

Gli assiomi della probabilità

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Un po' di storia

La **teoria della probabilità**, che oggi ha un'importanza enorme in moltissime applicazioni, ha un'origine decisamente *ludica*.

Un po' di storia

La **teoria della probabilità**, che oggi ha un'importanza enorme in moltissime applicazioni, ha un'origine decisamente *ludica*.

Il gioco dei dadi, che esisteva già ai tempi dei Greci antichi, è sempre stato un simbolo degli eventi casuali:

Un po' di storia

La **teoria della probabilità**, che oggi ha un'importanza enorme in moltissime applicazioni, ha un'origine decisamente *ludica*.

Il gioco dei dadi, che esisteva già ai tempi dei Greci antichi, è sempre stato un simbolo degli eventi casuali:

- in latino “dado” si dice *alea*, che dà origine al termine **aleatorio**

Un po' di storia

La **teoria della probabilità**, che oggi ha un'importanza enorme in moltissime applicazioni, ha un'origine decisamente *ludica*.

Il gioco dei dadi, che esisteva già ai tempi dei Greci antichi, è sempre stato un simbolo degli eventi casuali:

- in latino “dado” si dice *alea*, che dà origine al termine **aleatorio**
- in arabo “dado” si dice *zahar*, da cui deriva il nostro termine **azzardo**.
La “zara” è un gioco con tre dadi in voga sin dal Medioevo.

Alcuni contributi fondamentali

1550: “Liber de ludo aleæ” di Girolamo Cardano.

Alcuni contributi fondamentali

1550: “Liber de ludo aleæ” di Girolamo Cardano.

1623: “Sopra le scoperte dei dadi” di Galileo: quesiti dal gioco della zara del tipo: “Perché escono con maggiore frequenza il 10 e l'11 rispetto al 9 o al 12?”

Alcuni contributi fondamentali

1550: “Liber de ludo aleæ” di Girolamo Cardano.

1623: “Sopra le scoperte dei dadi” di Galileo: quesiti dal gioco della zara del tipo: “Perché escono con maggiore frequenza il 10 e l'11 rispetto al 9 o al 12?”

1654: Blaise Pascal risponde a quesiti sulle scommesse al gioco dei dadi posti da Antoine Gombaud, Chevalier de Méré. Uno di questi era: “È conveniente scommettere alla pari l'uscita di un 12, lanciando due dadi per 24 volte?”

Alcuni contributi fondamentali

1550: “Liber de ludo aleæ” di Girolamo Cardano.

1623: “Sopra le scoperte dei dadi” di Galileo: quesiti dal gioco della zara del tipo: “Perché escono con maggiore frequenza il 10 e l'11 rispetto al 9 o al 12?”

1654: Blaise Pascal risponde a quesiti sulle scommesse al gioco dei dadi posti da Antoine Gombaud, Chevalier de Méré. Uno di questi era: “È conveniente scommettere alla pari l'uscita di un 12, lanciando due dadi per 24 volte?”

1713: “Ars conjectandi” di Jacob Bernoulli

1812: “Théorie analytique des probabilités” di Pierre de Laplace

1931: “Sul significato soggettivo della probabilità” di Bruno de Finetti

1933: “Fondamenti della teoria della probabilità” di A. N. Kolmogorov

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

A volte la probabilità viene data in percentuale: in questo caso il numero è compreso tra 0 e 100.

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

A volte la probabilità viene data in percentuale: in questo caso il numero è compreso tra 0 e 100.

Ci sono (almeno) quattro vie per introdurre il concetto di probabilità:

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

A volte la probabilità viene data in percentuale: in questo caso il numero è compreso tra 0 e 100.

Ci sono (almeno) quattro vie per introdurre il concetto di probabilità:

❶ classica

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

A volte la probabilità viene data in percentuale: in questo caso il numero è compreso tra 0 e 100.

Ci sono (almeno) quattro vie per introdurre il concetto di probabilità:

- 1 classica
- 2 frequentista

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

A volte la probabilità viene data in percentuale: in questo caso il numero è compreso tra 0 e 100.

Ci sono (almeno) quattro vie per introdurre il concetto di probabilità:

- 1 classica
- 2 frequentista
- 3 soggettiva

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

A volte la probabilità viene data in percentuale: in questo caso il numero è compreso tra 0 e 100.

Ci sono (almeno) quattro vie per introdurre il concetto di probabilità:

- 1 classica
- 2 frequentista
- 3 soggettiva
- 4 assiomatica

Teorie della probabilità

In generale dire qual è la probabilità di un evento significa assegnare un numero (compreso tra 0 e 1) a quell'evento, in modo che i numeri più vicini a 1 corrispondano agli eventi più probabili.

A volte la probabilità viene data in percentuale: in questo caso il numero è compreso tra 0 e 100.

Ci sono (almeno) quattro vie per introdurre il concetto di probabilità:

- 1 classica
- 2 frequentista
- 3 soggettiva
- 4 assiomatica

In realtà l'ultima comprende tutte le altre, ed è il modo più “matematico” di trattare la probabilità.

Spazio degli eventi

Definizione

Denotiamo con S lo **spazio campionario**, cioè l'insieme dei possibili risultati di un esperimento.

Spazio degli eventi

Definizione

Denotiamo con S lo **spazio campionario**, cioè l'insieme dei possibili risultati di un esperimento.

L'insieme dei suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(S)$, è lo **spazio degli eventi** E .

Spazio degli eventi

Definizione

Denotiamo con S lo **spazio campionario**, cioè l'insieme dei possibili risultati di un esperimento.

