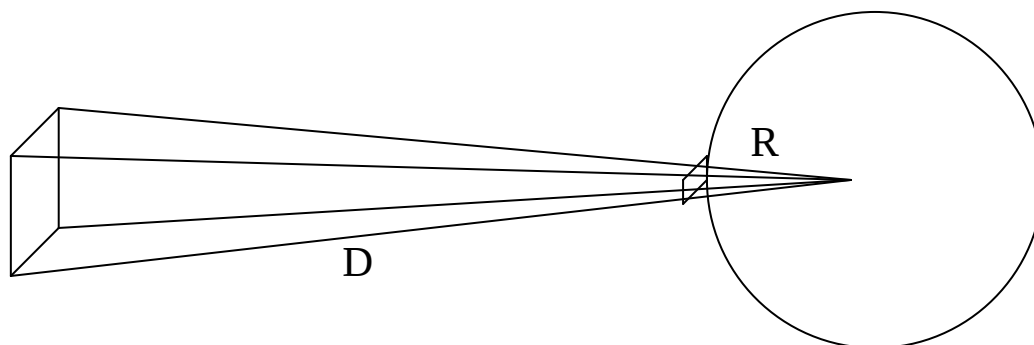
Ci si potrebbe allora porre le seguenti domande:

- Da una semisfera di risotto di raggio qualsiasi, quante semisfere di raggio metà si ricavano?
- Qual è il tempo di raffreddamento delle semisfere piccole rispetto all'unica semisfera grande?

Un altro esempio è quello relativo alla *brillanza* solare. Sappiamo che la *costante solare* (definita come la potenza che raccogliamo su un metro quadro di superficie esposta al Sole, fuori dell'atmosfera) vale:

$$S = 1400 \frac{W}{m^2}.$$

L'energia che raggiunge il nostro m^2 esposto al Sole proviene da una parte molto più piccola della superficie solare. Per poterla calcolare basta sapere che la nostra distanza dal Sole è di $1,5 \times 10^{11} m$, e che il raggio del Sole è $7 \times 10^8 m$.



Se il rapporto delle distanze è $\frac{R}{D}$, il rapporto delle superfici è $\left(\frac{R}{D}\right)^2$ ovvero

$$\left(\frac{7 \times 10^8}{15 \times 10^{10}}\right)^2 = \left(0,5 \times 10^{-2}\right)^2 = 2,5 \times 10^{-5}$$

L'area da cui proviene l'energia che arriva su un m^2 sulla Terra proviene da un'area della superficie solare che $2,5 \times 10^{-5}$ volte più piccola. Pertanto la potenza che viene emessa da un m^2 di superficie solare (la *brillanza solare*) è $\frac{1}{0,25} \times 10^4 = 4 \times 10^4$ volte maggiore della costante solare.

Pertanto
$$B_{\odot} = 1,4 \times 10^3 \times 4 \times 10^4 \frac{W}{m^2} = 5,6 \times 10^7 \frac{W}{m^2} .$$

È stato Galileo nei «*Discorsi e dimostrazioni matematiche sopra due nuove scienze*» ad osservare che un gigante che avesse dimensioni dieci volte maggiori di quelle di un uomo, avrebbe una superficie 100 volte maggiore e un volume mille volte maggiore. Se si ammette che la densità del materiale di cui è costituito sia la stessa di quella di una persona normale, la sua massa sarebbe mille volte maggiore.

3. RELAZIONE TRA SUPERFICIE E VOLUME

Abbiamo visto che, tra figure simili, la superficie è proporzionale al quadrato del rapporto di similitudine e il volume al cubo:

$$S \propto R^2$$

$$V \propto R^3$$

Ne segue che il rapporto superficie/volume è proporzionale al rapporto di similitudine:

$$\frac{V}{S} \propto R$$

Anche questa relazione consente di fare alcune interessanti osservazioni.

Possiamo, per esempio, richiamare il fatto che l'energia termica contenuta in un corpo omogeneo (ad una data temperatura) è proporzionale alla sua massa, quindi al suo volume. Confrontiamo allora il bilancio termico di Pollicino con quello del suo (crudele) genitore. Facciamo l'ipotesi che il

rapporto delle dimensioni sia $R = 10$. Da quanto detto si ricava che il rapporto dei volumi è $R^3 = 1000$, mentre quello delle superfici è $R^2 = 100$. O anche, il rapporto superficie/volume per Pollicino è dieci volte maggiore che per lo snaturato padre. Significa che Pollicino perde calore attraverso la pelle con una rapidità dieci volte superiore a quella del padre. Per compensare questa perdita di energia, Pollicino ha solo due possibilità: mangiare

$$10 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{100}$$

di quanto mangia suo padre, oppure limitare la dispersione di calore indossando una pelliccia. Questo spiega perché spesso i piccoli animali hanno l'epidermide rivestita di pelliccia e perché sono costretti a mangiare molto, in relazione alle loro dimensioni.

Mostriamo un altro esempio.

E' noto che i corpi cadono con accelerazioni diverse a causa dell'azione dell'aria. La forza di frenamento che l'aria esercita su una sfera, con accettabile approssimazione, è proporzionale all'area della sezione e al quadrato della velocità:

$$F = k S v^2$$

dove k dipende dai parametri fisici dell'aria: umidità, densità, ecc.

