

Parabola e disequazioni di secondo grado

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

L'equazione della parabola

La parabola è una particolare *conica*, che geometricamente si definisce nel modo seguente:

Definizione di parabola

Data una retta d e un punto F non appartenente a d , la parabola di **fuoco** F e **direttrice** d è l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da d e da F .

L'equazione della parabola

La parabola è una particolare *conica*, che geometricamente si definisce nel modo seguente:

Definizione di parabola

Data una retta d e un punto F non appartenente a d , la parabola di **fuoco** F e **direttrice** d è l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da d e da F .

Ricordiamo che la distanza di un punto P da una retta è la lunghezza del segmento PH , dove H è la proiezione ortogonale di P sulla retta.

L'equazione della parabola

La parabola è una particolare *conica*, che geometricamente si definisce nel modo seguente:

Definizione di parabola

Data una retta d e un punto F non appartenente a d , la parabola di **fuoco** F e **direttrice** d è l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da d e da F .

Ricordiamo che la distanza di un punto P da una retta è la lunghezza del segmento PH , dove H è la proiezione ortogonale di P sulla retta.

Nel piano cartesiano, se il punto P ha coordinate (x_P, y_P) e la retta r ha equazione (implicita) $ax + by + c = 0$, la *formula della distanza punto-retta* è data da

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La parabola come luogo di punti

In questa lezione, in vista dell'applicazione alle disequazioni di secondo grado, tratteremo solamente le parabole che hanno la direttrice *orizzontale*.

La parabola come luogo di punti

In questa lezione, in vista dell'applicazione alle disequazioni di secondo grado, tratteremo solamente le parabole che hanno la direttrice *orizzontale*.

Data una direttrice $y = d$ e un fuoco $F(x_F, y_F)$, vogliamo trovare l'equazione della parabola corrispondente. Teniamo presente che, poiché il fuoco non può stare sulla direttrice, deve essere $y_F \neq d$.

La parabola come luogo di punti

In questa lezione, in vista dell'applicazione alle disequazioni di secondo grado, tratteremo solamente le parabole che hanno la direttrice *orizzontale*.

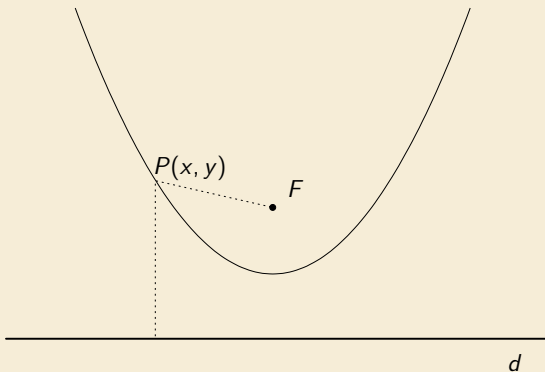
Data una direttrice $y = d$ e un fuoco $F(x_F, y_F)$, vogliamo trovare l'equazione della parabola corrispondente. Teniamo presente che, poiché il fuoco non può stare sulla direttrice, deve essere $y_F \neq d$.

Costruiamo ora l'equazione della parabola come *luogo di punti*, ovvero prendiamo un generico punto $P(x, y)$ e cerchiamo di scrivere a partire dalla definizione di parabola l'equazione a cui devono soddisfare le sue coordinate.

L'equazione della parabola

La distanza di $P(x, y)$
dalla retta $y = d$ è molto
facile: basta prendere

$$|y - d|.$$



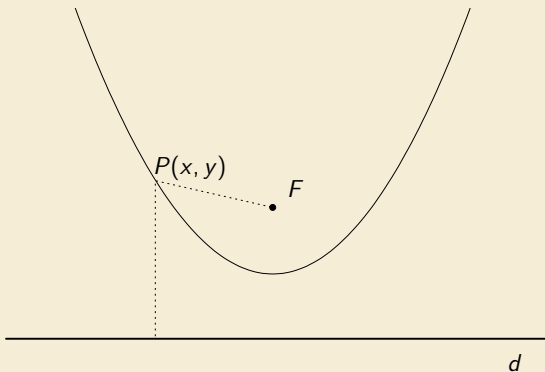
L'equazione della parabola

La distanza di $P(x, y)$
dalla retta $y = d$ è molto
facile: basta prendere

$$|y - d|.$$

Per la distanza di P dal
fuoco usiamo invece la
formula della distanza tra
due punti:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$



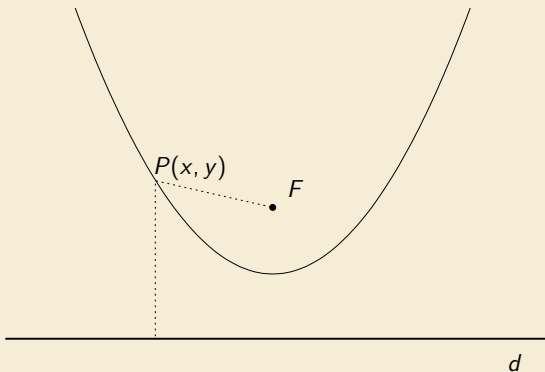
L'equazione della parabola

La distanza di $P(x, y)$
dalla retta $y = d$ è molto
facile: basta prendere

$$|y - d|.$$

Per la distanza di P dal
fuoco usiamo invece la
formula della distanza tra
due punti:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$



L'equazione diventa

$$|y - d| = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$

L'equazione della parabola

Partiamo dall'equazione

$$|y - d| = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$

L'equazione della parabola

Partiamo dall'equazione

$$|y - d| = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$(y - d)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$$

L'equazione della parabola

Partiamo dall'equazione

$$|y - d| = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$(y - d)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$$

da cui

$$y^2 - 2dy + d^2 = x^2 - 2x_Fx + x_F^2 + y^2 - 2y_Fy + y_F^2.$$

L'equazione della parabola

Partiamo dall'equazione

$$|y - d| = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$(y - d)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$$

da cui

$$y^2 - 2dy + d^2 = x^2 - 2x_Fx + x_F^2 + y^2 - 2y_Fy + y_F^2.$$

Semplificando il termine y^2 e isolando la y si ha

$$2(y_F - d)y = x^2 - 2x_Fx + x_F^2 + y_F^2 - d^2,$$

L'equazione della parabola

Partiamo dall'equazione

$$|y - d| = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$(y - d)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$$

da cui

$$y^2 - 2dy + d^2 = x^2 - 2x_Fx + x_F^2 + y^2 - 2y_Fy + y_F^2.$$

Semplificando il termine y^2 e isolando la y si ha

$$2(y_F - d)y = x^2 - 2x_Fx + x_F^2 + y_F^2 - d^2,$$

quindi

$$y = \frac{1}{2(y_F - d)}x^2 - \frac{x_F}{y_F - d}x + \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}.$$

Coefficienti della parabola

Concludiamo che una parabola con direttrice orizzontale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

dove le relazioni tra i coefficienti a, b, c e il fuoco e la direttrice sono data da

$$a = \frac{1}{2(y_F - d)}, \quad b = -\frac{x_F}{y_F - d}, \quad c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}.$$

Coefficienti della parabola

Concludiamo che una parabola con direttrice orizzontale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

dove le relazioni tra i coefficienti a, b, c e il fuoco e la direttrice sono data da

$$a = \frac{1}{2(y_F - d)}, \quad b = -\frac{x_F}{y_F - d}, \quad c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}.$$

Osserviamo che tali relazioni hanno senso, poiché avevamo supposto che il fuoco non stesse sulla direttrice, ovvero $y_F \neq d$.

Coefficienti della parabola

Concludiamo che una parabola con direttrice orizzontale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

dove le relazioni tra i coefficienti a, b, c e il fuoco e la direttrice sono data da

$$a = \frac{1}{2(y_F - d)}, \quad b = -\frac{x_F}{y_F - d}, \quad c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}.$$

Osserviamo che tali relazioni hanno senso, poiché avevamo supposto che il fuoco non stesse sulla direttrice, ovvero $y_F \neq d$.

In particolare, l'ordinata di un punto sulla parabola con direttrice orizzontale è un polinomio di secondo grado dell'ascissa: questo ci darà modo di dare un'interpretazione geometrica delle equazioni e disequazioni di secondo grado.

Relazioni tra i coefficienti

Invertendo le formule

$$a = \frac{1}{2(y_F - d)}, \quad b = -\frac{x_F}{y_F - d}, \quad c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}$$

possiamo anche esprimere il fuoco e la direttrice in funzione dei coefficienti a, b, c .

Relazioni tra i coefficienti

Invertendo le formule

$$a = \frac{1}{2(y_F - d)}, \quad b = -\frac{x_F}{y_F - d}, \quad c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}$$

possiamo anche esprimere il fuoco e la direttrice in funzione dei coefficienti a, b, c .

Poiché a è sicuramente diverso da 0, dalla prima equazione troviamo

$$y_F - d = \frac{1}{2a}$$

e dunque dalla seconda equazione

$$x_F = -\frac{b}{2a}$$

che fornisce l'ascissa del fuoco.