L'insieme dei suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(S)$, è lo **spazio degli eventi** E .

Gli elementi di S sono anche detti *eventi elementari*.

Spazio degli eventi

Definizione

Denotiamo con S lo **spazio campionario**, cioè l'insieme dei possibili risultati di un esperimento.

L'insieme dei suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(S)$, è lo **spazio degli eventi** E .

Gli elementi di S sono anche detti *eventi elementari*.

Quindi un evento elementare è uno dei possibili esiti, mentre un evento è un *insieme* di esiti possibili.

Spazio degli eventi

Definizione

Denotiamo con S lo **spazio campionario**, cioè l'insieme dei possibili risultati di un esperimento.

L'insieme dei suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(S)$, è lo **spazio degli eventi** E .

Gli elementi di S sono anche detti *eventi elementari*.

Quindi un evento elementare è uno dei possibili esiti, mentre un evento è un *insieme* di esiti possibili.

Sugli eventi potremo fare le operazioni della teoria degli insiemi: unione, intersezione, complemento. . .

Spazio degli eventi

Definizione

Denotiamo con S lo **spazio campionario**, cioè l'insieme dei possibili risultati di un esperimento.

L'insieme dei suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(S)$, è lo **spazio degli eventi** E .

Gli elementi di S sono anche detti *eventi elementari*.

Quindi un evento elementare è uno dei possibili esiti, mentre un evento è un *insieme* di esiti possibili.

Sugli eventi potremo fare le operazioni della teoria degli insiemi: unione, intersezione, complemento. . .

Se lo spazio campionario è formato da n eventi elementari, la teoria degli insiemi ci insegna che lo spazio degli eventi è formato da 2^n insiemi.

Spazio degli eventi

Definizione

Denotiamo con S lo **spazio campionario**, cioè l'insieme dei possibili risultati di un esperimento.

L'insieme dei suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(S)$, è lo **spazio degli eventi** E .

Gli elementi di S sono anche detti *eventi elementari*.

Quindi un evento elementare è uno dei possibili esiti, mentre un evento è un *insieme* di esiti possibili.

Sugli eventi potremo fare le operazioni della teoria degli insiemi: unione, intersezione, complemento. . .

Se lo spazio campionario è formato da n eventi elementari, la teoria degli insiemi ci insegna che lo spazio degli eventi è formato da 2^n insiemi.

Ci limiteremo a considerare spazi campionari fatti da un numero **finito** di elementi: la teoria della probabilità su insiemi infiniti è molto più sofisticata.

Esempi

Esempio. Lancio di una moneta:

$$S = \{T, C\},$$

Esempi

Esempio. Lancio di una moneta:

$$S = \{T, C\}, \quad E = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}.$$

Esempi

Esempio. Lancio di una moneta:

$$S = \{T, C\}, \quad E = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}.$$

Esempio. Lancio di una moneta due volte (distinguendo i due lanci):

$$S = \{TT, TC, CT, CC\},$$

Esempi

Esempio. Lancio di una moneta:

$$S = \{T, C\}, \quad E = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}.$$

Esempio. Lancio di una moneta due volte (distinguendo i due lanci):

$$\begin{aligned} S = \{TT, TC, CT, CC\}, \quad E = \{ & \emptyset, \{TT\}, \{TC\}, \{CT\}, \{CC\}, \\ & \{TT, TC\}, \{TT, CT\}, \{TT, CC\}, \{TC, CT\}, \{TC, CC\}, \{CT, CC\}, \\ & \{TT, TC, CT\}, \{TT, TC, CC\}, \{TT, CT, CC\}, \{TC, CT, CC\}, \\ & \{TT, TC, CT, CC\} \}. \end{aligned}$$

Esempi

Esempio. Lancio di una moneta:

$$S = \{T, C\}, \quad E = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}.$$

Esempio. Lancio di una moneta due volte (distinguendo i due lanci):

$$\begin{aligned} S = \{TT, TC, CT, CC\}, \quad E = \{ &\emptyset, \{TT\}, \{TC\}, \{CT\}, \{CC\}, \\ &\{TT, TC\}, \{TT, CT\}, \{TT, CC\}, \{TC, CT\}, \{TC, CC\}, \{CT, CC\}, \\ &\{TT, TC, CT\}, \{TT, TC, CC\}, \{TT, CT, CC\}, \{TC, CT, CC\}, \\ &\{TT, TC, CT, CC\}\}. \end{aligned}$$

Esempio. Lancio di due monete (senza distinzione):

$$S = \{TT, TC, CC\},$$

Esempi

Esempio. Lancio di una moneta:

$$S = \{T, C\}, \quad E = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}.$$

Esempio. Lancio di una moneta due volte (distinguendo i due lanci):

$$\begin{aligned} S = \{TT, TC, CT, CC\}, \quad E = \{ &\emptyset, \{TT\}, \{TC\}, \{CT\}, \{CC\}, \\ &\{TT, TC\}, \{TT, CT\}, \{TT, CC\}, \{TC, CT\}, \{TC, CC\}, \{CT, CC\}, \\ &\{TT, TC, CT\}, \{TT, TC, CC\}, \{TT, CT, CC\}, \{TC, CT, CC\}, \\ &\{TT, TC, CT, CC\}\}. \end{aligned}$$

Esempio. Lancio di due monete (senza distinzione):

$$\begin{aligned} S = \{TT, TC, CC\}, \quad E = \{ &\emptyset, \{TT\}, \{TC\}, \{CC\}, \{TT, TC\}, \{TT, CC\}, \\ &\{TC, CC\}, \{TT, TC, CC\}\}. \end{aligned}$$

Esempi

Esempio. Lancio di un dado a 6 facce:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

Esempi

Esempio. Lancio di un dado a 6 facce:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{\emptyset, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Esempi

Esempio. Lancio di un dado a 6 facce:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{\emptyset, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Lo spazio degli eventi E ha $2^6 = 64$ elementi.

Esempi

Esempio. Lancio di un dado a 6 facce:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{\emptyset, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Lo spazio degli eventi E ha $2^6 = 64$ elementi.

Esempio. Lancio di due dadi a 6 facce (contando l'ordine):

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\},$$

Esempi

Esempio. Lancio di un dado a 6 facce:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{\emptyset, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Lo spazio degli eventi E ha $2^6 = 64$ elementi.

Esempio. Lancio di due dadi a 6 facce (contando l'ordine):

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}, \quad E = \{\emptyset, \dots, S\}.$$

Esempi

Esempio. Lancio di un dado a 6 facce:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{\emptyset, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Lo spazio degli eventi E ha $2^6 = 64$ elementi.

Esempio. Lancio di due dadi a 6 facce (contando l'ordine):

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}, \quad E = \{\emptyset, \dots, S\}.$$

Stavolta E ha $2^{36} = 68\,719\,476\,736$ elementi!

Definizione assiomatica di probabilità

Partiamo dalla definizione **assiomatica** di probabilità: essa è stata introdotta dal matematico russo Andrej Kolmogorov attorno al 1930.

Definizione assiomatica di probabilità

Partiamo dalla definizione **assiomatica** di probabilità: essa è stata introdotta dal matematico russo Andrej Kolmogorov attorno al 1930. La probabilità è una funzione che ad ogni evento A associa un numero in modo che:



Definizione assiomatica di probabilità

Partiamo dalla definizione **assiomatica** di probabilità: essa è stata introdotta dal matematico russo Andrej Kolmogorov attorno al 1930. La probabilità è una funzione che ad ogni evento A associa un numero in modo che:

$$1 \quad p(A) \geq 0 \quad \text{per ogni } A \subset S$$

Definizione assiomatica di probabilità

Partiamo dalla definizione **assiomatica** di probabilità: essa è stata introdotta dal matematico russo Andrej Kolmogorov attorno al 1930. La probabilità è una funzione che ad ogni evento A associa un numero in modo che:

- 1 $p(A) \geq 0$ per ogni $A \subset S$
- 2 $p(S) = 1$

Definizione assiomatica di probabilità

Partiamo dalla definizione **assiomatica** di probabilità: essa è stata introdotta dal matematico russo Andrej Kolmogorov attorno al 1930. La probabilità è una funzione che ad ogni evento A associa un numero in modo che:

- 1 $p(A) \geq 0$ per ogni $A \subset S$
- 2 $p(S) = 1$
- 3 $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se A, B disgiunti

Definizione assiomatica di probabilità

Partiamo dalla definizione **assiomatica** di probabilità: essa è stata introdotta dal matematico russo Andrej Kolmogorov attorno al 1930. La probabilità è una funzione che ad ogni evento A associa un numero in modo che:

- ❶ $p(A) \geq 0$ per ogni $A \subset S$
- ❷ $p(S) = 1$
- ❸ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se A, B disgiunti

Il primo e il secondo assioma affermano l'idea intuitiva che abbiamo di probabilità: un evento non può avere probabilità negativa di accadere (cosa che non avrebbe senso), mentre l'evento S , che comprende tutti i casi possibili, avviene **certamente**, e quindi ha probabilità 1.

Definizione assiomatica di probabilità

Partiamo dalla definizione **assiomatica** di probabilità: essa è stata introdotta dal matematico russo Andrej Kolmogorov attorno al 1930. La probabilità è una funzione che ad ogni evento A associa un numero in modo che:

- ❶ $p(A) \geq 0$ per ogni $A \subset S$
- ❷ $p(S) = 1$
- ❸ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se A, B disgiunti

Il primo e il secondo assioma affermano l'idea intuitiva che abbiamo di probabilità: un evento non può avere probabilità negativa di accadere (cosa che non avrebbe senso), mentre l'evento S , che comprende tutti i casi possibili, avviene **certamente**, e quindi ha probabilità 1.

Il terzo assioma stabilisce la proprietà di **additività** della probabilità: se due eventi sono disgiunti, la probabilità che avvenga uno oppure l'altro è la somma delle due probabilità distinte.

Formule generali

Abbiamo visto che i tre assiomi di Kolmogorov sono molto intuitivi e ragionevoli. Eppure sono sufficienti a dimostrare un numero notevole di teoremi sulla probabilità.

Formule generali

Abbiamo visto che i tre assiomi di Kolmogorov sono molto intuitivi e ragionevoli. Eppure sono sufficienti a dimostrare un numero notevole di teoremi sulla probabilità.

Ad esempio, si può dimostrare che

$$p(A) \leq p(B) \quad \text{se } A \subseteq B.$$

Quindi in particolare la probabilità è sempre un numero compreso tra 0 e 1.

Formule generali

Abbiamo visto che i tre assiomi di Kolmogorov sono molto intuitivi e ragionevoli. Eppure sono sufficienti a dimostrare un numero notevole di teoremi sulla probabilità.