Una boccia che cade è quindi sotto l'azione di due forze: il peso $P = \rho V g$ (ρ = densità, V = volume, g = campo gravitazionale) e la resistenza dell'aria, quest'ultima crescente con la velocità. Quando le due forze sono uguali (e opposte) il moto diventa uniforme. La velocità in corrispondenza della quale ciò si verifica è detta *velocità limite* o *di regime* ed è caratterizzata dalla condizione:

$$k S v_r^2 = \rho V g$$

o, trattandosi di sfere,

$$k \pi R^2 v_r^2 = \rho g \frac{4}{3} \pi R^3$$

da cui

$$v_r \propto \sqrt{R}.$$

La velocità di regime è proporzionale alla radice del raggio: una sfera grande cade più rapidamente di una piccola.

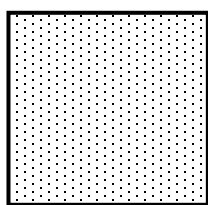
4. SIMILITUDINE GEOMETRICA E UNITA' DI MISURA

m^2 è un simbolo algebrico o indica una figura geometrica?

$$m^2 = \text{[quadrato punteggiato]}$$

$$m^2 = m \times m \quad ?$$

Per misurare le superfici è necessario definire un'unità di misura cioè una superficie campione. Poniamo di scegliere un quadrato. Allora, per misurare le aree di qualsiasi altro quadrato, necessariamente simile alla figura campione, basta determinare il rapporto di similitudine, cioè misurarne il lato nell'unità scelta come lato del quadrato campione.



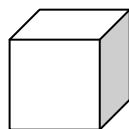
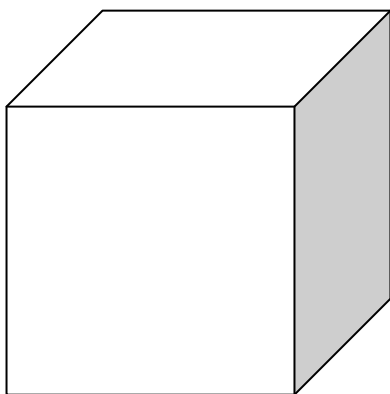
$$m = \frac{L}{l}$$

$$m^2 = \frac{S}{s}$$



Sia m il rapporto di similitudine tra il quadrato da misurare e il quadrato campione: le superfici stanno come $(m)^2$. Pertanto, m ed m^2 sono numeri che esprimono un rapporto di similitudine tra le dimensioni il primo, tra le superfici il secondo.

L'analogo vale per i volumi. Stabilito come unità di volume un cubo che abbia come spigolo il segmento assunto come unità di lunghezza, per misurare il volume di qualsiasi cubo basterà misurare la lunghezza dello spigolo.

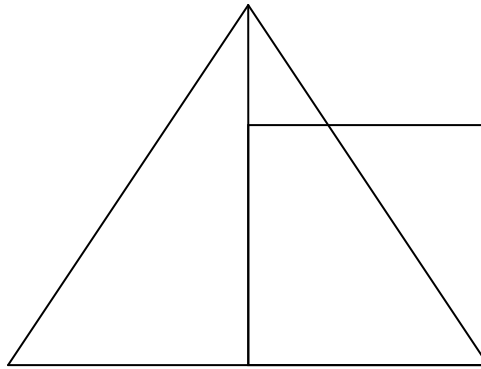
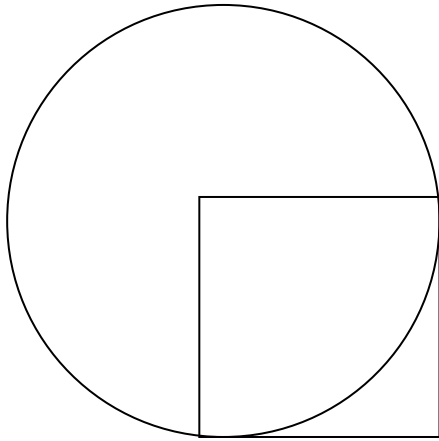


$$m \equiv \frac{L}{l}$$

$$m^3 \equiv \frac{V}{v}$$

Pertanto, m^2 e m^3 indicano effettivamente dei numeri: i rapporti di similitudine con le figure assunte come campione, il quadrato e il cubo che hanno come lato il campione di lunghezza.

Il cerchio e la sfera sono figure caratterizzate da una sola dimensione: il raggio, ma non sono simili, rispettivamente, al quadrato e al cubo, che abbiamo assunto come figure campione. Di conseguenza, nell'espressione dell'area del cerchio, oltre al quadrato del raggio (dovremmo dire: "al quadrato del rapporto di similitudine") dovrà comparire un *fattore di forma*, che tiene conto del fatto che la figura non è un quadrato. Sappiamo che, nel caso del cerchio, tale fattore è $\frac{\pi}{4}$



Anche il triangolo equilatero è caratterizzato da un solo parametro: la misura del lato.

In questo caso, il fattore di forma è $\sqrt{3}$.

Nell'espressione del volume della sfera

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

il fattore di scala è R^3 ; il fattore di forma $\frac{4}{3} \pi$.

Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia