La Regola di Ruffini e i teoremi del Resto e di Ruffini

Michele Scaglia

Università Cattolica del Sacro Cuore

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini

Abbiamo già introdotto la questione riguardante la divisione di due assegnati polinomi $A(x)$ e $B(x)$, definendo opportunamente il polinomio quoziente $Q(x)$ e il polinomio resto $R(x)$.

La regola di Ruffini

Abbiamo già introdotto la questione riguardante la divisione di due assegnati polinomi $A(x)$ e $B(x)$, definendo opportunamente il polinomio quoziente $Q(x)$ e il polinomio resto $R(x)$. Abbiamo pure esibito un algoritmo che consente di individuare il quoziente ed il resto della divisione tra due polinomi assegnati.

La regola di Ruffini

Abbiamo già introdotto la questione riguardante la divisione di due assegnati polinomi $A(x)$ e $B(x)$, definendo opportunamente il polinomio quoziente $Q(x)$ e il polinomio resto $R(x)$. Abbiamo pure esibito un algoritmo che consente di individuare il quoziente ed il resto della divisione tra due polinomi assegnati.

In questa lezione vogliamo, tra le altre cose, esibire un algoritmo più agile (rispetto al tradizionale) che consenta, solo in opportuni casi, di ottenere quoziente e resto di una opportuna divisione tra polinomi.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

La regola di Ruffini

Abbiamo già introdotto la questione riguardante la divisione di due assegnati polinomi $A(x)$ e $B(x)$, definendo opportunamente il polinomio quoziente $Q(x)$ e il polinomio resto $R(x)$. Abbiamo pure esibito un algoritmo che consente di individuare il quoziente ed il resto della divisione tra due polinomi assegnati.

In questa lezione vogliamo, tra le altre cose, esibire un algoritmo più agile (rispetto al tradizionale) che consenta, solo in opportuni casi, di ottenere quoziente e resto di una opportuna divisione tra polinomi.

Questo metodo prende il nome di **Regola di Ruffini**.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini si applica per divisioni in cui il polinomio divisore è della forma $B(x) = (x - a)$, dove a è un qualsiasi numero reale.

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini si applica per divisioni in cui il polinomio divisore è della forma $B(x) = (x - a)$, dove a è un qualsiasi numero reale.
Come per l'algoritmo generale della divisione tra polinomi, anche in questo caso esponiamo la regola con un esempio.

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini si applica per divisioni in cui il polinomio divisore è della forma $B(x) = (x - a)$, dove a è un qualsiasi numero reale.
Come per l'algoritmo generale della divisione tra polinomi, anche in questo caso esponiamo la regola con un esempio.

Si calcolino, con la Regola di Ruffini, quoziente e resto della divisione

$$(2 - x^3 + 2x) : (x - 3).$$

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini si applica per divisioni in cui il polinomio divisore è della forma $B(x) = (x - a)$, dove a è un qualsiasi numero reale.
Come per l'algoritmo generale della divisione tra polinomi, anche in questo caso esponiamo la regola con un esempio.

Si calcolino, con la Regola di Ruffini, quoziente e resto della divisione

$$(2 - x^3 + 2x) : (x - 3).$$

Osserviamo che il divisore è effettivamente della forma $(x - a)$, essendo, nel nostro caso, $a = 3$.

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini si applica per divisioni in cui il polinomio divisore è della forma $B(x) = (x - a)$, dove a è un qualsiasi numero reale.
Come per l'algoritmo generale della divisione tra polinomi, anche in questo caso esponiamo la regola con un esempio.

Si calcolino, con la Regola di Ruffini, quoziente e resto della divisione

$$(2 - x^3 + 2x) : (x - 3).$$

Osserviamo che il divisore è effettivamente della forma $(x - a)$, essendo, nel nostro caso, $a = 3$.
A questo punto illustriamo la procedura di divisione:

1) Anzitutto ordiniamo e completiamo il polinomio dividendo $A(x)$:

1) Anzitutto ordiniamo e completiamo il polinomio dividendo $A(x)$:

$$A(x) = -1x^3 + 0x^2 + 2x + 2.$$

1) Anzitutto ordiniamo e completiamo il polinomio dividendo $A(x)$:

$$A(x) = -1x^3 + 0x^2 + 2x + 2.$$

2) Scriviamo su una riga, ben distanziati, i coefficienti del polinomio dividendo ordinato, compreso il termine noto. Dopodiché tracciamo due linee verticali, una a sinistra del coefficiente di grado massimo, l'altra a sinistra del termine noto. Lasciamo dello spazio al di sotto della riga appena scritta e tracciamo una riga orizzontale.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

1) Anzitutto ordiniamo e completiamo il polinomio dividendo $A(x)$:

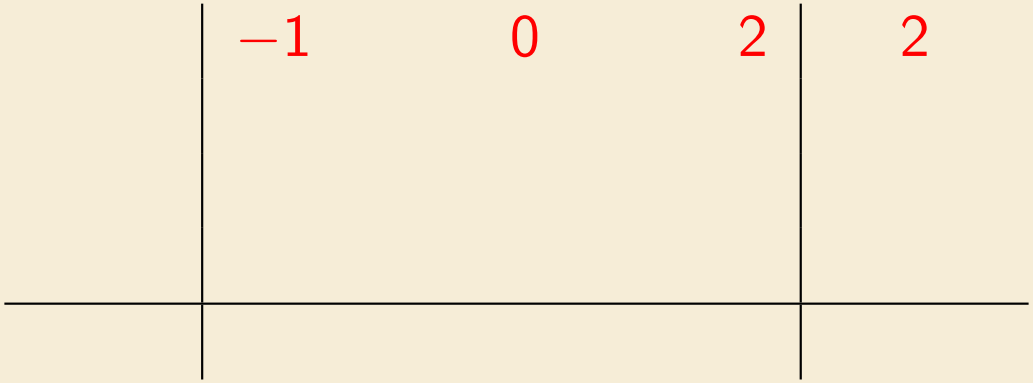
$$A(x) = -1x^3 + 0x^2 + 2x + 2.$$

2) Scriviamo su una riga, ben distanziati, i coefficienti del polinomio dividendo ordinato, compreso il termine noto. Dopodiché tracciamo due linee verticali, una a sinistra del coefficiente di grado massimo, l'altra a sinistra del termine noto. Lasciamo dello spazio al di sotto della riga appena scritta e tracciamo una riga orizzontale. In figura illustriamo quanto esposto:

1) Anzitutto ordiniamo e completiamo il polinomio dividendo $A(x)$:

$$A(x) = -1x^3 + 0x^2 + 2x + 2.$$

2) Scriviamo su una riga, ben distanziati, i coefficienti del polinomio dividendo ordinato, compreso il termine noto. Dopodiché tracciamo due linee verticali, una a sinistra del coefficiente di grado massimo, l'altra a sinistra del termine noto. Lasciamo dello spazio al di sotto della riga appena scritta e tracciamo una riga orizzontale. In figura illustriamo quanto esposto:

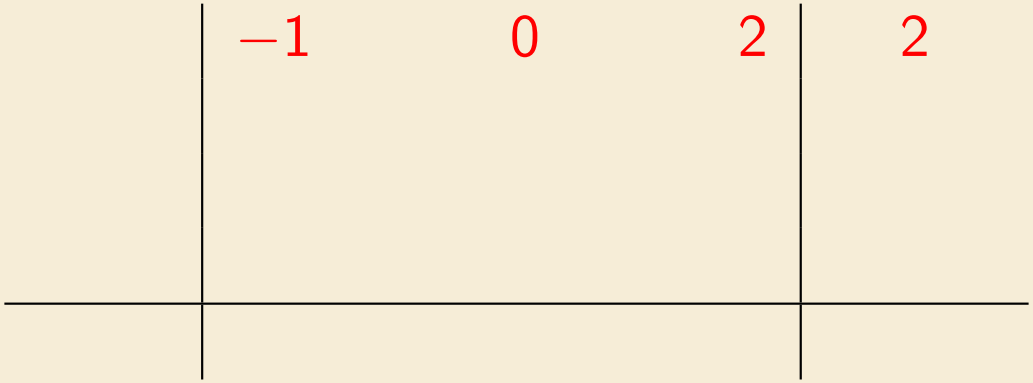


Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

1) Anzitutto ordiniamo e completiamo il polinomio dividendo $A(x)$:

$$A(x) = -1x^3 + 0x^2 + 2x + 2.$$

2) Scriviamo su una riga, ben distanziati, i coefficienti del polinomio dividendo ordinato, compreso il termine noto. Dopodiché tracciamo due linee verticali, una a sinistra del coefficiente di grado massimo, l'altra a sinistra del termine noto. Lasciamo dello spazio al di sotto della riga appena scritta e tracciamo una riga orizzontale. In figura illustriamo quanto esposto:



Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

3) A questo punto, a sinistra della prima linea verticale e al di sopra della riga orizzontale scriviamo il termine a sottratto ad x nel polinomio divisore, in questo caso 3:

3) A questo punto, a sinistra della prima linea verticale e al di sopra della riga orizzontale scriviamo il termine a sottratto ad x nel polinomio divisore, in questo caso 3:

	-1	0	2	2
3				

3) A questo punto, a sinistra della prima linea verticale e al di sopra della riga orizzontale scriviamo il termine a sottratto ad x nel polinomio divisore, in questo caso 3:

	-1	0	2	2
3				

4) Abbassiamo il primo coefficiente del divisore, vale a dire -1 e lo scriviamo nello spazio al di sotto della linea orizzontale: tale numero sarà il **primo coefficiente** del **quoziente** della divisione.

	-1	0	2	2
3				
	-1			

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3				
	-1			

5) Effettuiamo la moltiplicazione tra -1 e 3 ottenendo

$$-1 \cdot (3) = -3$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3				
	-1			

5) Effettuiamo la moltiplicazione tra -1 e 3 ottenendo

$$-1 \cdot (3) = -3$$

e riportiamo tale risultato al di sotto del secondo coefficiente del divisore, vale a dire 0, e al di sopra della linea orizzontale:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3		
	-1			

	-1	0	2	2
3		-3		
	-1			

6) Effettuiamo la somma algebrica tra il termine 0 e il numero -3 appena riportato:

$$0 + (-3) = -3,$$

e trascriviamo il risultato ottenuto al nell'ultima linea, nella colonna dei due termini appena sommati:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3		
	-1	-3		

	-1	0	2	2
3		-3		
	-1	-3		

7) Ripetiamo il procedimento, moltiplicando il numero appena trovato, -3 per 3, trovando

$$-3 \cdot 3 = -9,$$

e riportiamo tale risultato nella colonna del coefficiente 2, al di sopra della riga orizzontale:

	-1	0	2	2
3		-3	-9	
	-1	-3		

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3	-9	
	-1	-3		

8) Come prima, effettuiamo la somma algebrica tra i due numeri in verticale:

$$2 + (-9) = -7,$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3	-9	
	-1	-3		

8) Come prima, effettuiamo la somma algebrica tra i due numeri in verticale:

$$2 + (-9) = -7,$$

e scriviamo il risultato al di sotto della riga orizzontale:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3	-9	
	-1	-3	-7	

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3	-9	
	-1	-3	-7	

9) Di nuovo, moltiplichiamo -7 per 3 ottenendo

$$-7 \cdot (3) = -21,$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3	-9	
	-1	-3	-7	

9) Di nuovo, moltiplichiamo -7 per 3 ottenendo

$$-7 \cdot (3) = -21,$$

e riportiamo tale risultato al di sotto del termine noto 2:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

	-1	0	2	2
3		-3	-9	
	-1	-3	-7	

9) Di nuovo, moltiplichiamo -7 per 3 ottenendo

$$-7 \cdot (3) = -21,$$

e riportiamo tale risultato al di sotto del termine noto 2:

	-1	0	2	2
3		-3	-9	-21
	-1	-3	-7	

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

10) La somma algebrica

$$2 + (-21) = -19$$

ha per risultato quello che sarà il **resto** della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$. Lo scriviamo, come nei passi precedenti, nell'ultima colonna, al di sotto della riga orizzontale

10) La somma algebrica

$$2 + (-21) = -19$$

ha per risultato quello che sarà il **resto** della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$. Lo scriviamo, come nei passi precedenti, nell'ultima colonna, al di sotto della riga orizzontale

	-1	0	2	2
3		-3	-9	-21
	-1	-3	-7	-19

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

10) La somma algebrica

$$2 + (-21) = -19$$

ha per risultato quello che sarà il **resto** della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$. Lo scriviamo, come nei passi precedenti, nell'ultima colonna, al di sotto della riga orizzontale

	-1	0	2	2
3		-3	-9	-21
	-1	-3	-7	-19

A questo punto dobbiamo scrivere il quoziente e il resto della divisione.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

10) La somma algebrica

$$2 + (-21) = -19$$

ha per risultato quello che sarà il **resto** della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$. Lo scriviamo, come nei passi precedenti, nell'ultima colonna, al di sotto della riga orizzontale

	-1	0	2	2
3		-3	-9	-21
	-1	-3	-7	-19

A questo punto dobbiamo scrivere il quoziente e il resto della divisione.

Il quoziente ha per coefficienti i numeri che abbiamo scritto nell'ultima linea, eccettuato il termine -19 che, come già anticipato, sarà il resto della divisione.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In particolare, leggendo da sinistra verso destra, il numero -7 sarà il termine noto del polinomio quoziente, il numero -3 il coefficiente di grado 1 e il numero -1 il coefficiente del termine di grado 2.

In particolare, leggendo da sinistra verso destra, il numero -7 sarà il termine noto del polinomio quoziente, il numero -3 il coefficiente di grado 1 e il numero -1 il coefficiente del termine di grado 2.

Il quoziente della divisione è quindi

$$Q(x) = -1x^2 - 3x - 7,$$

mentre il resto è

$$R(x) = -19.$$

In particolare, leggendo da sinistra verso destra, il numero -7 sarà il termine noto del polinomio quoziente, il numero -3 il coefficiente di grado 1 e il numero -1 il coefficiente del termine di grado 2.

Il quoziente della divisione è quindi

$$Q(x) = -1x^2 - 3x - 7,$$

mentre il resto è

$$R(x) = -19.$$

Osserviamo che questo algoritmo è una semplificazione dell'usuale algoritmo della divisione euclidea tra polinomi ed è valido, ripetiamolo, solo per divisioni con divisore del tipo $(x - a)$.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In particolare, leggendo da sinistra verso destra, il numero -7 sarà il termine noto del polinomio quoziente, il numero -3 il coefficiente di grado 1 e il numero -1 il coefficiente del termine di grado 2.

Il quoziente della divisione è quindi

$$Q(x) = -1x^2 - 3x - 7,$$

mentre il resto è

$$R(x) = -19.$$

Osserviamo che questo algoritmo è una semplificazione dell'usuale algoritmo della divisione euclidea tra polinomi ed è valido, ripetiamolo, solo per divisioni con divisore del tipo $(x - a)$.
Lo si riesce a dedurre facilmente osservando lo schema tradizionale e leggendo la disposizione dei coefficienti che man mano compaiono nella esecuzione dell'algoritmo.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Divisioni con divisore del tipo $(cx - a)$

Vediamo un caso particolare in cui il polinomio dividendo non è della forma $(x - a)$ ma è ad essa riconducibile.

Divisioni con divisore del tipo $(cx - a)$

Vediamo un caso particolare in cui il polinomio dividendo non è della forma $(x - a)$ ma è ad essa riconducibile.

Si trovino quoziente e resto della divisione tra polinomi

$$(3x^2 - 2x + 1) : (2x + 1),$$

applicando la Regola di Ruffini.

Divisioni con divisore del tipo $(cx - a)$

Vediamo un caso particolare in cui il polinomio dividendo non è della forma $(x - a)$ ma è ad essa riconducibile.

Si trovino quoziente e resto della divisione tra polinomi

$$(3x^2 - 2x + 1) : (2x + 1),$$

applicando la Regola di Ruffini.

Osserviamo che il polinomio divisore non è della forma $(x - a)$, in quanto il termine di primo grado x risulta moltiplicato per il coefficiente 2.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Divisioni con divisore del tipo $(cx - a)$

Vediamo un caso particolare in cui il polinomio dividendo non è della forma $(x - a)$ ma è ad essa riconducibile.

Si trovino quoziente e resto della divisione tra polinomi

$$(3x^2 - 2x + 1) : (2x + 1),$$

applicando la Regola di Ruffini.

Osserviamo che il polinomio divisore non è della forma $(x - a)$, in quanto il termine di primo grado x risulta moltiplicato per il coefficiente 2.
Per potersi ricollegare alla regola di Ruffini è necessario adottare qualche accorgimento che consenta di ricondursi a una divisione con divisore nella forma adeguata.
A tale scopo richiamiamo il seguente risultato algebrico di carattere generale:

In una divisione (di numeri o polinomi) se si dividono sia il divisore che il dividendo per un medesimo numero non nullo, anche il resto risulta diviso per tale numero, mentre il quoziente rimane invariato.

In una divisione (di numeri o polinomi) se si dividono sia il divisore che il dividendo per un medesimo numero non nullo, anche il resto risulta diviso per tale numero, mentre il quoziente rimane invariato.

Per convincerci di tale fatto, consideriamo ad esempio la divisione tra numeri

$$28 : 21.$$

Si vede immediatamente che il quoziente della divisione è $Q = 1$ mentre il resto è $R = 7$.

In una divisione (di numeri o polinomi) se si dividono sia il divisore che il dividendo per un medesimo numero non nullo, anche il resto risulta diviso per tale numero, mentre il quoziente rimane invariato.

Per convincerci di tale fatto, consideriamo ad esempio la divisione tra numeri

$$28 : 21.$$

Si vede immediatamente che il quoziente della divisione è $Q = 1$ mentre il resto è $R = 7$.
Se, invece, dividiamo per 7 sia il dividendo che il divisore, otteniamo la divisione

$$4 : 3,$$

il cui quoziente è 1 (come quello della divisione originaria) e il cui resto è $R = 1$, che è proprio il resto precedente diviso per 7.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In una divisione (di numeri o polinomi) se si dividono sia il divisore che il dividendo per un medesimo numero non nullo, anche il resto risulta diviso per tale numero, mentre il quoziente rimane invariato.

Per convincerci di tale fatto, consideriamo ad esempio la divisione tra numeri

$$28 : 21.$$

Si vede immediatamente che il quoziente della divisione è $Q = 1$ mentre il resto è $R = 7$.
Se, invece, dividiamo per 7 sia il dividendo che il divisore, otteniamo la divisione

$$4 : 3,$$

il cui quoziente è 1 (come quello della divisione originaria) e il cui resto è $R = 1$, che è proprio il resto precedente diviso per 7.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Premessa questa osservazione, sappiamo ora come procedere con la divisione di polinomi assegnata:

Premessa questa osservazione, sappiamo ora come procedere con la divisione di polinomi assegnata:

1. dividiamo opportunamente dividendo e divisore per uno stesso numero che renda il divisore nella forma $(x - a)$;

Premessa questa osservazione, sappiamo ora come procedere con la divisione di polinomi assegnata:

1. dividiamo opportunamente dividendo e divisore per uno stesso numero che renda il divisore nella forma $(x - a)$;
2. eseguiamo la nuova divisione, ne troviamo quoziente e resto;

Premessa questa osservazione, sappiamo ora come procedere con la divisione di polinomi assegnata:

1. dividiamo opportunamente dividendo e divisore per uno stesso numero che renda il divisore nella forma $(x - a)$;
2. eseguiamo la nuova divisione, ne troviamo quoziente e resto;
3. il quoziente trovato nella seconda divisione sarà lo stesso della divisione assegnata;

Premessa questa osservazione, sappiamo ora come procedere con la divisione di polinomi assegnata:

1. dividiamo opportunamente dividendo e divisore per uno stesso numero che renda il divisore nella forma $(x - a)$;
2. eseguiamo la nuova divisione, ne troviamo quoziente e resto;
3. il quoziente trovato nella seconda divisione sarà lo stesso della divisione assegnata; invece, il resto trovato andrà rimoltiplicato per quel fattore numerico per cui abbiamo diviso inizialmente: in tale modo individueremo il resto della divisione iniziale.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Premessa questa osservazione, sappiamo ora come procedere con la divisione di polinomi assegnata:

1. dividiamo opportunamente dividendo e divisore per uno stesso numero che renda il divisore nella forma $(x - a)$;
2. eseguiamo la nuova divisione, ne troviamo quoziente e resto;
3. il quoziente trovato nella seconda divisione sarà lo stesso della divisione assegnata; invece, il resto trovato andrà rimoltiplicato per quel fattore numerico per cui abbiamo diviso inizialmente: in tale modo individueremo il resto della divisione iniziale.

Nel nostro caso, in cui il divisore è $(2x + 1)$, dobbiamo dividere sia il dividendo che il divisore per il numero 2: otteniamo quindi la nuova divisione

$$\left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{2}\right) : \left(\frac{2x + 1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{2}\right) : \left(\frac{2x + 1}{2}\right),$$

che, distribuendo, diviene

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{3x^2-2x+1}{2}\right):\left(\frac{2x+1}{2}\right),$$

che, distribuendo, diviene

$$\left(\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right):\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

che è proprio nella forma voluta.

$$\left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{2}\right) : \left(\frac{2x + 1}{2}\right),$$

che, distribuendo, diviene

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right),$$

che è proprio nella forma voluta.

Osserviamo che, scrivendo come segue il divisore:

$$\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right),$$

constatiamo che $a = -\frac{1}{2}$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

$$\left(\frac{3x^2-2x+1}{2}\right):\left(\frac{2x+1}{2}\right),$$

che, distribuendo, diviene

$$\left(\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right):\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

che è proprio nella forma voluta.

Osserviamo che, scrivendo come segue il divisore:

$$\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right),$$

constatiamo che $a=-\frac{1}{2}$

A questo punto, procediamo con la divisione, mettendo in atto quell'algoritmo illustrato nella sezione precedente.

Predisponiamo la tabella, inserendo i coefficienti e il termine noto del polinomio divisore ed $a = -\frac{1}{2}$ evidenziato nel polinomio divisore.

Predisponiamo la tabella, inserendo i coefficienti e il termine noto del polinomio divisore ed $a = -\frac{1}{2}$ evidenziato nel polinomio divisore.

	$\frac{3}{2}$	-1	$+\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$			

Predisponiamo la tabella, inserendo i coefficienti e il termine noto del polinomio divisore ed $a = -\frac{1}{2}$ evidenziato nel polinomio divisore.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & & +\frac{1}{2} \\
 & & & & \\
-\frac{1}{2} & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

Abbassiamo il termine $\frac{3}{2}$ scrivendolo nell'ultima linea:

Predisponiamo la tabella, inserendo i coefficienti e il termine noto del polinomio divisore ed $a = -\frac{1}{2}$ evidenziato nel polinomio divisore.

$$
\begin{array}{r|rr|r}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & & & \\
\hline
 & & &
\end{array}
$$

Abbassiamo il termine $\frac{3}{2}$ scrivendolo nell'ultima linea:

$$
\begin{array}{r|rr|r}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & & & \\
\hline
 & \frac{3}{2} & &
\end{array}
$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Effettuiamo la moltiplicazione tra $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ e riportiamo il prodotto ottenuto $-\frac{3}{4}$ nella colonna del coefficiente -1; sommiamo algebricamente e troviamo $-\frac{7}{4}$:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Effettuiamo la moltiplicazione tra $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ e riportiamo il prodotto ottenuto $-\frac{3}{4}$ nella colonna del coefficiente -1; sommiamo algebricamente e troviamo $-\frac{7}{4}$:

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
 & & & \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} &
\end{array}
$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Effettuiamo la moltiplicazione tra $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ e riportiamo il prodotto ottenuto $-\frac{3}{4}$ nella colonna del coefficiente -1; sommiamo algebricamente e troviamo $-\frac{7}{4}$:

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
 & & & \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} &
\end{array}
$$

Infine, moltiplichiamo $-\frac{7}{4}$ per $-\frac{1}{2}$.

Il risultato trovato, $+\frac{7}{8}$, lo scriviamo sotto al termine noto $+\frac{1}{2}$ e troviamo, sommando algebricamente, $\frac{11}{8}$.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Effettuiamo la moltiplicazione tra $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ e riportiamo il prodotto ottenuto $-\frac{3}{4}$ nella colonna del coefficiente -1; sommiamo algebricamente e troviamo $-\frac{7}{4}$:

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
 & & & \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} &
\end{array}
$$

Infine, moltiplichiamo $-\frac{7}{4}$ per $-\frac{1}{2}$.

Il risultato trovato, $+\frac{7}{8}$, lo scriviamo sotto al termine noto $+\frac{1}{2}$ e troviamo, sommando algebricamente, $\frac{11}{8}$. Otteniamo quindi lo schema completo:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
 & & & \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{11}{8}
\end{array}
$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
 & & & \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{11}{8}
\end{array}
$$

A questo punto troviamo il quoziente e il resto della divisione leggendone i coefficienti nell'ultima riga:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
 & & & \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{11}{8}
\end{array}
$$

A questo punto troviamo il quoziente e il resto della divisione leggendone i coefficienti nell'ultima riga:

$$\widetilde{Q}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}, \qquad \widetilde{R}(x) = \frac{11}{8}.$$

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{11}{8}
\end{array}
$$

A questo punto troviamo il quoziente e il resto della divisione leggendone i coefficienti nell'ultima riga:

$$\widetilde{Q}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}, \qquad \widetilde{R}(x) = \frac{11}{8}.$$

Per quanto riguarda quoziente e resto della divisione originaria , invece, sappiamo che il quoziente è lo stesso, mentre il resto lo si ottiene dal prodotto di $\widetilde{R}(x)$ con il fattore 2, cioè

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{11}{8}
\end{array}
$$

A questo punto troviamo il quoziente e il resto della divisione leggendone i coefficienti nell'ultima riga:

$$\widetilde{Q}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}, \qquad \widetilde{R}(x) = \frac{11}{8}.$$

Per quanto riguarda quoziente e resto della divisione originaria , invece, sappiamo che il quoziente è lo stesso, mentre il resto lo si ottiene dal prodotto di $\widetilde{R}(x)$ con il fattore 2, cioè

$$Q(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}, \qquad R(x) = 2 \cdot \frac{11}{8} = \frac{11}{4}$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Il teorema del Resto

Il teorema del Resto

In questa sezione daremo l'enunciato e la dimostrazione di un importante teorema, noto come Teorema del Resto, che riguarda divisioni in cui il polinomio divisore è nella forma $(x - a)$.

Il teorema del Resto

In questa sezione daremo l'enunciato e la dimostrazione di un importante teorema, noto come Teorema del Resto, che riguarda divisioni in cui il polinomio divisore è nella forma $(x - a)$.

Teorema del Resto

Considerata la divisione

$$A(x) : (x - a), \quad a \in \mathbb{R},$$

il resto della divisione è dato dal valore $A(a)$, vale a dire dal valore che assume il polinomio dividendo quando si sostituisce ad x il valore a.

Il teorema del Resto

In questa sezione daremo l'enunciato e la dimostrazione di un importante teorema, noto come Teorema del Resto, che riguarda divisioni in cui il polinomio divisore è nella forma $(x - a)$.

Teorema del Resto

Considerata la divisione

$$A(x) : (x - a), \quad a \in \mathbb{R},$$

il resto della divisione è dato dal valore $A(a)$, vale a dire dal valore che assume il polinomio dividendo quando si sostituisce ad x il valore a.
In altre parole, $R(x) = A(a)$.

Il teorema del Resto

In questa sezione daremo l'enunciato e la dimostrazione di un importante teorema, noto come Teorema del Resto, che riguarda divisioni in cui il polinomio divisore è nella forma $(x - a)$.

Teorema del Resto

Considerata la divisione

$$A(x) : (x - a), \quad a \in \mathbb{R},$$

il resto della divisione è dato dal valore $A(a)$, vale a dire dal valore che assume il polinomio dividendo quando si sostituisce ad x il valore a.
In altre parole, $R(x) = A(a)$.

Vediamo l'immediata dimostrazione di tale fatto.

Dimostrazione.

Dimostrazione.
Per il Teorema del Quoziente e del Resto, che, ricordiamo, afferma che il polinomio dividendo è uguale al prodotto del polinomio divisore per il polinomio quoziente aumentato del polinomio resto, possiamo scrivere

Dimostrazione.
Per il Teorema del Quoziente e del Resto, che, ricordiamo, afferma che il polinomio dividendo è uguale al prodotto del polinomio divisore per il polinomio quoziente aumentato del polinomio resto, possiamo scrivere

$$A(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Osserviamo che il resto non contiene la variabile x in quanto la divisione di un polinomio $A(x)$ di grado n per il polinomio $(x - a)$ porta sempre a un quoziente di grado $n - 1$ e ad un resto di grado 0 (costante).

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Dimostrazione.
Per il Teorema del Quoziente e del Resto, che, ricordiamo, afferma che il polinomio dividendo è uguale al prodotto del polinomio divisore per il polinomio quoziente aumentato del polinomio resto, possiamo scrivere

$$A(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Osserviamo che il resto non contiene la variabile x in quanto la divisione di un polinomio $A(x)$ di grado n per il polinomio $(x - a)$ porta sempre a un quoziente di grado $n - 1$ e ad un resto di grado 0 (costante). La precedente uguaglianza vale per tutte le x reali. In particolare, sostituiamo il valore $x = a$.

Dimostrazione.
Per il Teorema del Quoziente e del Resto, che, ricordiamo, afferma che il polinomio dividendo è uguale al prodotto del polinomio divisore per il polinomio quoziente aumentato del polinomio resto, possiamo scrivere

$$A(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Osserviamo che il resto non contiene la variabile x in quanto la divisione di un polinomio $A(x)$ di grado n per il polinomio $(x - a)$ porta sempre a un quoziente di grado $n - 1$ e ad un resto di grado 0 (costante). La precedente uguaglianza vale per tutte le x reali. In particolare, sostituiamo il valore $x = a$.Troviamo

$$A(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R,$$

Dimostrazione.
Per il Teorema del Quoziente e del Resto, che, ricordiamo, afferma che il polinomio dividendo è uguale al prodotto del polinomio divisore per il polinomio quoziente aumentato del polinomio resto, possiamo scrivere

$$A(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Osserviamo che il resto non contiene la variabile x in quanto la divisione di un polinomio $A(x)$ di grado n per il polinomio $(x - a)$ porta sempre a un quoziente di grado $n - 1$ e ad un resto di grado 0 (costante). La precedente uguaglianza vale per tutte le x reali. In particolare, sostituiamo il valore $x = a$.Troviamo

$$A(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R,$$

cioè

$$A(a) = 0 \cdot Q(a) + R,$$

Dimostrazione.
Per il Teorema del Quoziente e del Resto, che, ricordiamo, afferma che il polinomio dividendo è uguale al prodotto del polinomio divisore per il polinomio quoziente aumentato del polinomio resto, possiamo scrivere

$$A(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Osserviamo che il resto non contiene la variabile x in quanto la divisione di un polinomio $A(x)$ di grado n per il polinomio $(x - a)$ porta sempre a un quoziente di grado $n - 1$ e ad un resto di grado 0 (costante). La precedente uguaglianza vale per tutte le x reali. In particolare, sostituiamo il valore $x = a$.Troviamo

$$A(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R,$$

cioè

$$A(a) = 0 \cdot Q(a) + R,$$

da cui

$$A(a) = R,$$

che è proprio la tesi del teorema.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Esempio

Esempio

Vediamo applicato ad un esempio il precedente teorema.

Esempio

Vediamo applicato ad un esempio il precedente teorema.

Si calcoli, senza eseguire la divisione, il resto della divisione

$$(3x^3 + 5x^2 - 1) : (x + 2).$$

Esempio

Vediamo applicato ad un esempio il precedente teorema.

Si calcoli, senza eseguire la divisione, il resto della divisione

$$(3x^3 + 5x^2 - 1) : (x + 2).$$

Il polinomio dividendo è nell'incognita x e il divisore $(x + 2) = (x - (-2))$ è nella forma $(x - a)$, essendo $a = -2$.

Esempio

Vediamo applicato ad un esempio il precedente teorema.

Si calcoli, senza eseguire la divisione, il resto della divisione

$$(3x^3 + 5x^2 - 1) : (x + 2).$$

Il polinomio dividendo è nell'incognita x e il divisore $(x + 2) = (x - (-2))$ è nella forma $(x - a)$, essendo $a = -2$.
Il teorema precedente ci dice che il resto che si otterrebbe eseguendo per esteso la divisione è il polinomio divisore calcolato in $x = -2$,

Esempio

Vediamo applicato ad un esempio il precedente teorema.

Si calcoli, senza eseguire la divisione, il resto della divisione

$$(3x^3 + 5x^2 - 1) : (x + 2).$$

Il polinomio dividendo è nell'incognita x e il divisore $(x + 2) = (x - (-2))$ è nella forma $(x - a)$, essendo $a = -2$.
Il teorema precedente ci dice che il resto che si otterrebbe eseguendo per esteso la divisione è il polinomio divisore calcolato in $x = -2$, cioè

$$R = A(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 5(-2)^2 - 1 =$$

$$= 3 \cdot (-8) + 5 \cdot (4) - 1 =$$

$$= -24 + 20 - 1 = -5.$$

Esempio

Vediamo applicato ad un esempio il precedente teorema.

Si calcoli, senza eseguire la divisione, il resto della divisione

$$(3x^3 + 5x^2 - 1) : (x + 2).$$

Il polinomio dividendo è nell'incognita x e il divisore $(x + 2) = (x - (-2))$ è nella forma $(x - a)$, essendo $a = -2$.
Il teorema precedente ci dice che il resto che si otterrebbe eseguendo per esteso la divisione è il polinomio divisore calcolato in $x = -2$, cioè

$$R = A(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 5(-2)^2 - 1 =$$

$$= 3 \cdot (-8) + 5 \cdot (4) - 1 =$$

$$= -24 + 20 - 1 = -5.$$

Un altro esempio.

Un altro esempio.

Si calcoli, senza eseguire la divisione, il resto della divisione nell'incognita x:

$$(x^2 - 4ax + a^2) : (x - 3a).$$

Un altro esempio.

Si calcoli, senza eseguire la divisione, il resto della divisione nell'incognita x:

$$(x^2 - 4ax + a^2) : (x - 3a).$$

Si tratta di una divisione con coefficienti letterali (a causa della presenza della lettera a); l'incognita, come specificato dal testo dell'esercizio, è la lettera x.
Il resto della divisione è il polinomio dividendo calcolato in $x = 3a$, cioè

$$R = A(a) = (3a)^2 - 4a(3a) + a^2 =$$
$$= 9a^2 - 12a^2 + a^2 = -2a^2.$$

Il Teorema di Ruffini

Il Teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini è uno dei più importanti teoremi dell'algebra. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema del resto.

Il Teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini è uno dei più importanti teoremi dell'algebra. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema del resto.
Enunciamolo:

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $(x - a)$ SE E SOLTANTO SE $A(a) = 0$, cioè se e soltanto se a è uno **zero** del polinomio $A(x)$.

Il Teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini è uno dei più importanti teoremi dell'algebra. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema del resto.
Enunciamolo:

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $(x - a)$ SE E SOLTANTO SE $A(a) = 0$, cioè se e soltanto se a è uno **zero** del polinomio $A(x)$.

Dimostrazione.

Il Teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini è uno dei più importanti teoremi dell'algebra. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema del resto.
Enunciamolo:

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $(x - a)$ SE E SOLTANTO SE $A(a) = 0$, cioè se e soltanto se a è uno **zero** del polinomio $A(x)$.

Dimostrazione.

Il teorema esprime una condizione necessaria e sufficiente.