Ad esempio, si può dimostrare che

$$p(A) \leq p(B) \quad \text{se } A \subseteq B.$$

Quindi in particolare la probabilità è sempre un numero compreso tra 0 e 1. Inoltre si può mostrare che

- $p(\emptyset) = 0,$

Formule generali

Abbiamo visto che i tre assiomi di Kolmogorov sono molto intuitivi e ragionevoli. Eppure sono sufficienti a dimostrare un numero notevole di teoremi sulla probabilità.

Ad esempio, si può dimostrare che

$$p(A) \leq p(B) \quad \text{se } A \subseteq B.$$

Quindi in particolare la probabilità è sempre un numero compreso tra 0 e 1. Inoltre si può mostrare che

- $p(\emptyset) = 0$,
- $p(S \setminus A) = 1 - p(A)$,

Formule generali

Abbiamo visto che i tre assiomi di Kolmogorov sono molto intuitivi e ragionevoli. Eppure sono sufficienti a dimostrare un numero notevole di teoremi sulla probabilità.

Ad esempio, si può dimostrare che

$$p(A) \leq p(B) \quad \text{se } A \subseteq B.$$

Quindi in particolare la probabilità è sempre un numero compreso tra 0 e 1. Inoltre si può mostrare che

- $p(\emptyset) = 0$,
- $p(S \setminus A) = 1 - p(A)$,
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Formule generali

Abbiamo visto che i tre assiomi di Kolmogorov sono molto intuitivi e ragionevoli. Eppure sono sufficienti a dimostrare un numero notevole di teoremi sulla probabilità.

Ad esempio, si può dimostrare che

$$p(A) \leq p(B) \quad \text{se } A \subseteq B.$$

Quindi in particolare la probabilità è sempre un numero compreso tra 0 e 1. Inoltre si può mostrare che

- $p(\emptyset) = 0$,
- $p(S \setminus A) = 1 - p(A)$,
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Esempio: se nel lancio di un dado la probabilità che esca 4 è $1/6$, la probabilità che non esca 4 è

$$p(\text{non } 4) = 1 - p(4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Come assegnare la probabilità?

La teoria di Kolmogorov è molto generale e ci dà delle regole precise a cui ogni definizione “ragionevole” di probabilità deve sottostare.

Come assegnare la probabilità?

La teoria di Kolmogorov è molto generale e ci dà delle regole precise a cui ogni definizione “ragionevole” di probabilità deve sottostare.

Tuttavia, proprio per la sua generalità, non ci dice operativamente in che modo possiamo trovare la probabilità di un evento. Per fare questo abbiamo bisogno di metterci in casi particolari, facendo delle ipotesi aggiuntive.

Come assegnare la probabilità?

La teoria di Kolmogorov è molto generale e ci dà delle regole precise a cui ogni definizione “ragionevole” di probabilità deve sottostare.

Tuttavia, proprio per la sua generalità, non ci dice operativamente in che modo possiamo trovare la probabilità di un evento. Per fare questo abbiamo bisogno di metterci in casi particolari, facendo delle ipotesi aggiuntive.

Vedremo ora alcuni tra i modi più usati per assegnare la probabilità agli eventi: il modo classico, frequentista, soggettivo.

Definizione classica di probabilità

Questa definizione, che è la più usata nel caso di esperimenti *ripetibili* (condizione tipica dei giochi d'azzardo), si basa sull'ipotesi di **probabilità uniforme**:

tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità.

Definizione classica di probabilità

Questa definizione, che è la più usata nel caso di esperimenti *ripetibili* (condizione tipica dei giochi d'azzardo), si basa sull'ipotesi di **probabilità uniforme**:

tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità.

In questo caso la probabilità di un evento è data da

$$p = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

Definizione classica di probabilità

Questa definizione, che è la più usata nel caso di esperimenti *ripetibili* (condizione tipica dei giochi d'azzardo), si basa sull'ipotesi di **probabilità uniforme**:

tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità.

In questo caso la probabilità di un evento è data da

$$p = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

Esempio. Lancio di una moneta:

$$p(\{T\}) = p(\{C\}) = \frac{1}{2}.$$

Esempio. Lancio di un dado:

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Esempi

Esempio. Lancio di un dado:

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Qual è la probabilità p che esca un numero pari?

Esempi

Esempio. Lancio di un dado:

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Qual è la probabilità p che esca un numero pari?

$$p = p(\{2, 4, 6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Esempi

Esempio. Lancio di un dado:

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Qual è la probabilità p che esca un numero pari?

$$p = p(\{2, 4, 6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Qual è la probabilità che non esca un multiplo di 3?

Esempi

Esempio. Lancio di un dado:

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Qual è la probabilità p che esca un numero pari?

$$p = p(\{2, 4, 6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Qual è la probabilità che non esca un multiplo di 3?

$$p(\{3, 6\}) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Esempi

Esempio. Lancio di due dadi (distinti):

$$p(1, 1) = p(1, 2) = p(1, 3) = \cdots = p(6, 4) = p(6, 5) = p(6, 6) = \frac{1}{36}$$

Esempi

Esempio. Lancio di due dadi (distinti):

$$p(1, 1) = p(1, 2) = p(1, 3) = \cdots = p(6, 4) = p(6, 5) = p(6, 6) = \frac{1}{36}$$

Qual è la probabilità p che la somma di un lancio faccia 7?