Relazioni tra i coefficienti

Ora sostituiamo le formule appena trovate $y_F - d = \frac{1}{2a}$ e $x_F = -\frac{b}{2a}$ nella terza equazione:

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \right) a.$$

Relazioni tra i coefficienti

Ora sostituiamo le formule appena trovate $y_F - d = \frac{1}{2a}$ e $x_F = -\frac{b}{2a}$ nella terza equazione:

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \right) a.$$

Se di nuovo a y_F sostituiamo $d + \frac{1}{2a}$ abbiamo

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a} + \frac{1}{4a^2} \right) a$$

Relazioni tra i coefficienti

Ora sostituiamo le formule appena trovate $y_F - d = \frac{1}{2a}$ e $x_F = -\frac{b}{2a}$ nella terza equazione:

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \right) a.$$

Se di nuovo a y_F sostituiamo $d + \frac{1}{2a}$ abbiamo

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a} + \frac{1}{4a^2} \right) a = \frac{b^2}{4a} + d + \frac{1}{4a},$$

Relazioni tra i coefficienti

Ora sostituiamo le formule appena trovate $y_F - d = \frac{1}{2a}$ e $x_F = -\frac{b}{2a}$ nella terza equazione:

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \right) a.$$

Se di nuovo a y_F sostituiamo $d + \frac{1}{2a}$ abbiamo

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a} + \frac{1}{4a^2} \right) a = \frac{b^2}{4a} + d + \frac{1}{4a},$$

da cui

$$d = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

Relazioni tra i coefficienti

Ora sostituiamo le formule appena trovate $y_F - d = \frac{1}{2a}$ e $x_F = -\frac{b}{2a}$ nella terza equazione:

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \right) a.$$

Se di nuovo a y_F sostituiamo $d + \frac{1}{2a}$ abbiamo

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a} + \frac{1}{4a^2} \right) a = \frac{b^2}{4a} + d + \frac{1}{4a},$$

da cui

$$d = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{4a}$$

Relazioni tra i coefficienti

Ora sostituiamo le formule appena trovate $y_F - d = \frac{1}{2a}$ e $x_F = -\frac{b}{2a}$ nella terza equazione:

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \right) a.$$

Se di nuovo a y_F sostituiamo $d + \frac{1}{2a}$ abbiamo

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a} + \frac{1}{4a^2} \right) a = \frac{b^2}{4a} + d + \frac{1}{4a},$$

da cui

$$d = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1 + \Delta}{4a},$$

Relazioni tra i coefficienti

Ora sostituiamo le formule appena trovate $y_F - d = \frac{1}{2a}$ e $x_F = -\frac{b}{2a}$ nella terza equazione:

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \right) a.$$

Se di nuovo a y_F sostituiamo $d + \frac{1}{2a}$ abbiamo

$$c = \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a} + \frac{1}{4a^2} \right) a = \frac{b^2}{4a} + d + \frac{1}{4a},$$

da cui

$$d = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1 + \Delta}{4a},$$

dove al solito abbiamo posto $\Delta = b^2 - 4ac$.

Relazioni tra i coefficienti

Infine, non ci resta che trovare y_F : dalla relazione $y_F - d = \frac{1}{2a}$ abbiamo subito

$$y_F = d + \frac{1}{2a}$$

Relazioni tra i coefficienti

Infine, non ci resta che trovare y_F : dalla relazione $y_F - d = \frac{1}{2a}$ abbiamo subito

$$y_F = d + \frac{1}{2a} = -\frac{1 + \Delta}{4a} + \frac{1}{2a}$$

Relazioni tra i coefficienti

Infine, non ci resta che trovare y_F : dalla relazione $y_F - d = \frac{1}{2a}$ abbiamo subito

$$y_F = d + \frac{1}{2a} = -\frac{1 + \Delta}{4a} + \frac{1}{2a} = \frac{-1 - \Delta + 2}{4a}$$

Relazioni tra i coefficienti

Infine, non ci resta che trovare y_F : dalla relazione $y_F - d = \frac{1}{2a}$ abbiamo subito

$$y_F = d + \frac{1}{2a} = -\frac{1+\Delta}{4a} + \frac{1}{2a} = \frac{-1-\Delta+2}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a}.$$

Relazioni tra i coefficienti

Infine, non ci resta che trovare y_F : dalla relazione $y_F - d = \frac{1}{2a}$ abbiamo subito

$$y_F = d + \frac{1}{2a} = -\frac{1+\Delta}{4a} + \frac{1}{2a} = \frac{-1-\Delta+2}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a}.$$

Riassumendo, abbiamo trovato le formule

$$\text{fuoco: } F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right), \quad \text{direttrice: } y = -\frac{1+\Delta}{4a}.$$

Relazioni tra i coefficienti

Infine, non ci resta che trovare y_F : dalla relazione $y_F - d = \frac{1}{2a}$ abbiamo subito

$$y_F = d + \frac{1}{2a} = -\frac{1 + \Delta}{4a} + \frac{1}{2a} = \frac{-1 - \Delta + 2}{4a} = \frac{1 - \Delta}{4a}.$$

Riassumendo, abbiamo trovato le formule

$$\text{fuoco: } F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right), \quad \text{direttrice: } y = -\frac{1 + \Delta}{4a}.$$

Definiamo **asse** della parabola la retta perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco. Si può dimostrare che l'asse è un *asse di simmetria* per la parabola.

Relazioni tra i coefficienti

Infine, non ci resta che trovare y_F : dalla relazione $y_F - d = \frac{1}{2a}$ abbiamo subito

$$y_F = d + \frac{1}{2a} = -\frac{1 + \Delta}{4a} + \frac{1}{2a} = \frac{-1 - \Delta + 2}{4a} = \frac{1 - \Delta}{4a}.$$

Riassumendo, abbiamo trovato le formule

$$\text{fuoco: } F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right), \quad \text{direttrice: } y = -\frac{1 + \Delta}{4a}.$$

Definiamo **asse** della parabola la retta perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco. Si può dimostrare che l'asse è un *asse di simmetria* per la parabola.

Infine chiamiamo **vertice** della parabola il punto di intersezione tra l'asse e la parabola. Si può dimostrare che il vertice è il punto della parabola di *minima distanza* da fuoco e direttrice.

Vertice e asse

Poiché nel nostro caso la direttrice è orizzontale, è facile trovare l'equazione dell'asse: esso è la retta verticale passante per il fuoco, quindi

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a}.$$

Vertice e asse

Poiché nel nostro caso la direttrice è orizzontale, è facile trovare l'equazione dell'asse: esso è la retta verticale passante per il fuoco, quindi

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a}.$$

Il vertice poi si trova intersecando l'asse con la parabola, cioè sostituendo $x = -\frac{b}{2a}$ nell'equazione della parabola. Si ha

Vertice e asse

Poiché nel nostro caso la direttrice è orizzontale, è facile trovare l'equazione dell'asse: esso è la retta verticale passante per il fuoco, quindi

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a}.$$

Il vertice poi si trova intersecando l'asse con la parabola, cioè sostituendo $x = -\frac{b}{2a}$ nell'equazione della parabola. Si ha

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c$$

Vertice e asse

Poiché nel nostro caso la direttrice è orizzontale, è facile trovare l'equazione dell'asse: esso è la retta verticale passante per il fuoco, quindi

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a}.$$

Il vertice poi si trova intersecando l'asse con la parabola, cioè sostituendo $x = -\frac{b}{2a}$ nell'equazione della parabola. Si ha

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Vertice e asse

Poiché nel nostro caso la direttrice è orizzontale, è facile trovare l'equazione dell'asse: esso è la retta verticale passante per il fuoco, quindi

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a}.$$

Il vertice poi si trova intersecando l'asse con la parabola, cioè sostituendo $x = -\frac{b}{2a}$ nell'equazione della parabola. Si ha

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Vertice e asse

Poiché nel nostro caso la direttrice è orizzontale, è facile trovare l'equazione dell'asse: esso è la retta verticale passante per il fuoco, quindi

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a}.$$

Il vertice poi si trova intersecando l'asse con la parabola, cioè sostituendo $x = -\frac{b}{2a}$ nell'equazione della parabola. Si ha

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Quindi il vertice è dato da

$$V \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right).$$

La forma della parabola

La parabola rimane sempre nel semipiano delimitato dalla direttrice e contenente il fuoco: infatti, se la parabola attraversasse la direttrice, dovrebbe esserci un punto a distanza nulla da essa, ma questo non è possibile perché dovrebbe avere contemporaneamente distanza nulla anche dal fuoco.

La forma della parabola

La parabola rimane sempre nel semipiano delimitato dalla direttrice e contenente il fuoco: infatti, se la parabola attraversasse la direttrice, dovrebbe esserci un punto a distanza nulla da essa, ma questo non è possibile perché dovrebbe avere contemporaneamente distanza nulla anche dal fuoco.

Inoltre, la parabola è una curva **illimitata**, perché è sempre possibile trovare un punto equidistante da fuoco e direttrice, qualsiasi sia la distanza.

La forma della parabola

La parabola rimane sempre nel semipiano delimitato dalla direttrice e contenente il fuoco: infatti, se la parabola attraversasse la direttrice, dovrebbe esserci un punto a distanza nulla da essa, ma questo non è possibile perché dovrebbe avere contemporaneamente distanza nulla anche dal fuoco.

Inoltre, la parabola è una curva **illimitata**, perché è sempre possibile trovare un punto equidistante da fuoco e direttrice, qualsiasi sia la distanza.

Se ora riscriviamo l'equazione della parabola in modo leggermente diverso, usando il completamento del quadrato abbiamo

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

La forma della parabola

La parabola rimane sempre nel semipiano delimitato dalla direttrice e contenente il fuoco: infatti, se la parabola attraversasse la direttrice, dovrebbe esserci un punto a distanza nulla da essa, ma questo non è possibile perché dovrebbe avere contemporaneamente distanza nulla anche dal fuoco.

Inoltre, la parabola è una curva **illimitata**, perché è sempre possibile trovare un punto equidistante da fuoco e direttrice, qualsiasi sia la distanza.

Se ora riscriviamo l'equazione della parabola in modo leggermente diverso, usando il completamento del quadrato abbiamo

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Poiché la quantità $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ diventa sempre più grande al tendere di x all'infinito, troviamo che le ordinate dei punti della parabola diventano sempre più grandi se $a > 0$, e diventano sempre più piccole (verso l'infinito negativo) se $a < 0$.

La forma della parabola (continua)

Inoltre la quantità $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ha il suo valore minimo quando si annulla, cioè per $x = -\frac{b}{2a}$, che è proprio l'ascissa del vertice.

La forma della parabola (continua)

Inoltre la quantità $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ha il suo valore minimo quando si annulla, cioè per $x = -\frac{b}{2a}$, che è proprio l'ascissa del vertice.

Quindi riassumendo abbiamo che:

La forma della parabola (continua)

Inoltre la quantità $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ha il suo valore minimo quando si annulla, cioè per $x = -\frac{b}{2a}$, che è proprio l'ascissa del vertice.

Quindi riassumendo abbiamo che:

- se $a < 0$, la parabola è rivolta verso il basso e il vertice è il punto che ha la massima ordinata;

La forma della parabola (continua)

Inoltre la quantità $(x + \frac{b}{2a})^2$ ha il suo valore minimo quando si annulla, cioè per $x = -\frac{b}{2a}$, che è proprio l'ascissa del vertice.

Quindi riassumendo abbiamo che:

- se $a < 0$, la parabola è rivolta verso il basso e il vertice è il punto che ha la massima ordinata;
- se $a > 0$, la parabola è rivolta verso l'alto e il vertice è il punto che ha la minima ordinata.

La forma della parabola (continua)

Inoltre la quantità $(x + \frac{b}{2a})^2$ ha il suo valore minimo quando si annulla, cioè per $x = -\frac{b}{2a}$, che è proprio l'ascissa del vertice.

Quindi riassumendo abbiamo che:

- se $a < 0$, la parabola è rivolta verso il basso e il vertice è il punto che ha la massima ordinata;
- se $a > 0$, la parabola è rivolta verso l'alto e il vertice è il punto che ha la minima ordinata.

Infine notiamo che l'equazione della parabola non cambia se sostituiamo $-x - \frac{b}{2a}$ al posto di $x + \frac{b}{2a}$. Questo significa che la retta

$$x = -\frac{b}{2a},$$

cioè l'asse della parabola, è un asse di simmetria.

La parabola e le equazioni

Finalmente giungiamo alle relazioni tra la parabola e le equazioni di secondo grado. Visto che le ordinate dei punti della parabola con asse verticale sono date da un polinomio di secondo grado, è facile capire che le soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sono proprio le ascisse dei punti di intersezione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ con l'asse x .

La parabola e le equazioni

Finalmente giungiamo alle relazioni tra la parabola e le equazioni di secondo grado. Visto che le ordinate dei punti della parabola con asse verticale sono date da un polinomio di secondo grado, è facile capire che le soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sono proprio le ascisse dei punti di intersezione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ con l'asse x .

Infatti, il sistema di intersezione tra la retta $y = 0$ e la parabola è

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

e la sua equazione risolvibile è proprio $ax^2 + bx + c = 0$.

La parabola e le equazioni

Quindi un modo geometrico per trovare le soluzioni di un'equazione di secondo grado è quello di disegnare la parabola associata e trovare le sue intersezioni con l'asse x .

La parabola e le equazioni

Quindi un modo geometrico per trovare le soluzioni di un'equazione di secondo grado è quello di disegnare la parabola associata e trovare le sue intersezioni con l'asse x .

Naturalmente per fare questo abbiamo bisogno di poter disegnare la parabola senza ricorrere a strumenti troppo sofisticati. Vedremo ora un metodo semplice per poter ottenere un buon grafico della parabola a partire dal suo vertice e dal coefficiente a .

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice
- si guarda il segno di a per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice
- si guarda il segno di a per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso
- a partire dal vertice, si disegna qualche punto della parabola $y = ax^2$.
In particolare:

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice
- si guarda il segno di a per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso
- a partire dal vertice, si disegna qualche punto della parabola $y = ax^2$.
In particolare:
 - ▶ spostandosi di 1 in orizzontale ci si deve spostare di a in verticale

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice
- si guarda il segno di a per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso
- a partire dal vertice, si disegna qualche punto della parabola $y = ax^2$.
In particolare:
 - ▶ spostandosi di 1 in orizzontale ci si deve spostare di a in verticale
 - ▶ spostandosi di 2 in orizzontale ci si deve spostare di $4a$ in verticale

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice
- si guarda il segno di a per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso
- a partire dal vertice, si disegna qualche punto della parabola $y = ax^2$.
In particolare:
 - ▶ spostandosi di 1 in orizzontale ci si deve spostare di a in verticale
 - ▶ spostandosi di 2 in orizzontale ci si deve spostare di $4a$ in verticale
 - ▶ spostandosi di 3 in orizzontale ci si deve spostare di $9a$ in verticale

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice
- si guarda il segno di a per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso
- a partire dal vertice, si disegna qualche punto della parabola $y = ax^2$.
In particolare:
 - ▶ spostandosi di 1 in orizzontale ci si deve spostare di a in verticale
 - ▶ spostandosi di 2 in orizzontale ci si deve spostare di $4a$ in verticale
 - ▶ spostandosi di 3 in orizzontale ci si deve spostare di $9a$ in verticale
 - ▶ ecc. ecc.

Disegnare la parabola

Per disegnare decentemente una parabola è bene seguire alcune semplici regole:

- si trova l'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$
- sostituendo x_V nell'equazione della parabola, si trova l'ordinata y_V e si disegna il vertice
- si guarda il segno di a per capire se la parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso
- a partire dal vertice, si disegna qualche punto della parabola $y = ax^2$.
In particolare:
 - ▶ spostandosi di 1 in orizzontale ci si deve spostare di a in verticale
 - ▶ spostandosi di 2 in orizzontale ci si deve spostare di $4a$ in verticale
 - ▶ spostandosi di 3 in orizzontale ci si deve spostare di $9a$ in verticale
 - ▶ ecc. ecc.
- si “uniscono i puntini”, cercando di dare alla parabola una forma che si allarga sempre più verso l'esterno.

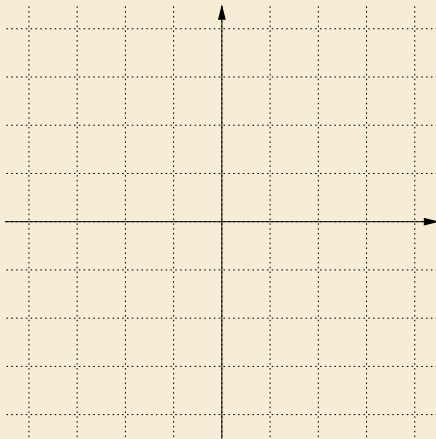
Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

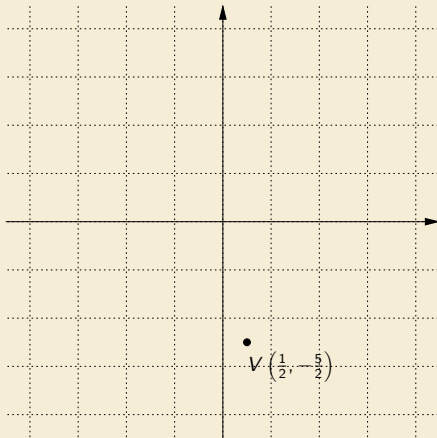
Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,



Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,
 $y_V = -\frac{5}{2}$



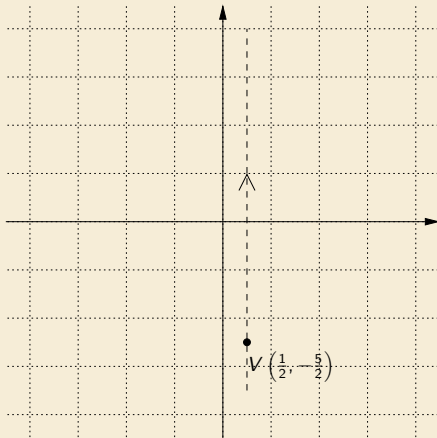
Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,

$$y_V = -\frac{5}{2}$$

$a > 0$: la parabola è verso l'alto



Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

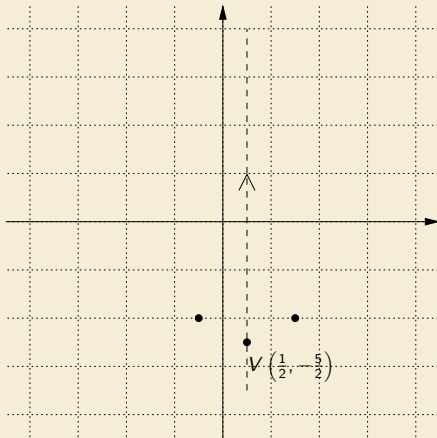
Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,

$$y_V = -\frac{5}{2}$$

$a > 0$: la parabola è verso l'alto

Partendo dal vertice, segno i punti:

$$(1, a) = (1, \frac{1}{2})$$



Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,

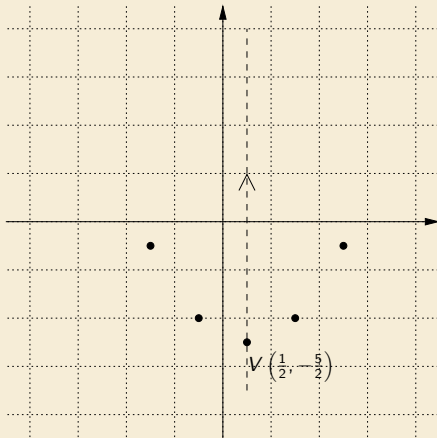
$$y_V = -\frac{5}{2}$$

$a > 0$: la parabola è verso l'alto

Partendo dal vertice, segno i punti:

$$(1, a) = (1, \frac{1}{2})$$

$$(2, 4a) = (2, 2)$$



Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,

$$y_V = -\frac{5}{2}$$

$a > 0$: la parabola è verso l'alto

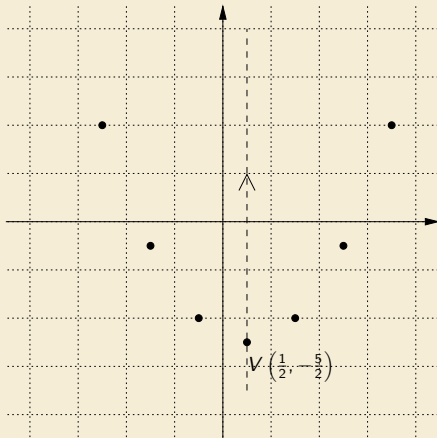
Partendo dal vertice, segno i punti:

$$(1, a) = (1, \frac{1}{2})$$

$$(2, 4a) = (2, 2)$$

$$(3, 9a) = (3, \frac{9}{2})$$

...



Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,

$$y_V = -\frac{5}{2}$$

$a > 0$: la parabola è verso l'alto

Partendo dal vertice, segno i punti:

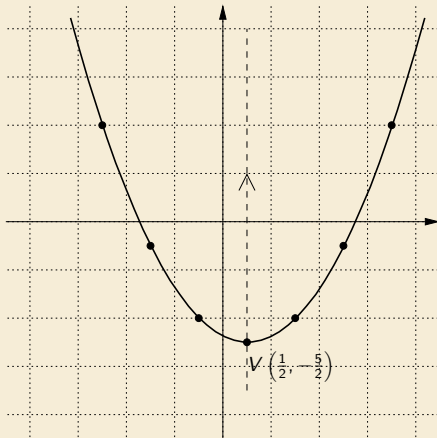
$$(1, a) = (1, \frac{1}{2})$$

$$(2, 4a) = (2, 2)$$

$$(3, 9a) = (3, \frac{9}{2})$$

...

Infine traccio la parabola



Disegnare la parabola: esempio

Si disegni la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{8}$.

Troviamo il vertice: $x_V = \frac{1}{2}$,

$$y_V = -\frac{5}{2}$$

$a > 0$: la parabola è verso l'alto

Partendo dal vertice, segno i punti:

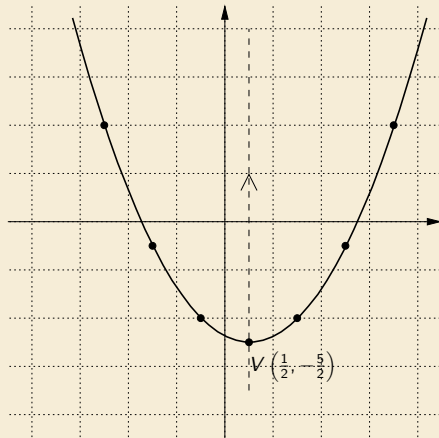
$$(1, a) = (1, \frac{1}{2})$$

$$(2, 4a) = (2, 2)$$

$$(3, 9a) = (3, \frac{9}{2})$$

...

Infine traccio la parabola



Stima delle soluzioni: $-2 < x_1 < -\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2} < x_2 < 3$.

Dalla geometria alle equazioni

Nel caso $a > 0$, il vertice è il punto della parabola di ordinata minima: ricordando che

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a},$$

ne segue subito che (per $a > 0$)

$$ax^2 + bx + c \geq -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{per ogni } x.$$

Dalla geometria alle equazioni

Nel caso $a > 0$, il vertice è il punto della parabola di ordinata minima: ricordando che

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a},$$

ne segue subito che (per $a > 0$)

$$ax^2 + bx + c \geq -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{per ogni } x.$$

Da qui si capisce subito che se $\Delta < 0$ il trinomio sarà sempre positivo, e l'equazione non può avere soluzioni.

Dalla geometria alle equazioni

Nel caso $a > 0$, il vertice è il punto della parabola di ordinata minima: ricordando che

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

ne segue subito che (per $a > 0$)

$$ax^2 + bx + c \geq -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{per ogni } x.$$

Da qui si capisce subito che se $\Delta < 0$ il trinomio sarà sempre positivo, e l'equazione non può avere soluzioni.

Se invece $a < 0$, il vertice ha ordinata più grande tra tutti i punti della parabola, quindi (per $a < 0$)

$$ax^2 + bx + c \leq -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{per ogni } x.$$

Dalla geometria alle equazioni

Nel caso $a > 0$, il vertice è il punto della parabola di ordinata minima: ricordando che

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

ne segue subito che (per $a > 0$)

$$ax^2 + bx + c \geq -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{per ogni } x.$$

Da qui si capisce subito che se $\Delta < 0$ il trinomio sarà sempre positivo, e l'equazione non può avere soluzioni.

Se invece $a < 0$, il vertice ha ordinata più grande tra tutti i punti della parabola, quindi (per $a < 0$)

$$ax^2 + bx + c \leq -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{per ogni } x.$$

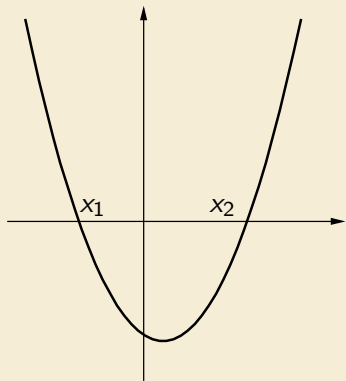
Stavolta, se $\Delta < 0$ il trinomio sarà sempre negativo, e di nuovo l'equazione non può avere soluzioni.

La parabola e le disequazioni di secondo grado

Passare dalle equazioni alle disequazioni adesso diventa molto semplice: prendiamo il caso $a > 0$ e disegniamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$ nel caso $\Delta > 0$, ovvero che interseca l'asse delle ascisse in due punti.

La parabola e le disequazioni di secondo grado

Passare dalle equazioni alle disequazioni adesso diventa molto semplice: prendiamo il caso $a > 0$ e disegniamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$ nel caso $\Delta > 0$, ovvero che interseca l'asse delle ascisse in due punti.



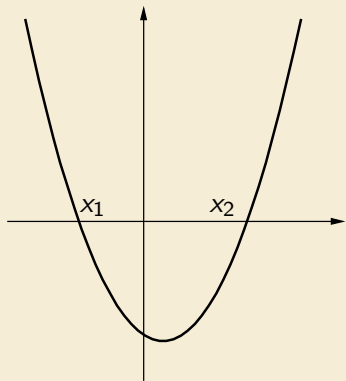
La parabola e le disequazioni di secondo grado

Passare dalle equazioni alle disequazioni adesso diventa molto semplice: prendiamo il caso $a > 0$ e disegniamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$ nel caso $\Delta > 0$, ovvero che interseca l'asse delle ascisse in due punti.

Risolvere ad esempio la disequazione

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

significa trovare le ordinate dei punti della parabola che stanno **sopra** l'asse x , e quindi $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$.



La parabola e le disequazioni di secondo grado

Passare dalle equazioni alle disequazioni adesso diventa molto semplice: prendiamo il caso $a > 0$ e disegniamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$ nel caso $\Delta > 0$, ovvero che interseca l'asse delle ascisse in due punti.

Risolvere ad esempio la disequazione

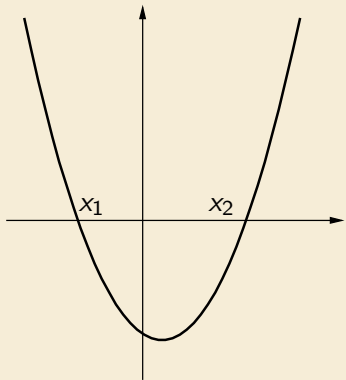
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

significa trovare le ordinate dei punti della parabola che stanno **sopra** l'asse x , e quindi $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$.

Se invece si vuole risolvere la disequazione

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

dal disegno si vede immediatamente che si ha $x_1 \leq x \leq x_2$.



Le disequazioni parametriche

Ora proviamo a studiare una disequazione più complicata:

$$x^2 + 2kx + 3k - 2 < 0.$$

Questa è una *disequazione parametrica*, perché contiene anche un parametro k . Di solito queste disequazioni vanno **discusse**, ovvero si deve capire come cambiano le soluzioni al variare del parametro.

Le disequazioni parametriche

Ora proviamo a studiare una disequazione più complicata:

$$x^2 + 2kx + 3k - 2 < 0.$$

Questa è una *disequazione parametrica*, perché contiene anche un parametro k . Di solito queste disequazioni vanno **discusse**, ovvero si deve capire come cambiano le soluzioni al variare del parametro.

Se di nuovo usiamo l'interpretazione della parabola, possiamo considerare l'equazione

$$y = x^2 + 2kx + 3k - 2$$

che rappresenta un *fascio di parabole*. Geometricamente, risolviamo la disequazione vedendo come si posiziona il fascio di parabole rispetto all'asse x .