Il Teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini è uno dei più importanti teoremi dell'algebra. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema del resto.
Enunciamolo:

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $(x - a)$ SE E SOLTANTO SE $A(a) = 0$, cioè se e soltanto se a è uno **zero** del polinomio $A(x)$.

Dimostrazione.

Il teorema esprime una condizione necessaria e sufficiente.
Cominciamo col provare la prima parte del teorema: supponiamo che $A(x)$ sia divisibile per $(x - a)$; dovremo provare che $A(a) = 0$.

Il Teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini è uno dei più importanti teoremi dell'algebra. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema del resto.
Enunciamolo:

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $(x - a)$ SE E SOLTANTO SE $A(a) = 0$, cioè se e soltanto se a è uno **zero** del polinomio $A(x)$.

Dimostrazione.

Il teorema esprime una condizione necessaria e sufficiente.
Cominciamo col provare la prima parte del teorema: supponiamo che $A(x)$ sia divisibile per $(x - a)$; dovremo provare che $A(a) = 0$.

Sappiamo che un polinomio è *divisibile* per $(x - a)$ quando il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $(x - a)$ dà resto 0;

Il Teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini è uno dei più importanti teoremi dell'algebra. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema del resto.
Enunciamolo:

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $(x - a)$ SE E SOLTANTO SE $A(a) = 0$, cioè se e soltanto se a è uno **zero** del polinomio $A(x)$.

Dimostrazione.

Il teorema esprime una condizione necessaria e sufficiente.
Cominciamo col provare la prima parte del teorema: supponiamo che $A(x)$ sia divisibile per $(x - a)$; dovremo provare che $A(a) = 0$.

Sappiamo che un polinomio è *divisibile* per $(x - a)$ quando il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $(x - a)$ dà resto 0; ma poiché, per il Teorema del Resto, il resto della divisione è uguale a $A(a)$, ne segue che

$$A(a) = 0.$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Proviamo anche il viceversa.

Proviamo anche il viceversa.
Supponiamo di avere un polinomio $A(x)$ che abbia a come zero, cioè tale che $A(a) = 0$.

Proviamo anche il viceversa.
Supponiamo di avere un polinomio $A(x)$ che abbia a come zero, cioè tale che $A(a) = 0$. Vogliamo mostrare che $A(x)$ è divisibile per $(x - a)$.

Proviamo anche il viceversa.
Supponiamo di avere un polinomio $A(x)$ che abbia a come zero, cioè tale che $A(a) = 0$. Vogliamo mostrare che $A(x)$ è divisibile per $(x - a)$.
Poiché

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R$$

Proviamo anche il viceversa.
Supponiamo di avere un polinomio $A(x)$ che abbia a come zero, cioè tale che $A(a) = 0$. Vogliamo mostrare che $A(x)$ è divisibile per $(x - a)$.
Poiché

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R$$

segue, seguendo lo stesso ragionamento del Teorema del Resto, che calcolando l'uguaglianza precedente per $x = a$, si trova

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Proviamo anche il viceversa.
Supponiamo di avere un polinomio $A(x)$ che abbia a come zero, cioè tale che $A(a) = 0$. Vogliamo mostrare che $A(x)$ è divisibile per $(x - a)$.
Poiché

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R$$

segue, seguendo lo stesso ragionamento del Teorema del Resto, che calcolando l'uguaglianza precedente per $x = a$, si trova

$$A(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R.$$

Ma, per ipotesi, $A(a) = 0$, quindi

$$0 = R.$$

Dire che il resto della divisione è 0 significa dire che $A(x)$ è divisibile per $(x - a)$.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Proviamo anche il viceversa.
Supponiamo di avere un polinomio $A(x)$ che abbia a come zero, cioè tale che $A(a) = 0$. Vogliamo mostrare che $A(x)$ è divisibile per $(x - a)$.
Poiché

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R$$

segue, seguendo lo stesso ragionamento del Teorema del Resto, che calcolando l'uguaglianza precedente per $x = a$, si trova

$$A(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R.$$

Ma, per ipotesi, $A(a) = 0$, quindi

$$0 = R.$$

Dire che il resto della divisione è 0 significa dire che $A(x)$ è divisibile per $(x - a)$.
Il teorema è quindi provato.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Applicazione alle Scomposizioni

Vediamo, come approfondimento, due applicazioni del teorema di Ruffini nella scomposizione dei polinomi.

Applicazione alle Scomposizioni

Vediamo, come approfondimento, due applicazioni del teorema di Ruffini nella scomposizione dei polinomi.

LA SCOMPOSIZIONE DI $(x^3 - y^3)$.

Applicazione alle Scomposizioni

Vediamo, come approfondimento, due applicazioni del teorema di Ruffini nella scomposizione dei polinomi.

LA SCOMPOSIZIONE DI $(x^3 - y^3)$.

Consideriamo il polinomio

$$x^3 - y^3,$$

noto come **differenza di due cubi**.

Applicazione alle Scomposizioni

Vediamo, come approfondimento, due applicazioni del teorema di Ruffini nella scomposizione dei polinomi.

LA SCOMPOSIZIONE DI $(x^3 - y^3)$.

Consideriamo il polinomio

$$x^3 - y^3,$$

noto come **differenza di due cubi**.
Decidiamo di assumere come **variabile** la lettera x e come coefficiente la lettera y, pertanto, in accordo con le notazioni porecedenti, scriviamo

$$A(x) = x^3 - y^3.$$

Applicazione alle Scomposizioni

Vediamo, come approfondimento, due applicazioni del teorema di Ruffini nella scomposizione dei polinomi.

LA SCOMPOSIZIONE DI $(x^3 - y^3)$.

Consideriamo il polinomio

$$x^3 - y^3,$$

noto come **differenza di due cubi**.
Decidiamo di assumere come **variabile** la lettera x e come coefficiente la lettera y, pertanto, in accordo con le notazioni porecedenti, scriviamo

$$A(x) = x^3 - y^3.$$

Risulta immediato constatare che il polinomio $A(x)$ risulta nullo quando al posto della variabile x si sotituisca il valore y, cioè $A(y) = 0$;

Applicazione alle Scomposizioni

Vediamo, come approfondimento, due applicazioni del teorema di Ruffini nella scomposizione dei polinomi.

LA SCOMPOSIZIONE DI $(x^3 - y^3)$.

Consideriamo il polinomio

$$x^3 - y^3,$$

noto come **differenza di due cubi**.
Decidiamo di assumere come **variabile** la lettera x e come coefficiente la lettera y, pertanto, in accordo con le notazioni porecedenti, scriviamo

$$A(x) = x^3 - y^3.$$

Risulta immediato constatare che il polinomio $A(x)$ risulta nullo quando al posto della variabile x si sotituisca il valore y, cioè $A(y) = 0$;infatti si ha

$$A(y) = (y)^3 - y^3 = 0.$$

Applicazione alle Scomposizioni

Vediamo, come approfondimento, due applicazioni del teorema di Ruffini nella scomposizione dei polinomi.

LA SCOMPOSIZIONE DI $(x^3 - y^3)$.