Esempi

Esempio. Lancio di due dadi (distinti):

$$p(1, 1) = p(1, 2) = p(1, 3) = \cdots = p(6, 4) = p(6, 5) = p(6, 6) = \frac{1}{36}$$

Qual è la probabilità p che la somma di un lancio faccia 7?

$$p = p\left((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Esempi

Esempio. Lancio di due dadi (distinti):

$$p(1, 1) = p(1, 2) = p(1, 3) = \cdots = p(6, 4) = p(6, 5) = p(6, 6) = \frac{1}{36}$$

Qual è la probabilità p che la somma di un lancio faccia 7?

$$p = p\left((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Qual è la probabilità p che la somma non sia un multiplo di 3?

Esempi

Esempio. Lancio di due dadi (distinti):

$$p(1, 1) = p(1, 2) = p(1, 3) = \cdots = p(6, 4) = p(6, 5) = p(6, 6) = \frac{1}{36}$$

Qual è la probabilità p che la somma di un lancio faccia 7?

$$p = p\left((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Qual è la probabilità p che la somma non sia un multiplo di 3?

$$p\left((1, 2), (1, 5), \dots, (5, 4), (6, 3), (6, 6)\right) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{3}.$$

Eventi indipendenti

Definizione

Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Eventi indipendenti

Definizione

Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Esempio: nel lancio di una moneta, qual è la probabilità p di ottenere almeno una volta testa in tre lanci?

Eventi indipendenti

Definizione

Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Esempio: nel lancio di una moneta, qual è la probabilità p di ottenere almeno una volta testa in tre lanci?

Poiché i lanci sono tutti indipendenti l'uno dall'altro, si ha

$$p(\{\text{nessuna testa in tre lanci}\}) = p(C) \cdot p(C) \cdot p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Quindi si ha

$$p = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Il conto di Pascal

Una domanda del Chevalier de Méré a Pascal era la seguente: “qual è la probabilità che esca (6,6) in 24 lanci?”

Il conto di Pascal

Una domanda del Chevalier de Méré a Pascal era la seguente: “qual è la probabilità che esca (6,6) in 24 lanci?”

Anche qui consideriamo il fatto che i lanci dei dadi sono tutti eventi indipendenti, quindi possiamo fare il prodotto delle probabilità:

$$p(\{\text{nessun (6,6) in 24 lanci}\}) = (35/36)^{24} = 0,50859612.$$

Il conto di Pascal

Una domanda del Chevalier de Méré a Pascal era la seguente: “qual è la probabilità che esca (6,6) in 24 lanci?”

Anche qui consideriamo il fatto che i lanci dei dadi sono tutti eventi indipendenti, quindi possiamo fare il prodotto delle probabilità:

$$p(\{\text{nessun (6,6) in 24 lanci}\}) = (35/36)^{24} = 0,50859612.$$

Quindi si ha

$$p(\{\text{almeno un (6,6) in 24 lanci}\}) = 1 - (35/36)^{24} = 0,49140388.$$

Il conto di Pascal

Una domanda del Chevalier de Méré a Pascal era la seguente: “qual è la probabilità che esca (6,6) in 24 lanci?”

Anche qui consideriamo il fatto che i lanci dei dadi sono tutti eventi indipendenti, quindi possiamo fare il prodotto delle probabilità:

$$p(\{\text{nessun (6,6) in 24 lanci}\}) = (35/36)^{24} = 0,50859612.$$

Quindi si ha

$$p(\{\text{almeno un (6,6) in 24 lanci}\}) = 1 - (35/36)^{24} = 0,49140388.$$

Convien scommettere che **non esca** la coppia di 6, piuttosto che il contrario.

Eventi (non troppo) improbabili

Ci sono 5 persone, qual è la probabilità che ce ne siano 2 con lo stesso segno zodiacale?

Eventi (non troppo) improbabili

Ci sono 5 persone, qual è la probabilità che ce ne siano 2 con lo stesso segno zodiacale?

Calcoliamo la probabilità che i segni zodiacali siano tutti distinti: la prima persona può avere il segno che vuole, le altre devono averlo diverso dalla prima e diverso tra loro, quindi

$$1 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{55}{144}.$$

Eventi (non troppo) improbabili

Ci sono 5 persone, qual è la probabilità che ce ne siano 2 con lo stesso segno zodiacale?

Calcoliamo la probabilità che i segni zodiacali siano tutti distinti: la prima persona può avere il segno che vuole, le altre devono averlo diverso dalla prima e diverso tra loro, quindi

$$1 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{55}{144}.$$

La probabilità che due persone siano dello stesso segno è

$$p = 1 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144} = 0,618.$$

Eventi (non troppo) improbabili

Tra 23 persone, qual è la probabilità che ce ne siano almeno due con lo stesso compleanno?

Eventi (non troppo) improbabili

Tra 23 persone, qual è la probabilità che ce ne siano almeno due con lo stesso compleanno?

Procediamo come prima, escludendo i nati nei giorni bisestili, per non appesantire troppo il calcolo. Tutti i compleanni sono diversi con probabilità

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}} = 0,4927 ,$$

Eventi (non troppo) improbabili

Tra 23 persone, qual è la probabilità che ce ne siano almeno due con lo stesso compleanno?

Procediamo come prima, escludendo i nati nei giorni bisestili, per non appesantire troppo il calcolo. Tutti i compleanni sono diversi con probabilità

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}} = 0,4927,$$

quindi si hanno almeno due compleanni uguali con probabilità

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}} = 0,5073.$$

Eventi (non troppo) improbabili

Tra 23 persone, qual è la probabilità che ce ne siano almeno due con lo stesso compleanno?