Le disequazioni parametriche

Dobbiamo discutere

$$y = x^2 + 2kx + 3k - 2 < 0.$$

Procediamo così: visto che il coefficiente a è positivo, la parabola è rivolta verso l'alto e il vertice è il punto più in basso. La disequazione ha soluzione se il vertice sta *sotto* l'asse x .

Le disequazioni parametriche

Dobbiamo discutere

$$y = x^2 + 2kx + 3k - 2 < 0.$$

Procediamo così: visto che il coefficiente a è positivo, la parabola è rivolta verso l'alto e il vertice è il punto più in basso. La disequazione ha soluzione se il vertice sta *sotto* l'asse x .

Vediamo come si posiziona il vertice rispetto all'asse x : quando $\Delta > 0$ il vertice sta sotto l'asse, quando $\Delta < 0$ il vertice sta sopra l'asse. Poiché

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 3k + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k < 1 \vee k > 2,$$

abbiamo che la disequazione ha soluzione quando $k < 1$ oppure quando $k > 2$, e la soluzione è sempre un intervallo limitato.

Le disequazioni parametriche

Dobbiamo discutere

$$y = x^2 + 2kx + 3k - 2 < 0.$$

Procediamo così: visto che il coefficiente a è positivo, la parabola è rivolta verso l'alto e il vertice è il punto più in basso. La disequazione ha soluzione se il vertice sta *sotto* l'asse x .

Vediamo come si posiziona il vertice rispetto all'asse x : quando $\Delta > 0$ il vertice sta sotto l'asse, quando $\Delta < 0$ il vertice sta sopra l'asse. Poiché

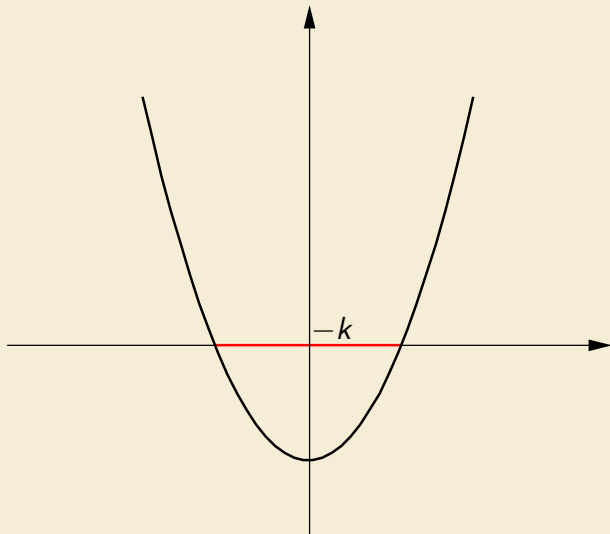
$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 3k + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k < 1 \vee k > 2,$$

abbiamo che la disequazione ha soluzione quando $k < 1$ oppure quando $k > 2$, e la soluzione è sempre un intervallo limitato.

Inoltre, visto che l'ascissa del vertice è $-k$, possiamo anche affermare che l'intervallo delle soluzioni, quando esiste, è sempre centrato in $-k$.

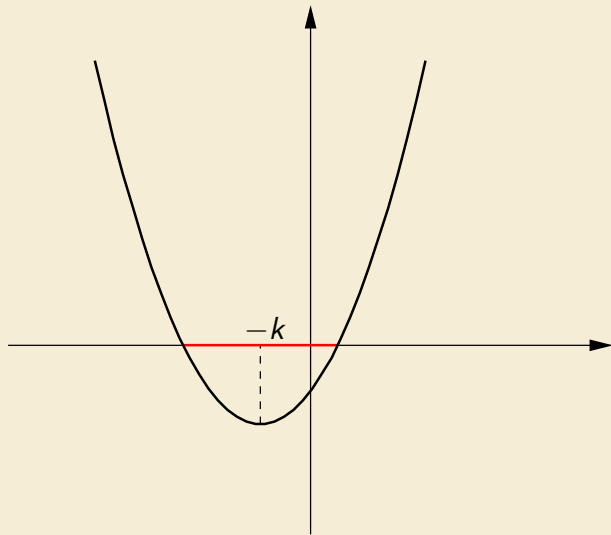
Le disequazioni parametriche

$$k = 0$$



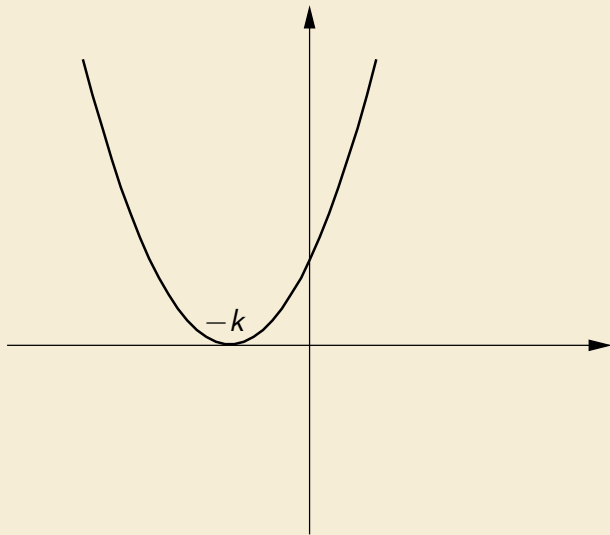
Le disequazioni parametriche

$$k = \frac{1}{2}$$



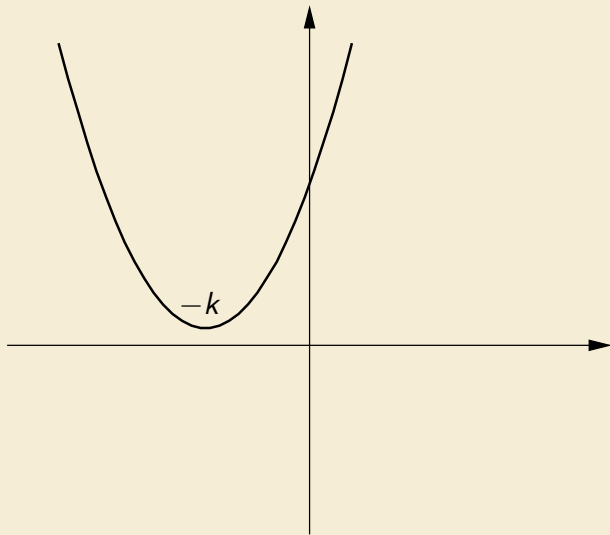
Le disequazioni parametriche

$$k = 1$$



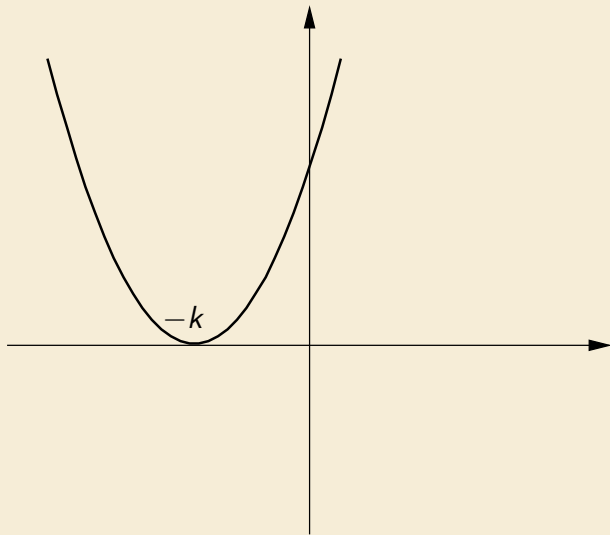
Le disequazioni parametriche

$$k = \frac{3}{2}$$



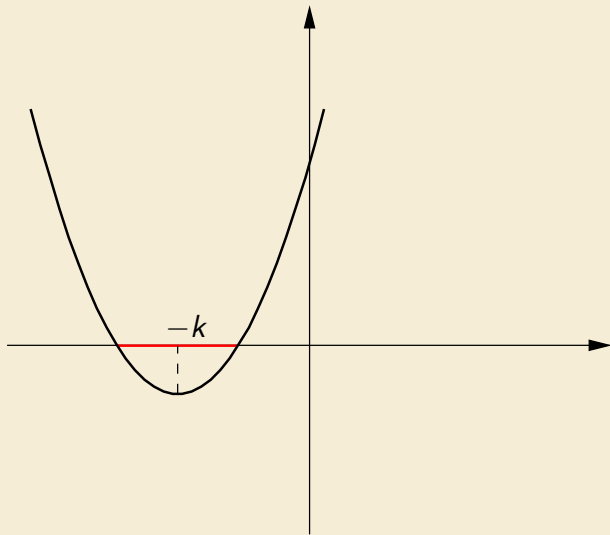
Le disequazioni parametriche

$$k = 2$$



Le disequazioni parametriche

$$k = 3$$



Approfondimento: i sistemi parametrici di secondo grado

Come argomento finale, studiamo il *sistema parametrico* di secondo grado, ovvero un sistema del tipo

$$\begin{cases} a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0 \\ p \leq x \leq q, \end{cases}$$

dove i coefficienti a, b, c dipendono da un parametro k (di solito in modo lineare).

Approfondimento: i sistemi parametrici di secondo grado

Come argomento finale, studiamo il *sistema parametrico* di secondo grado, ovvero un sistema del tipo

$$\begin{cases} a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0 \\ p \leq x \leq q, \end{cases}$$

dove i coefficienti a, b, c dipendono da un parametro k (di solito in modo lineare).

Discutere questo sistema significa capire, al variare di k , quante soluzioni dell'equazione di secondo grado $a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0$ appartengono all'intervallo dato $p \leq x \leq q$.