Consideriamo il polinomio

$$x^3 - y^3,$$

noto come **differenza di due cubi**.
Decidiamo di assumere come **variabile** la lettera x e come coefficiente la lettera y, pertanto, in accordo con le notazioni porecedenti, scriviamo

$$A(x) = x^3 - y^3.$$

Risulta immediato constatare che il polinomio $A(x)$ risulta nullo quando al posto della variabile x si sotituisca il valore y, cioè $A(y) = 0$;infatti si ha

$$A(y) = (y)^3 - y^3 = 0.$$

A questo punto interviene il Teorema di Ruffini che garantisce che, a causa del fatto che $A(y) = 0$ il polinomio $A(x)$ dev'essere divisibile per $(x - y)$.

A questo punto interviene il Teorema di Ruffini che garantisce che, a causa del fatto che $A(y) = 0$ il polinomio $A(x)$ dev'essere divisibile per $(x - y)$. Ciò significa che esiste un opportuno polinomio $Q(x)$ tale che

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y).$$

A questo punto interviene il Teorema di Ruffini che garantisce che, a causa del fatto che $A(y) = 0$ il polinomio $A(x)$ dev'essere divisibile per $(x - y)$. Ciò significa che esiste un opportuno polinomio $Q(x)$ tale che

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y).$$

La precedente scrittura risulta così essere una **scomposizione** in fattori per il polinomio $A(x)$.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

A questo punto interviene il Teorema di Ruffini che garantisce che, a causa del fatto che $A(y) = 0$ il polinomio $A(x)$ dev'essere divisibile per $(x - y)$. Ciò significa che esiste un opportuno polinomio $Q(x)$ tale che

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y).$$

La precedente scrittura risulta così essere una **scomposizione** in fattori per il polinomio $A(x)$.
Si tratta ora di individuare quale sia il polinomio $Q(x)$:

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

A questo punto interviene il Teorema di Ruffini che garantisce che, a causa del fatto che $A(y) = 0$ il polinomio $A(x)$ dev'essere divisibile per $(x - y)$. Ciò significa che esiste un opportuno polinomio $Q(x)$ tale che

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y).$$

La precedente scrittura risulta così essere una **scomposizione** in fattori per il polinomio $A(x)$.
Si tratta ora di individuare quale sia il polinomio $Q(x)$:è chiaro che esso sia il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $(x - a)$, divisione, ribadiamolo, esatta (cioè con resto nullo) a causa del teorema di Ruffini.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

A questo punto interviene il Teorema di Ruffini che garantisce che, a causa del fatto che $A(y) = 0$ il polinomio $A(x)$ dev'essere divisibile per $(x - y)$. Ciò significa che esiste un opportuno polinomio $Q(x)$ tale che

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y).$$

La precedente scrittura risulta così essere una **scomposizione** in fattori per il polinomio $A(x)$.
Si tratta ora di individuare quale sia il polinomio $Q(x)$:è chiaro che esso sia il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $(x - a)$, divisione, ribadiamolo, esatta (cioè con resto nullo) a causa del teorema di Ruffini.

Procediamo dunque con la divisione tra $A(x) = (x^3 - y^3)$ e il polinomio $(x - y)$.
Possiamo seguire l'algoritmo tradizionale o il metodo più rapido della regola di Ruffini.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

A questo punto interviene il Teorema di Ruffini che garantisce che, a causa del fatto che $A(y) = 0$ il polinomio $A(x)$ dev'essere divisibile per $(x - y)$. Ciò significa che esiste un opportuno polinomio $Q(x)$ tale che

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y).$$

La precedente scrittura risulta così essere una **scomposizione** in fattori per il polinomio $A(x)$.
Si tratta ora di individuare quale sia il polinomio $Q(x)$:è chiaro che esso sia il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $(x - a)$, divisione, ribadiamolo, esatta (cioè con resto nullo) a causa del teorema di Ruffini.

Procediamo dunque con la divisione tra $A(x) = (x^3 - y^3)$ e il polinomio $(x - y)$.
Possiamo seguire l'algoritmo tradizionale o il metodo più rapido della regola di Ruffini.

Seguiamo questa seconda strada.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ordiniamo e completiamo il polinomio:

Ordiniamo e completiamo il polinomio:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - y^3) : (x - y)$$

Ordiniamo e completiamo il polinomio:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - y^3) : (x - y)$$

e predisponiamo la tabella con i coefficienti (letterali) e il termine y sottratto alla variabile x nel polinomio divisore.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ordiniamo e completiamo il polinomio:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - y^3) : (x - y)$$

e predisponiamo la tabella con i coefficienti (letterali) e il termine y sottratto alla variabile x nel polinomio divisore.

	1	0	0	$-y^3$
y				

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ordiniamo e completiamo il polinomio:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - y^3) : (x - y)$$

e predisponiamo la tabella con i coefficienti (letterali) e il termine y sottratto alla variabile x nel polinomio divisore.

	1	0	0	$-y^3$
y				

Mettiamo in atto la procedura, abbassando 1, moltiplicandolo per y e riportando il prodotto y nella colonna del secondo coefficiente 0.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Si ha

Si ha

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\
 & & & & \\
y & & y & & \\
\hline
 & 1 & & & \\
\end{array}
$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Si ha

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\
 & & & & \\
y & & y & & \\
\hline
 & 1 & & & \\
\end{array}
$$

Sommiamo e troviamo

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Si ha

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\
 & & & & \\
 & & & & \\
y & & y & & \\
\hline
 & 1 & & & \\
\end{array}
$$

Sommiamo e troviamo

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\
 & & & & \\
 & & & & \\
y & & y & & \\
\hline
 & 1 & y & & \\
\end{array}
$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ripetiamo il procedimento e troviamo

Ripetiamo il procedimento e troviamo

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\
 & & & & \\
y & & y & y^2 & \\
\hline
 & 1 & y & y^2 &
\end{array}
$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ripetiamo il procedimento e troviamo

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\
 & & & & \\
 & & & & \\
y & & y & y^2 & \\
\hline
 & 1 & y & y^2 & \\
\end{array}
$$

e, infine,

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\
 & & & & \\
 & & & & \\
y & & y & y^2 & y^3 \\
\hline
 & 1 & y & y^2 & 0 \\
\end{array}
$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Notiamo che il resto è venuto effettivamente 0.

Notiamo che il resto è venuto effettivamente 0.
A questo punto possiamo scrivere il polinomio quoziente $Q(x)$, leggendo i coefficienti nell'ultima riga.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Notiamo che il resto è venuto effettivamente 0.
A questo punto possiamo scrivere il polinomio quoziente $Q(x)$, leggendo i coefficienti nell'ultima riga. Si ha

$$Q(x) = 1 \cdot x^2 + y \cdot x + y^2.$$

Notiamo che il resto è venuto effettivamente 0.
A questo punto possiamo scrivere il polinomio quoziente $Q(x)$, leggendo i coefficienti nell'ultima riga. Si ha

$$Q(x) = 1 \cdot x^2 + y \cdot x + y^2.$$

Per quanto detto in precedenza si ha

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Notiamo che il resto è venuto effettivamente 0.
A questo punto possiamo scrivere il polinomio quoziente $Q(x)$, leggendo i coefficienti nell'ultima riga. Si ha

$$Q(x) = 1 \cdot x^2 + y \cdot x + y^2.$$

Per quanto detto in precedenza si ha

Scomposizione della Differenza di Cubi

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y),$$

Notiamo che il resto è venuto effettivamente 0.
A questo punto possiamo scrivere il polinomio quoziente $Q(x)$, leggendo i coefficienti nell'ultima riga. Si ha