Procediamo come prima, escludendo i nati nei giorni bisestili, per non appesantire troppo il calcolo. Tutti i compleanni sono diversi con probabilità

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}} = 0,4927,$$

quindi si hanno almeno due compleanni uguali con probabilità

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}} = 0,5073.$$

In una classe di almeno 23 persone, è più probabile che due compiano gli anni lo stesso giorno, piuttosto che il contrario.

Il calcolo combinatorio

Nella definizione classica di probabilità bisogna quindi riuscire a capire il *numero degli eventi*, sia di quelli favorevoli che di tutti quelli possibili. Spesso è utile usare il **calcolo combinatorio**, che è un insieme di formule e regole per contare velocemente, sfruttando la definizione di permutazioni, combinazioni, disposizioni.

Il calcolo combinatorio

Nella definizione classica di probabilità bisogna quindi riuscire a capire il *numero degli eventi*, sia di quelli favorevoli che di tutti quelli possibili. Spesso è utile usare il **calcolo combinatorio**, che è un insieme di formule e regole per contare velocemente, sfruttando la definizione di permutazioni, combinazioni, disposizioni.

Ad esempio, per sapere qual è la probabilità di avere un tris servito in una partita a poker, si usa il calcolo combinatorio. Noi però non affronteremo questo argomento.

Definizione frequentista di probabilità

Ci sono situazioni, ad esempio quelle che riguardano le previsioni del tempo, in cui non è possibile fare l'ipotesi della probabilità uniforme.

Definizione frequentista di probabilità

Ci sono situazioni, ad esempio quelle che riguardano le previsioni del tempo, in cui non è possibile fare l'ipotesi della probabilità uniforme. Infatti, non è detto che l'evento elementare {piove} abbia la stessa probabilità di {c'è il sole}.

Definizione frequentista di probabilità

Ci sono situazioni, ad esempio quelle che riguardano le previsioni del tempo, in cui non è possibile fare l'ipotesi della probabilità uniforme. Infatti, non è detto che l'evento elementare {piove} abbia la stessa probabilità di {c'è il sole}.

In questo caso si può usare un approccio diverso, detto **frequentista**, in cui si ripete l'esperimento N volte. Indicando con N_A il numero di volte in cui l'evento A si è verificato, si definisce:

Definizione frequentista di probabilità

Ci sono situazioni, ad esempio quelle che riguardano le previsioni del tempo, in cui non è possibile fare l'ipotesi della probabilità uniforme. Infatti, non è detto che l'evento elementare {piove} abbia la stessa probabilità di {c'è il sole}.

In questo caso si può usare un approccio diverso, detto **frequentista**, in cui si ripete l'esperimento N volte. Indicando con N_A il numero di volte in cui l'evento A si è verificato, si definisce:

$$p(A) := \frac{N_A}{N}.$$

Definizione frequentista di probabilità

Ci sono situazioni, ad esempio quelle che riguardano le previsioni del tempo, in cui non è possibile fare l'ipotesi della probabilità uniforme. Infatti, non è detto che l'evento elementare {piove} abbia la stessa probabilità di {c'è il sole}.

In questo caso si può usare un approccio diverso, detto **frequentista**, in cui si ripete l'esperimento N volte. Indicando con N_A il numero di volte in cui l'evento A si è verificato, si definisce:

$$p(A) := \frac{N_A}{N}.$$

Questa definizione ha senso per un numero N grande di ripetizioni, e diventa sempre più precisa per N sempre più grande.

Definizione frequentista di probabilità

Ci sono situazioni, ad esempio quelle che riguardano le previsioni del tempo, in cui non è possibile fare l'ipotesi della probabilità uniforme. Infatti, non è detto che l'evento elementare {piove} abbia la stessa probabilità di {c'è il sole}.

In questo caso si può usare un approccio diverso, detto **frequentista**, in cui si ripete l'esperimento N volte. Indicando con N_A il numero di volte in cui l'evento A si è verificato, si definisce:

$$p(A) := \frac{N_A}{N}.$$

Questa definizione ha senso per un numero N grande di ripetizioni, e diventa sempre più precisa per N sempre più grande.

Esempio: se negli ultimi 30 anni a Brescia ha nevicato 8 volte a Capodanno, la probabilità (frequentista) che nevichi a Capodanno a Brescia è

Definizione frequentista di probabilità

Ci sono situazioni, ad esempio quelle che riguardano le previsioni del tempo, in cui non è possibile fare l'ipotesi della probabilità uniforme. Infatti, non è detto che l'evento elementare {piove} abbia la stessa probabilità di {c'è il sole}.

In questo caso si può usare un approccio diverso, detto **frequentista**, in cui si ripete l'esperimento N volte. Indicando con N_A il numero di volte in cui l'evento A si è verificato, si definisce:

$$p(A) := \frac{N_A}{N}.$$

Questa definizione ha senso per un numero N grande di ripetizioni, e diventa sempre più precisa per N sempre più grande.

Esempio: se negli ultimi 30 anni a Brescia ha nevicato 8 volte a Capodanno, la probabilità (frequentista) che nevichi a Capodanno a Brescia è

$$p = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} = 0,2\bar{6}.$$

Definizione soggettiva di probabilità

Ma se l'esperimento non è ripetibile? Ad esempio: come si può definire la probabilità che domani l'indice di Borsa a Milano cresca?

Definizione soggettiva di probabilità

Ma se l'esperimento non è ripetibile? Ad esempio: come si può definire la probabilità che domani l'indice di Borsa a Milano cresca?

Qui entra l'idea di Bruno de Finetti della definizione **soggettiva**, ovvero:

quanto sono disposto a scommettere che un evento si realizzi?

Definizione soggettiva di probabilità

Ma se l'esperimento non è ripetibile? Ad esempio: come si può definire la probabilità che domani l'indice di Borsa a Milano cresca?

Qui entra l'idea di Bruno de Finetti della definizione **soggettiva**, ovvero:

quanto sono disposto a scommettere che un evento si realizzi?

Esempio: scommetto 3 contro 1 che l'Italia vincerà i prossimi Mondiali di calcio.

Definizione soggettiva di probabilità

Ma se l'esperimento non è ripetibile? Ad esempio: come si può definire la probabilità che domani l'indice di Borsa a Milano cresca?

Qui entra l'idea di Bruno de Finetti della definizione **soggettiva**, ovvero:

quanto sono disposto a scommettere che un evento si realizzi?

Esempio: scommetto 3 contro 1 che l'Italia vincerà i prossimi Mondiali di calcio.

Questo vuol dire che io ritengo che la probabilità sia

$$p = \frac{\text{puntata sul realizzarsi dell'evento}}{\text{somma delle puntate}} = \frac{3}{4}.$$

Definizione soggettiva di probabilità

In altre parole, se io sono disposto a pagare una somma m per ricevere una somma M al realizzarsi dell'evento A , vuol dire che la probabilità (soggettiva) dell'evento A è

$$p(A) = \frac{m}{M}.$$

Definizione soggettiva di probabilità

In altre parole, se io sono disposto a pagare una somma m per ricevere una somma M al realizzarsi dell'evento A , vuol dire che la probabilità (soggettiva) dell'evento A è

$$p(A) = \frac{m}{M}.$$

In questo senso, le “quote” dei *bookmakers* sono esattamente l'inverso della probabilità che loro attribuiscono all'evento.

Definizione soggettiva di probabilità

In altre parole, se io sono disposto a pagare una somma m per ricevere una somma M al realizzarsi dell'evento A , vuol dire che la probabilità (soggettiva) dell'evento A è

$$p(A) = \frac{m}{M}.$$

In questo senso, le “quote” dei *bookmakers* sono esattamente l'inverso della probabilità che loro attribuiscono all'evento.

Esempio: per la partita di calcio Inter-Bari le quote sono:

1,35 vittoria Inter, 4,25 pareggio, 9,5 vittoria Bari.

Definizione soggettiva di probabilità

In altre parole, se io sono disposto a pagare una somma m per ricevere una somma M al realizzarsi dell'evento A , vuol dire che la probabilità (soggettiva) dell'evento A è

$$p(A) = \frac{m}{M}.$$

In questo senso, le “quote” dei *bookmakers* sono esattamente l'inverso della probabilità che loro attribuiscono all'evento.

Esempio: per la partita di calcio Inter-Bari le quote sono:

1,35 vittoria Inter,	4,25 pareggio,	9,5 vittoria Bari.
----------------------	----------------	--------------------

Quindi le probabilità (soggettive dell'agenzia di scommesse) sono circa:

0,74 vittoria Inter,	0,24 pareggio,	0,11 vittoria Bari
----------------------	----------------	--------------------

Definizione soggettiva di probabilità

In altre parole, se io sono disposto a pagare una somma m per ricevere una somma M al realizzarsi dell'evento A , vuol dire che la probabilità (soggettiva) dell'evento A è

$$p(A) = \frac{m}{M}.$$

In questo senso, le “quote” dei *bookmakers* sono esattamente l'inverso della probabilità che loro attribuiscono all'evento.

Esempio: per la partita di calcio Inter-Bari le quote sono:

1,35 vittoria Inter,	4,25 pareggio,	9,5 vittoria Bari.
----------------------	----------------	--------------------

Quindi le probabilità (soggettive dell'agenzia di scommesse) sono circa:

0,74 vittoria Inter,	0,24 pareggio,	0,11 vittoria Bari
----------------------	----------------	--------------------

La somma *dovrebbe* essere 1, ma in realtà è leggermente più alta, perché le agenzie di scommesse hanno un margine di guadagno.

Il gioco del Lotto

Per chiudere, calcoliamo alcune probabilità, nell'ambito della definizione classica, riguardanti il gioco del Lotto.

Il gioco del Lotto

Per chiudere, calcoliamo alcune probabilità, nell'ambito della definizione classica, riguardanti il gioco del Lotto.

Con questi calcoli speriamo di insegnare che **non conviene** giocare al Lotto, per nessun motivo (che non sia eventualmente il puro divertimento).

Il gioco del Lotto

Per chiudere, calcoliamo alcune probabilità, nell'ambito della definizione classica, riguardanti il gioco del Lotto.

Con questi calcoli speriamo di insegnare che **non conviene** giocare al Lotto, per nessun motivo (che non sia eventualmente il puro divertimento). Fissiamo una ruota, ad esempio quella di Venezia. Ricordiamo che in una ruota vengono estratti cinque numeri distinti tra 1 e 90.

Il gioco del Lotto

Per chiudere, calcoliamo alcune probabilità, nell'ambito della definizione classica, riguardanti il gioco del Lotto.

Con questi calcoli speriamo di insegnare che **non conviene** giocare al Lotto, per nessun motivo (che non sia eventualmente il puro divertimento). Fissiamo una ruota, ad esempio quella di Venezia. Ricordiamo che in una ruota vengono estratti cinque numeri distinti tra 1 e 90.

Probabilità che esca un certo numero, ad esempio il 53:

$$p(53) = \frac{1}{90} = \frac{1}{18} = 0,0\bar{5}.$$

Il gioco del Lotto

Per chiudere, calcoliamo alcune probabilità, nell'ambito della definizione classica, riguardanti il gioco del Lotto.

Con questi calcoli speriamo di insegnare che **non conviene** giocare al Lotto, per nessun motivo (che non sia eventualmente il puro divertimento). Fissiamo una ruota, ad esempio quella di Venezia. Ricordiamo che in una ruota vengono estratti cinque numeri distinti tra 1 e 90.

Probabilità che esca un certo numero, ad esempio il 53:

$$p(53) = \frac{1}{90} = \frac{1}{18} = 0,0\bar{5}.$$

Probabilità di fare ambo:

$$\left(\frac{1}{18}\right)^2 = \frac{1}{324} = 0,003.$$

Il gioco del Lotto

Per chiudere, calcoliamo alcune probabilità, nell'ambito della definizione classica, riguardanti il gioco del Lotto.

Con questi calcoli speriamo di insegnare che **non conviene** giocare al Lotto, per nessun motivo (che non sia eventualmente il puro divertimento). Fissiamo una ruota, ad esempio quella di Venezia. Ricordiamo che in una ruota vengono estratti cinque numeri distinti tra 1 e 90.

Probabilità che esca un certo numero, ad esempio il 53:

$$p(53) = \frac{1}{90} = \frac{1}{18} = 0,0\bar{5}.$$

Probabilità di fare ambo:

$$\left(\frac{1}{18}\right)^2 = \frac{1}{324} = 0,003.$$

Probabilità di fare terno:

$$\left(\frac{1}{18}\right)^3 = \frac{1}{5832} = 0,0017.$$

I numeri ritardatari

Qual è la probabilità che **non esca** il 53?

$$p(\text{non } 53) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} = 0,9\bar{4}.$$

I numeri ritardatari

Qual è la probabilità che **non esca** il 53?

$$p(\text{non } 53) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} = 0,9\bar{4}.$$

Qual è la probabilità che non esca il 53 se non è uscito la volta precedente?

I numeri ritardatari

Qual è la probabilità che **non esca** il 53?

$$p(\text{non } 53) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} = 0,9\bar{4}.$$

Qual è la probabilità che non esca il 53 se non è uscito la volta precedente?
Non c'è nessuna correlazione fra un'estrazione del lotto e la precedente, altrimenti saremmo costretti a credere che la ruota del Lotto abbia la possibilità di *memorizzare* gli eventi!

I numeri ritardatari

Qual è la probabilità che **non esca** il 53?

$$p(\text{non } 53) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} = 0,9\bar{4}.$$

Qual è la probabilità che non esca il 53 se non è uscito la volta precedente? Non c'è nessuna correlazione fra un'estrazione del lotto e la precedente, altrimenti saremmo costretti a credere che la ruota del Lotto abbia la possibilità di *memorizzare* gli eventi!

Quindi gli eventi sono indipendenti. La probabilità che il numero non esca un'altra volta è ancora $p = 17/18$.

Non c'è alcun vantaggio a giocare sui numeri ritardatari.

Ancora sui numeri ritardatari

Qualche anno fa il numero 53 non uscì sulla ruota di Venezia per 182 estrazioni consecutive.

Ancora sui numeri ritardatari

Qualche anno fa il numero 53 non uscì sulla ruota di Venezia per 182 estrazioni consecutive.

Qual è la probabilità che non esca il 53 per 182 volte consecutive?

Ancora sui numeri ritardatari

Qualche anno fa il numero 53 non uscì sulla ruota di Venezia per 182 estrazioni consecutive.

Qual è la probabilità che non esca il 53 per 182 volte consecutive?

$$p = \underbrace{\frac{17}{18} \cdot \dots \cdot \frac{17}{18}}_{182 \text{ volte}} = \left(\frac{17}{18}\right)^{182} = 0,00003034644$$

Quindi effettivamente la probabilità è bassa.

Ancora sui numeri ritardatari

Qualche anno fa il numero 53 non uscì sulla ruota di Venezia per 182 estrazioni consecutive.

Qual è la probabilità che non esca il 53 per 182 volte consecutive?

$$p = \underbrace{\frac{17}{18} \cdot \dots \cdot \frac{17}{18}}_{182 \text{ volte}} = \left(\frac{17}{18}\right)^{182} = 0,00003034644$$

Quindi effettivamente la probabilità è bassa.

Ma se calcoliamo qual è la probabilità che non esca il 53 per 200 volte consecutive, otteniamo

$$p = \left(\frac{17}{18}\right)^{200} = 0,000010846341.$$

Ancora sui numeri ritardatari

Qualche anno fa il numero 53 non uscì sulla ruota di Venezia per 182 estrazioni consecutive.

Qual è la probabilità che non esca il 53 per 182 volte consecutive?

$$p = \underbrace{\frac{17}{18} \cdot \dots \cdot \frac{17}{18}}_{182 \text{ volte}} = \left(\frac{17}{18}\right)^{182} = 0,00003034644$$

Quindi effettivamente la probabilità è bassa.

Ma se calcoliamo qual è la probabilità che non esca il 53 per 200 volte consecutive, otteniamo

$$p = \left(\frac{17}{18}\right)^{200} = 0,000010846341.$$

Come si vede, la differenza tra le due probabilità è molto piccola, quindi un numero che non è uscito per 182 volte potrebbe comunque continuare a non uscire per molte estrazioni ancora.