Approfondimento: i sistemi parametrici di secondo grado

Come argomento finale, studiamo il *sistema parametrico* di secondo grado, ovvero un sistema del tipo

$$\begin{cases} a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0 \\ p \leq x \leq q, \end{cases}$$

dove i coefficienti a, b, c dipendono da un parametro k (di solito in modo lineare).

Discutere questo sistema significa capire, al variare di k , quante soluzioni dell'equazione di secondo grado $a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0$ appartengono all'intervallo dato $p \leq x \leq q$.

Come vedremo, questo sistema può essere studiato con l'aiuto di una parabola.

Sistemi parametrici di secondo grado

Ponendo $y = x^2$, riconduciamo il sistema precedente a

$$\begin{cases} y = x^2 \\ p \leq x \leq q \\ a(k)y + b(k)x + c(k) = 0. \end{cases}$$

Sistemi parametrici di secondo grado

Ponendo $y = x^2$, riconduciamo il sistema precedente a

$$\begin{cases} y = x^2 \\ p \leq x \leq q \\ a(k)y + b(k)x + c(k) = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni rappresentano un arco di parabola, mentre la terza è l'equazione di un fascio di rette.

Sistemi parametrici di secondo grado

Ponendo $y = x^2$, riconduciamo il sistema precedente a

$$\begin{cases} y = x^2 \\ p \leq x \leq q \\ a(k)y + b(k)x + c(k) = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni rappresentano un arco di parabola, mentre la terza è l'equazione di un fascio di rette.

Si tratta quindi di vedere quante intersezioni le rette del fascio hanno con l'arco di parabola.

Sistemi parametrici di secondo grado

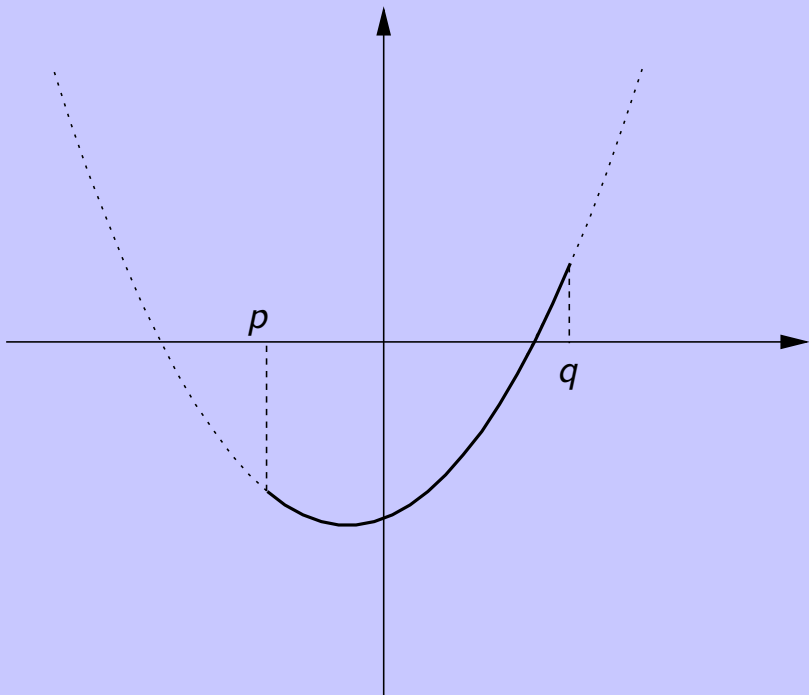
Ponendo $y = x^2$, riconduciamo il sistema precedente a

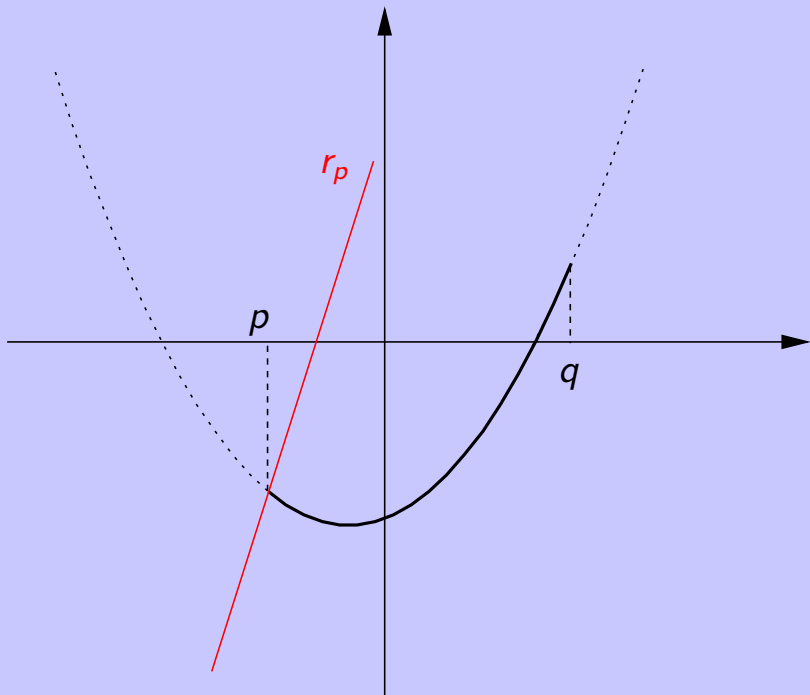
$$\begin{cases} y = x^2 \\ p \leq x \leq q \\ a(k)y + b(k)x + c(k) = 0. \end{cases}$$

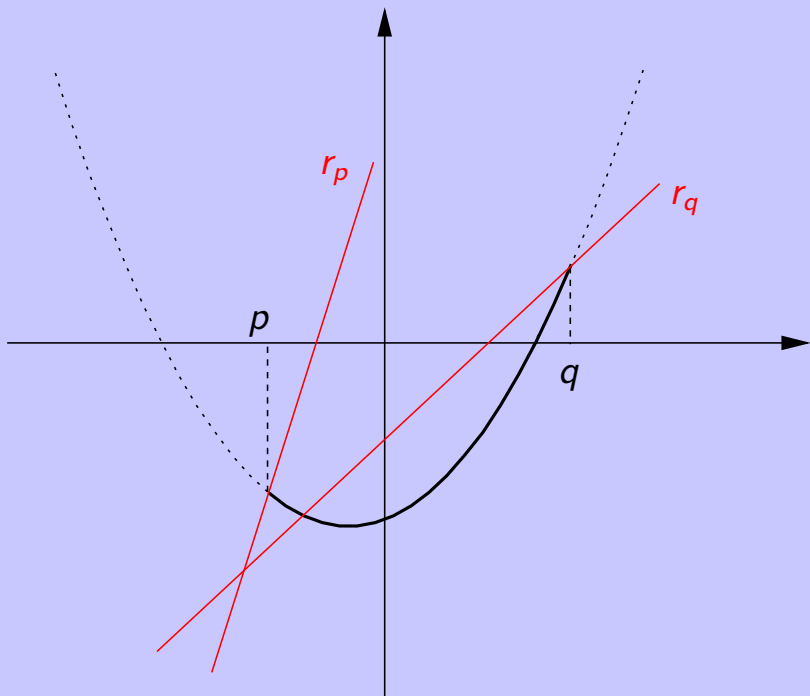
Le prime due equazioni rappresentano un arco di parabola, mentre la terza è l'equazione di un fascio di rette.

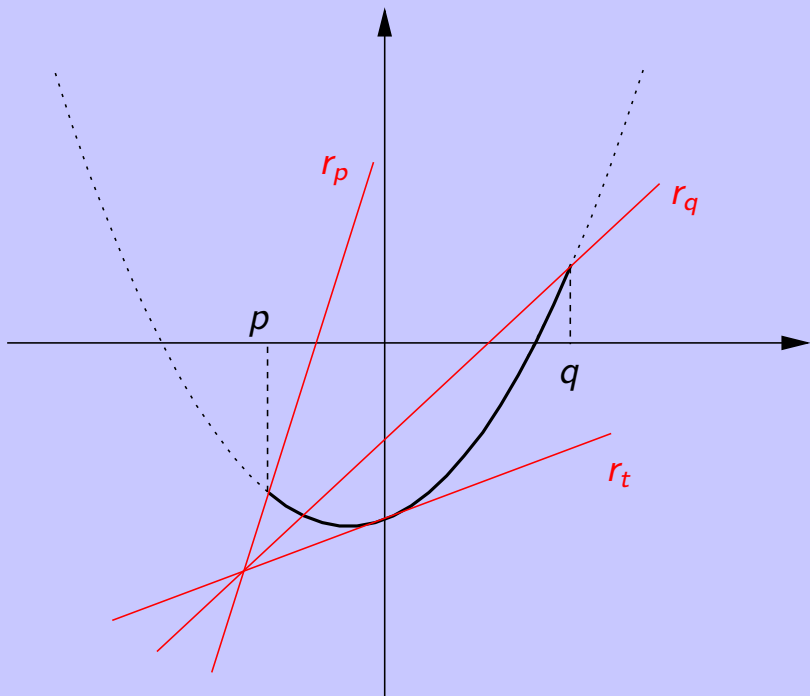
Si tratta quindi di vedere quante intersezioni le rette del fascio hanno con l'arco di parabola.

Sarà importante trovare le rette del fascio passanti per gli estremi dell'arco di parabola e quelle tangenti alla parabola.









Esempio

Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} kx^2 - x + 2 - 2k = 0 \\ -1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Esempio

Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} kx^2 - x + 2 - 2k = 0 \\ -1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Questo sistema parametrico diventa

$$\begin{cases} y = x^2 \\ -1 \leq x \leq 2 \\ ky - x + 2 - 2k = 0. \end{cases}$$

Esempio

Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} kx^2 - x + 2 - 2k = 0 \\ -1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Questo sistema parametrico diventa

$$\begin{cases} y = x^2 \\ -1 \leq x \leq 2 \\ ky - x + 2 - 2k = 0. \end{cases}$$

Sostituendo gli estremi -1 e 2 nella parabola, troviamo gli estremi dell'arco di parabola: $P(-1; 1)$ e $Q(2; 4)$.

Esempio

Le rette del fascio che passano per gli estremi si trovano sostituendo le coordinate di $P(-1; 1)$ e $Q(2; 4)$ nel fascio $ky - x + 2 - 2k = 0$:

$$k + 1 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3,$$

$$4k - 2 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Esempio

Le rette del fascio che passano per gli estremi si trovano sostituendo le coordinate di $P(-1; 1)$ e $Q(2; 4)$ nel fascio $ky - x + 2 - 2k = 0$:

$$k + 1 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3,$$

$$4k - 2 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Quindi le rette per gli estremi hanno equazione

$$3y - x - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

Esempio

Le rette del fascio che passano per gli estremi si trovano sostituendo le coordinate di $P(-1; 1)$ e $Q(2; 4)$ nel fascio $ky - x + 2 - 2k = 0$:

$$k + 1 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3,$$

$$4k - 2 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Quindi le rette per gli estremi hanno equazione

$$3y - x - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

Ora studiamo il fascio di rette: facendo l'intersezione tra due sue rette (ad esempio quelle appena trovate) troviamo il centro del fascio:

Esempio

Le rette del fascio che passano per gli estremi si trovano sostituendo le coordinate di $P(-1; 1)$ e $Q(2; 4)$ nel fascio $ky - x + 2 - 2k = 0$:

$$k + 1 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3,$$

$$4k - 2 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Quindi le rette per gli estremi hanno equazione

$$3y - x - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

Ora studiamo il fascio di rette: facendo l'intersezione tra due sue rette (ad esempio quelle appena trovate) troviamo il centro del fascio: $C(2; 2)$.

Esempio

Le rette del fascio che passano per gli estremi si trovano sostituendo le coordinate di $P(-1; 1)$ e $Q(2; 4)$ nel fascio $ky - x + 2 - 2k = 0$:

$$k + 1 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3,$$

$$4k - 2 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Quindi le rette per gli estremi hanno equazione

$$3y - x - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

Ora studiamo il fascio di rette: facendo l'intersezione tra due sue rette (ad esempio quelle appena trovate) troviamo il centro del fascio: $C(2; 2)$.

Inoltre, poiché il fascio può essere scritto come

$$-x + 2 + k(y - 2) = 0,$$

la retta per $k = \infty$ ha equazione $y = 2$.

Esempio

Le rette del fascio che passano per gli estremi si trovano sostituendo le coordinate di $P(-1; 1)$ e $Q(2; 4)$ nel fascio $ky - x + 2 - 2k = 0$:

$$k + 1 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3,$$

$$4k - 2 + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Quindi le rette per gli estremi hanno equazione

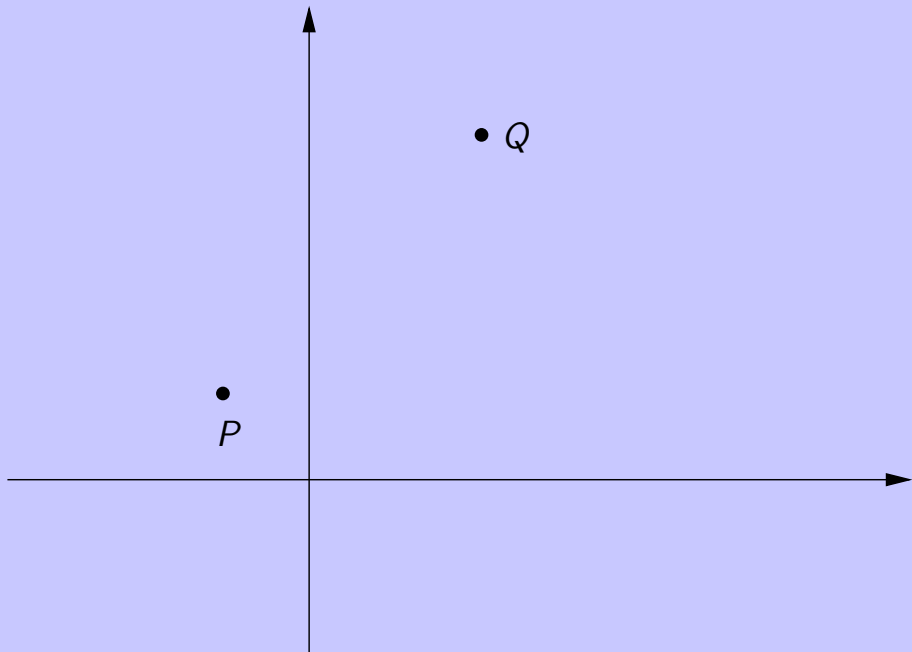
$$3y - x - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x = 2.$$

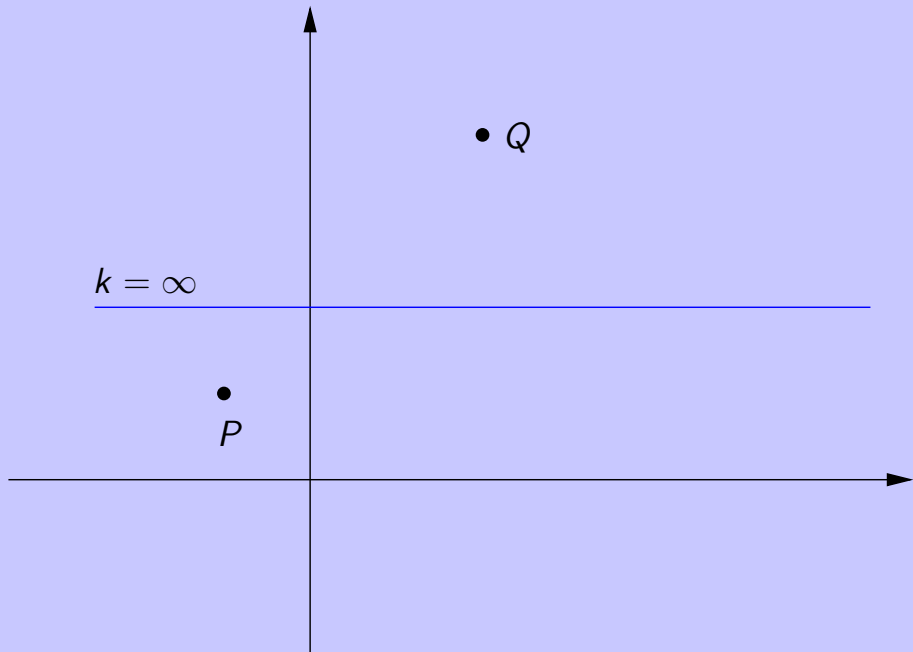
Ora studiamo il fascio di rette: facendo l'intersezione tra due sue rette (ad esempio quelle appena trovate) troviamo il centro del fascio: $C(2; 2)$.

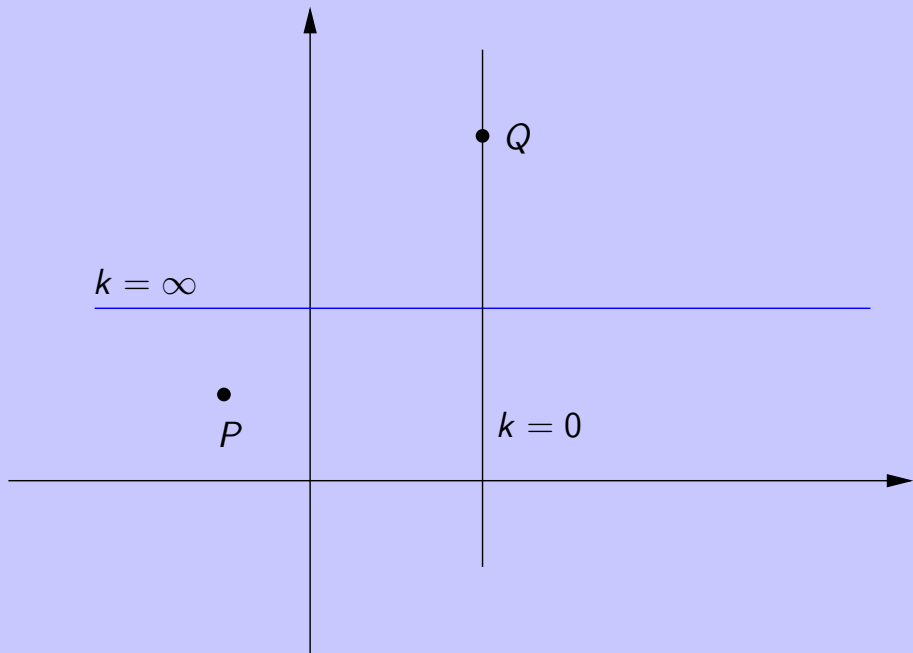
Inoltre, poiché il fascio può essere scritto come

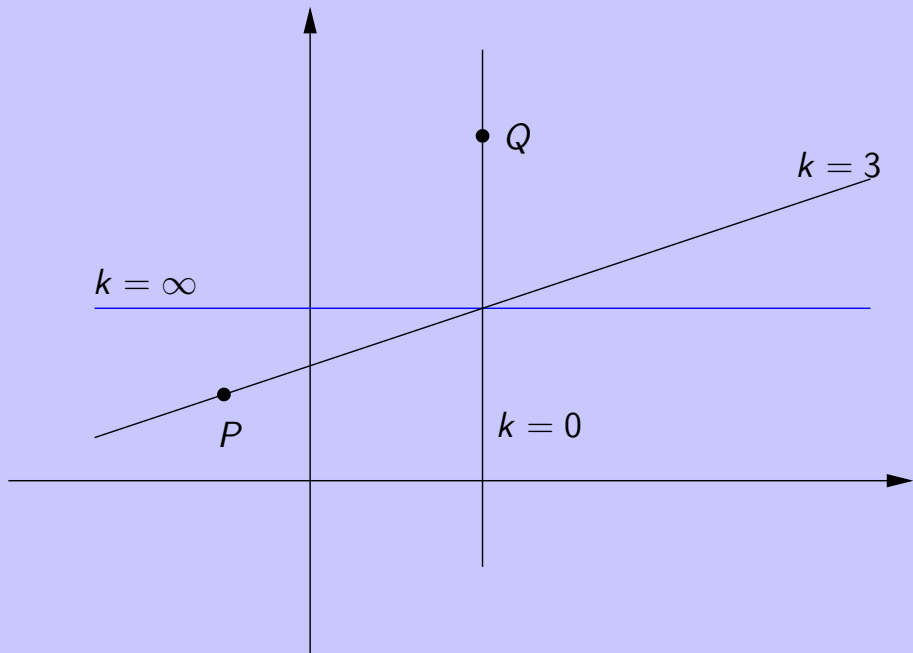
$$-x + 2 + k(y - 2) = 0,$$

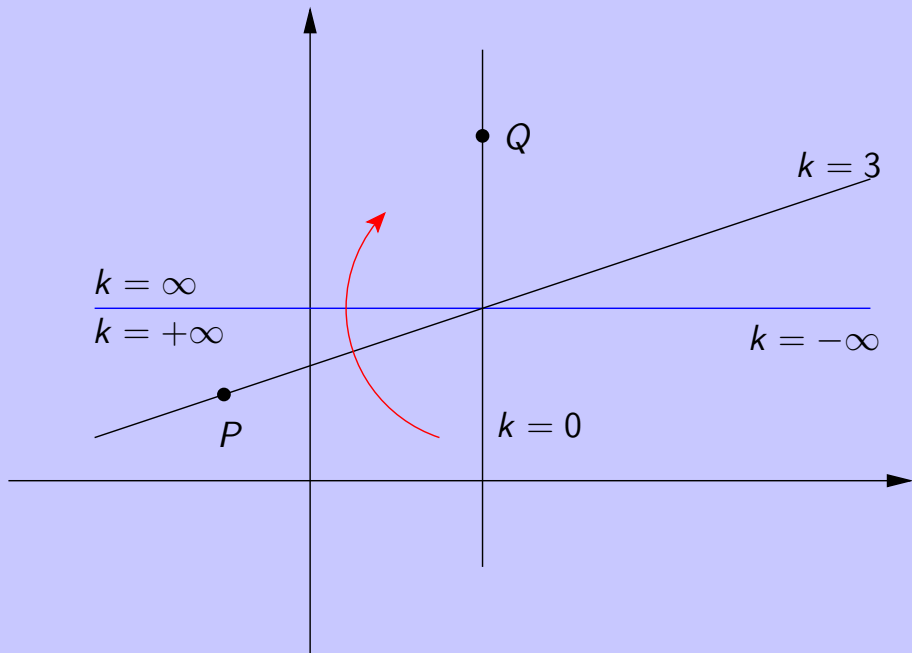
la retta per $k = \infty$ ha equazione $y = 2$. Quindi il fascio gira in senso orario.











Esempio

Ora cerchiamo le rette del fascio tangenti alla parabola:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ ky - x + 2 - 2k = 0. \end{cases} \Rightarrow kx^2 - x + 2 - 2k = 0.$$

Esempio

Ora cerchiamo le rette del fascio tangenti alla parabola:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ ky - x + 2 - 2k = 0. \end{cases} \Rightarrow kx^2 - x + 2 - 2k = 0.$$

Come vedete, l'equazione risolvante il sistema è proprio l'equazione di partenza.

Esempio

Ora cerchiamo le rette del fascio tangenti alla parabola:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ ky - x + 2 - 2k = 0. \end{cases} \Rightarrow kx^2 - x + 2 - 2k = 0.$$

Come vedete, l'equazione risolvete il sistema è proprio l'equazione di partenza.

Ponendo $\Delta = 0$ abbiamo

$$1 - 4k(2 - 2k) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}.$$

Esempio

Ora cerchiamo le rette del fascio tangenti alla parabola:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ ky - x + 2 - 2k = 0. \end{cases} \Rightarrow kx^2 - x + 2 - 2k = 0.$$

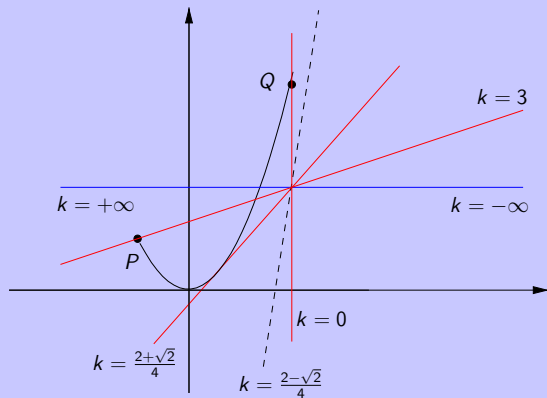
Come vedete, l'equazione risolvete il sistema è proprio l'equazione di partenza.

Ponendo $\Delta = 0$ abbiamo

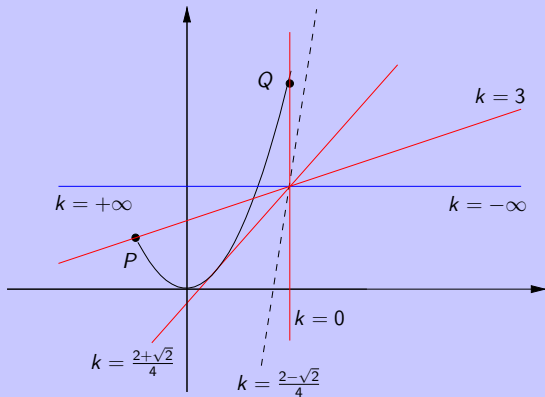
$$1 - 4k(2 - 2k) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}.$$

Ora non resta che fare il disegno finale.

Esempio



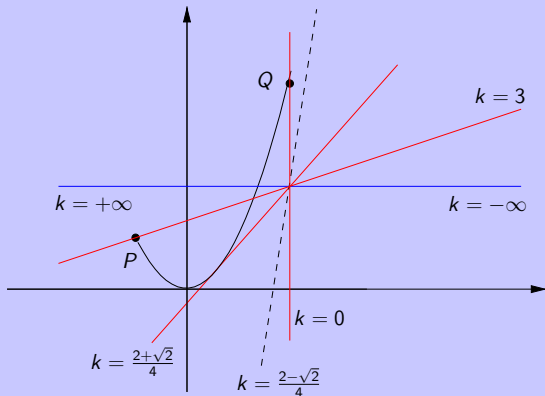
Esempio



Quindi abbiamo:

- una soluzione per $k \leq 0$

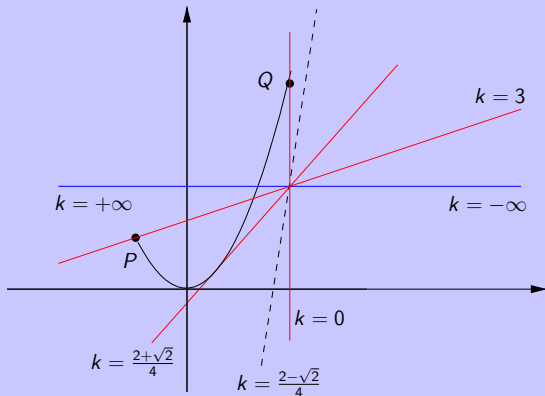
Esempio



Quindi abbiamo:

- una soluzione per $k \leq 0$
- due soluz. coincidenti per $k = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

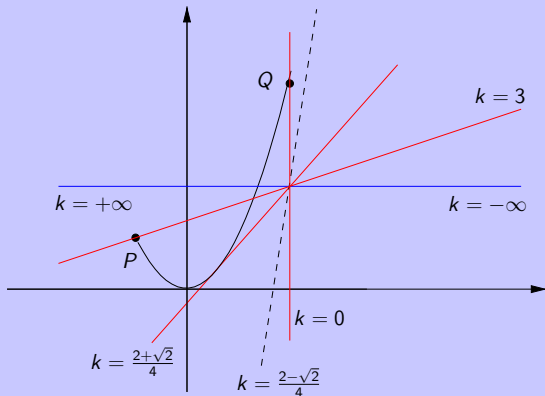
Esempio



Quindi abbiamo:

- una soluzione per $k \leq 0$
- due soluz. coincidenti per $k = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$
- due soluzioni per $\frac{2+\sqrt{2}}{4} < k \leq 3$

Esempio



Quindi abbiamo:

- una soluzione per $k \leq 0$
- due soluz. coincidenti per $k = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$
- due soluzioni per $\frac{2+\sqrt{2}}{4} < k \leq 3$
- una soluzione per $k > 3$.