$$Q(x) = 1 \cdot x^2 + y \cdot x + y^2.$$

Per quanto detto in precedenza si ha

Scomposizione della Differenza di Cubi

$$A(x) = Q(x) \cdot (x - y),$$

cioè

$$x^3 - y^3 = (x^2 + xy + y^2) \cdot (x - y).$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Alla stessa maniera, si può giungere alla scomposizione in fattori della cosiddetta **somma di cubi**, cioè il polinomio

$$x^3 + y^3,$$

Alla stessa maniera, si può giungere alla scomposizione in fattori della cosiddetta **somma di cubi**, cioè il polinomio

$$x^3 + y^3,$$

osservando che, in questo caso si ha $A(-y) = 0$, pertanto il polinomio è divisibile per $(x - (-y)) = (x + y)$, a causa del teorema di Ruffini.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Alla stessa maniera, si può giungere alla scomposizione in fattori della cosiddetta **somma di cubi**, cioè il polinomio

$$x^3 + y^3,$$

osservando che, in questo caso si ha $A(-y) = 0$, pertanto il polinomio è divisibile per $(x - (-y)) = (x + y)$, a causa del teorema di Ruffini. Effettuando la divisione si trova immediatamente che la decomposizione cercata è

Alla stessa maniera, si può giungere alla scomposizione in fattori della cosiddetta **somma di cubi**, cioè il polinomio

$$x^3 + y^3,$$

osservando che, in questo caso si ha $A(-y) = 0$, pertanto il polinomio è divisibile per $(x - (-y)) = (x + y)$, a causa del teorema di Ruffini. Effettuando la divisione si trova immediatamente che la decomposizione cercata è

Scomposizione della Somma di Cubi

$$x^3 + y^3 = (x^2 - xy + y^2) \cdot (x + y).$$

Può essere utile esercizio individuare la scomposizione di binomi notevoli, quali ad esempio

Può essere utile esercizio individuare la scomposizione di binomi notevoli, quali ad esempio

$$x^5 - y^5, \qquad x^5 + y^5, \qquad x^7 - y^7, ...,$$

osservando con attenzione quale sia il valore della variabile x che annulla ciascuno di quei polinomi per essere in grado di individuare l'esatto polinomio $(x - a)$ per cui esso è divisibile.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Può essere utile esercizio individuare la scomposizione di binomi notevoli, quali ad esempio

$$x^5 - y^5, \qquad x^5 + y^5, \qquad x^7 - y^7, ...,$$

osservando con attenzione quale sia il valore della variabile x che annulla ciascuno di quei polinomi per essere in grado di individuare l'esatto polinomio $(x - a)$ per cui esso è divisibile.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ulteriori considerazioni sulle scomposizioni

Ulteriori considerazioni sulle scomposizioni

Il teorema di Ruffini può essere applicato per ottenere la scomposizione in fattori di qualsiasi polinomio $A(x)$ (non necessariamente binomiale).

Ulteriori considerazioni sulle scomposizioni

Il teorema di Ruffini può essere applicato per ottenere la scomposizione in fattori di qualsiasi polinomio $A(x)$ (non necessariamente binomiale).
Alla luce delle considerazioni fatte, è chiaro come risulti sufficiente individuare uno zero del polinomio, vale a dire un valore a da sostituire alla variabile che annulli il polinomio.

Ulteriori considerazioni sulle scomposizioni

Il teorema di Ruffini può essere applicato per ottenere la scomposizione in fattori di qualsiasi polinomio $A(x)$ (non necessariamente binomiale).
Alla luce delle considerazioni fatte, è chiaro come risulti sufficiente individuare uno zero del polinomio, vale a dire un valore a da sostituire alla variabile che annulli il polinomio.
A quel punto sarà immediato concludere che il polinomio è divisibile per $(x - a)$.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ulteriori considerazioni sulle scomposizioni

Il teorema di Ruffini può essere applicato per ottenere la scomposizione in fattori di qualsiasi polinomio $A(x)$ (non necessariamente binomiale).
Alla luce delle considerazioni fatte, è chiaro come risulti sufficiente individuare uno zero del polinomio, vale a dire un valore a da sostituire alla variabile che annulli il polinomio.
A quel punto sarà immediato concludere che il polinomio è divisibile per $(x - a)$.
Calcolando il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $(x - a)$ si individua il secondo fattore della scomposizione.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ulteriori considerazioni sulle scomposizioni

Il teorema di Ruffini può essere applicato per ottenere la scomposizione in fattori di qualsiasi polinomio $A(x)$ (non necessariamente binomiale).
Alla luce delle considerazioni fatte, è chiaro come risulti sufficiente individuare uno zero del polinomio, vale a dire un valore a da sostituire alla variabile che annulli il polinomio.
A quel punto sarà immediato concludere che il polinomio è divisibile per $(x - a)$.
Calcolando il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $(x - a)$ si individua il secondo fattore della scomposizione.
Consideriamo un semplice esempio.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Si vede facilmente che -1 annulla il polinomio:

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Si vede facilmente che -1 annulla il polinomio:

$$A(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Si vede facilmente che -1 annulla il polinomio:

$$A(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Per il teorema di Ruffini il polinomio è divisibile per $(x - (-1)) = (x + 1)$.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Si vede facilmente che -1 annulla il polinomio:

$$A(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Per il teorema di Ruffini il polinomio è divisibile per $(x - (-1)) = (x + 1)$. Mettendo in atto l'algoritmo si trova che il quoziente della divisione è $x^2 - 5x + 6$, da cui

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Si vede facilmente che -1 annulla il polinomio:

$$A(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Per il teorema di Ruffini il polinomio è divisibile per $(x - (-1)) = (x + 1)$. Mettendo in atto l'algoritmo si trova che il quoziente della divisione è $x^2 - 5x + 6$, da cui

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(x + 1).$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Si vede facilmente che -1 annulla il polinomio:

$$A(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Per il teorema di Ruffini il polinomio è divisibile per $(x - (-1)) = (x + 1)$. Mettendo in atto l'algoritmo si trova che il quoziente della divisione è $x^2 - 5x + 6$, da cui

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(x + 1).$$

A questo punto, controllato che 2 annulla il polinomio $x^2 - 5x + 6$, si ha che tale polinomio è divisibile per $(x - 2)$.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Scomporre il polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Si vede facilmente che -1 annulla il polinomio:

$$A(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Per il teorema di Ruffini il polinomio è divisibile per $(x - (-1)) = (x + 1)$.
Mettendo in atto l'algoritmo si trova che il quoziente della divisione è $x^2 - 5x + 6$, da cui

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(x + 1).$$

A questo punto, controllato che 2 annulla il polinomio $x^2 - 5x + 6$, si ha che tale polinomio è divisibile per $(x - 2)$.
Il quoziente della divisione è $(x - 3)$, quindi

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2).$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In definitiva, tornando al polinomio iniziale, si ha

In definitiva, tornando al polinomio iniziale, si ha

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(x + 1) =$$

$$= (x - 3)(x - 2)(x + 1),$$

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In definitiva, tornando al polinomio iniziale, si ha

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(x + 1) =$$

$$= (x - 3)(x - 2)(x + 1),$$

e il polinomio risulta così decomposto nel prodotto di fattori di primo grado.

Michele Scaglia - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA