

LA MASSA IN AMBITO RELATIVISTICO

Ledo Stefanini

PREMESSA DIDATTICA

Nel 1981 il fisico francese J.-M. Levy- Leblond pubblicò sullo *European Journal of Physics* un bellissimo lavoro che portava un titolo curioso: *Classical Apples and quantum potatoes*. Si riferiva agli equivoci in cui può incorrere lo straniero che su un *menu* francese legga la parola *pommes* (in certe circostanze può indicare le mele ed in altri le patate). Tutto dipende dal contesto. La spiritosa analogia di Levy-Leblond era riferita agli equivoci in cui possono incorrere coloro che si sforzano, incautamente, di dare alle grandezze definite in ambito quantistico un'interpretazione ambientata nel contesto della meccanica classica. L'analogo vale per la meccanica relativistica, come sta a dimostrare la storia della didattica (specie italiana) tesa a descrivere la prima rimanendo fermamente ancorata alla seconda. Come è stato chiaramente messo in luce da vari autori (segnatamente da Taylor e Wheeler) ormai da vari decenni, ma anche di recente (Okun: Il virus della massa relativistica), l'equivoco porta non solo ai famosi paradossi, ma è anche alla base di una seria e diffusa incomprensione dei fondamenti della relatività speciale. Le esposizioni scolastiche della meccanica relativistica ne danno una descrizione che tende sempre a riportarla ai concetti della meccanica classica, in ciò favorite dal fatto che i nomi delle grandezze sono gli stessi. Così come il concetto di vettore è ineludibile per chi voglia dare una descrizione dignitosa della meccanica e dell'elettromagnetismo classici, altrettanto inevitabile è il concetto di quadrivettore per una esposizione didattica della relatività ristretta che ne voglia rispettare la reale struttura concettuale. Questo non significa che sia necessario fare un corso di calcolo tensoriale; ma solo avere la consapevolezza che le grandezze di cui si serve la relatività speciale sono ambientate in un continuo a quattro dimensioni che prende il nome di spazio-tempo. Con il vantaggio che per le piccole velocità le varie grandezze si riducono a quelle classiche di cui portano i nomi, anche se ne sono concettualmente diverse. In ciò che segue proporremo un'introduzione elementare ma rigorosa del concetto di massa in ambito relativistico. Non usiamo il termine *massa relativistica* perché si riferisce ad un concetto che è stato da tempo espulso dalle esposizioni anche elementari e che sembra sopravvivere solo nei manuali scolastici italiani. Avvertiamo che in ciò che segue la velocità u è sempre misurata in termini di c e quindi è un numero puro.

PER UNA PARTICELLA

Le grandezze da cui prendere le mosse sono l'energia e la quantità di moto.

L'espressione dell'**energia di una particella** di massa m e velocità u è

$$e = \gamma m \quad (1)$$

dove m è la massa e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad (2),$$

la quale, per le piccole velocità, cioè per $\gamma \ll 1$, si riduce a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}u^2 \quad (3).$$

Diamo alla (1) il nome di “energia” perché, per velocità $\ll 1$, assume una forma familiare:

$$e = \gamma m \cong m \left(1 + \frac{1}{2}v^2 \right) = m + \frac{1}{2}mv^2 \quad (4).$$

Pertanto, l’energia di una particella, in ambito relativistico è la somma dell’energia cinetica e della sua massa, ovvero dell’energia che avrebbe a riposo.

La **quantità di moto** (q.d.m) di una particella viene definita come

$$\vec{p} = \gamma m \vec{u} \quad (5).$$

Si tratta di una grandezza vettoriale, il modulo della quale si riduce, per velocità $\ll 1$, a

$$mu\gamma \cong mu \left(1 + \frac{1}{2}v^2 \right) \cong mu \quad (6)$$

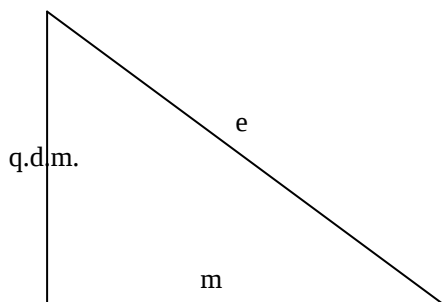
cioè all’espressione classica della q.d.m.

La massa di una particella è definita dalla relazione

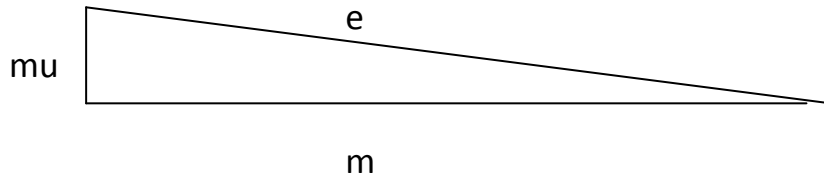
$$m^2 \equiv e^2 - (\vec{p})^2 \quad (7).$$

Per una data particella, il valore dell’energia e della q.d.m. dipendono dal sistema di riferimento dell’osservatore; il valore della massa è invece invariante.

Possiamo considerare l’energia e la q.d.m. rispettivamente come ipotenusa e cateto di un triangolo rettangolo; l’altro cateto rappresentando la massa della particella.

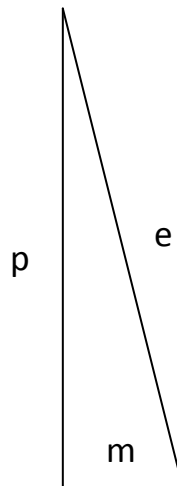


Queste grandezze si riducono alle corrispondenti newtoniane per $u \ll 1$, ovvero, per $\gamma = 1$. In tal caso la q.d.m. $m\gamma u$ tende a zero e il triangolo degenera in un segmento



In questo caso, l'energia della particella si riduce alla sua massa.

Consideriamo ora il caso di una particella con velocità molto vicina ad 1. In tal caso, l'energia e la q.d.m. tendono allo stesso valore e questo implica che la massa tenda ad annullarsi. Per questo motivo la massa del fotone dev'esse nulla.



SULLE UNITÀ DI MISURA

Abbiamo detto che la massa di una particella è definita dalla relazione:

$$m^2 \equiv e^2 - (\vec{p})^2 \quad (7)$$

Questa presuppone che l'energia, la q.d.m. e la massa si misurino nelle stesse unità.

Questa non è una novità; è richiesto dal fatto che si sia convenuto di esprimere le velocità in frazioni di c . Questo implica che si misurino nelle stesse unità le distanze e i tempi. Il significato della relazione

$$x = ct \quad (8)$$

è semplicemente quello di una equivalenza tra unità diverse: *metri e secondi*.

L'analogo avviene tra massa ed energia. Anche la famosa equazione :

$$e = mc^2 \quad (9)$$

è una relazione di equivalenza tra i kg e i J . Non è un'abitudine diffusa, ma qualcuno misura le q.d.m. in Huygens (H). Si può stabilire tra l'energia e la q.d.m. una relazione analoga alla (11):

$$e = pc \quad (10)$$

che consente di passare dagli H ai J . O ancora tra i kg e gli H :

$$p = mc \quad (11).$$

Per esempio, la massa di un protone è

$$m_p = \frac{1}{6,022 \times 10^{23}} g = 1,66 \times 10^{-27} kg$$

Ma poiché

$$1 kg = (3 \times 10^8)^2 J$$

ovvero

$$1 kg = (3 \times 10^8)^2 \times \frac{1}{1,6 \times 10^{-13}} MeV = 5,6 \times 10^{29} MeV$$

possiamo asserire che

$$m_p = 1,66 \times 10^{-27} kg = 1,66 \times 10^{-27} \times 5,6 \times 10^{29} MeV = 938 MeV$$

Un elettrone è 1840 volte più leggero, per cui

$$m_e = \frac{1}{1840} 938 MeV = 0,51 MeV$$

Prendiamo un elettrone accelerato da una d.d.p. di 100 mila Volt. L'energia cinetica che acquista è 100 keV ovvero 0,1 MeV. La sua energia è allora

$$e_e = (0,51 + 0,1) MeV = 0,61 MeV$$

La q.d.m. è pertanto

$$p_e = \sqrt{e_e^2 - m_e^2} = \sqrt{(0,61)^2 - (0,51)^2} \text{ MeV} = 0,335 \text{ MeV}$$

DIGRESSIONE SULLE DIMENSIONI (DIS)UMANE DELLE UNITA' DI MISURA

Le distanze si possono misurare un unità di tempo e, al contrario, i tempi si possono misurare in unità di distanza. Poiché

$$30 \text{ cm} = 1 \text{ ns}$$

un uomo alto 1,8 m può asserire di essere alto 6 nanosecondi. Per contro, poiché

$$1 \text{ anno} = 3,15 \times 10^7 \text{ s} = 3,15 \times 10^7 \times 3 \times 10^8 \text{ m} = 9,5 \times 10^{15} \text{ m} = 9,5 \text{ Pm}$$

un uomo di 20 anni, richiesto della sua età, può rispondere:

$$190 \times 10^{15} \text{ m}$$

ovvero 190 Petametri.

Analogamente, poiché

$$1 \text{ kg} = (3 \times 10^8)^2 \text{ J}$$

un uomo che abbia una massa di 80 kg può, in alternativa, dichiarare un peso di

$$720 \times 10^{16} \text{ J} = 7,2 \times 10^{18} \text{ J} = 7,2 \text{ EJ}$$

cioè, 7,2 Esaj. O anche

$$30 \text{ Gton}$$

dato che una bomba da 1 Megaton libera un'energia pari a

$$1 \text{ Mton} = 4,2 \times \text{PJ}.$$

Si osservi che le unità di misura non sono "pratiche" in quanto anche l'espressione dell'altezza di una persona o della sua massa richiede l'utilizzo di elevate potenze del 10. Un riflesso di quanto un universo culturale limitato all'ambito della meccanica classica sia limitato nei confronti delle grandi strutture che costituiscono l'universo. Anche queste rendono l'idea dell'importanza della finestra che la relatività di Einstein ha aperto sulla realtà fisica.

MASSA DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

L'energia di un sistema di particelle è la somma delle energie di ciascuna:

$$E = \sum e_i = \sum \gamma m \quad (12)$$

La q.d.m. di un sistema di particelle è la somma vettoriale delle q.d.m. delle particelle che lo costituiscono:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m \gamma \vec{u} \quad (13).$$

In analogia con la (7), la massa di un sistema di particelle è definita dall'equazione

$$M^2 \equiv (\sum e_i)^2 - (\sum \vec{p}_i)^2 \quad (14).$$

Se ci riferiamo ad una coppia di particelle, la definizione diventa

$$M^2 \equiv (e_1 + e_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \quad (15).$$

Mettiamo che si tratti di particelle identiche che viaggiano con uguale velocità nella stessa direzione:

$$M^2 \equiv (2\gamma m)^2 - (2\gamma mu)^2 = 4m^2 \gamma^2 (1 - u^2) = 4m^2 \quad (16).$$

Cioè, la massa della coppia di particelle è il doppio della massa di ciascuna. Ma se le particelle viaggiano in versi opposti,

$$M^2 \equiv (2\gamma m)^2 - 0 \Rightarrow M = 2\gamma m \quad (17).$$

Come dire che la massa della coppia è maggiore della somma delle masse, essendo $\gamma > 1$. Pertanto, in generale, possiamo dire che la massa di un insieme di particelle è uguale alla loro somma solo nel caso in cui viaggiano nella stessa direzione. In tutti gli altri casi la massa del sistema è maggiore della somma delle loro masse.

ANNICHILAZIONE DI UNA COPPIA ELETTRONE-POSITRONE

Si verifica quando un elettrone urta un positrone (che ha la stessa massa e carica dell'elettrone, ma carica opposta). Le due particelle scompaiono e danno vita ad una coppia di fotoni gamma:

$$e^- + e^+ \Rightarrow 2\gamma \quad (18).$$

Una reazione che avviene, ad esempio, all'interno del *Large Hadron Collider* (LHC) del CERN di Ginevra.

Prima dell'urto la situazione è la seguente:



$$\text{La massa del sistema è } M = 2\gamma m \quad (19).$$

Dopo l'urto il sistema si riduce ad una coppia di fotoni che viaggiano in senso opposto. Ciascuno dei fotoni ha massa nulla; ma la coppia è dotata di massa. In effetti, per ciascun fotone $p = e$ e quindi $m = 0$. Per la coppia, invece:

$$M^2 = (2e)^2 - (0)^2 \Rightarrow M = 2e \quad (20).$$

Poiché in questo caso (impulso del sistema nullo) la massa si conserva, sarà

$$2\gamma m = 2e$$

e quindi

$$e = \gamma m \quad (21).$$

Questa ci dice che l'energia di ciascun fotone sarà maggiore della massa di ciascun elettrone (0,5 Mev).

La massa del sistema si conserva, mentre le masse dei suoi componenti si annullano.

CREAZIONE DI PARTICELLE

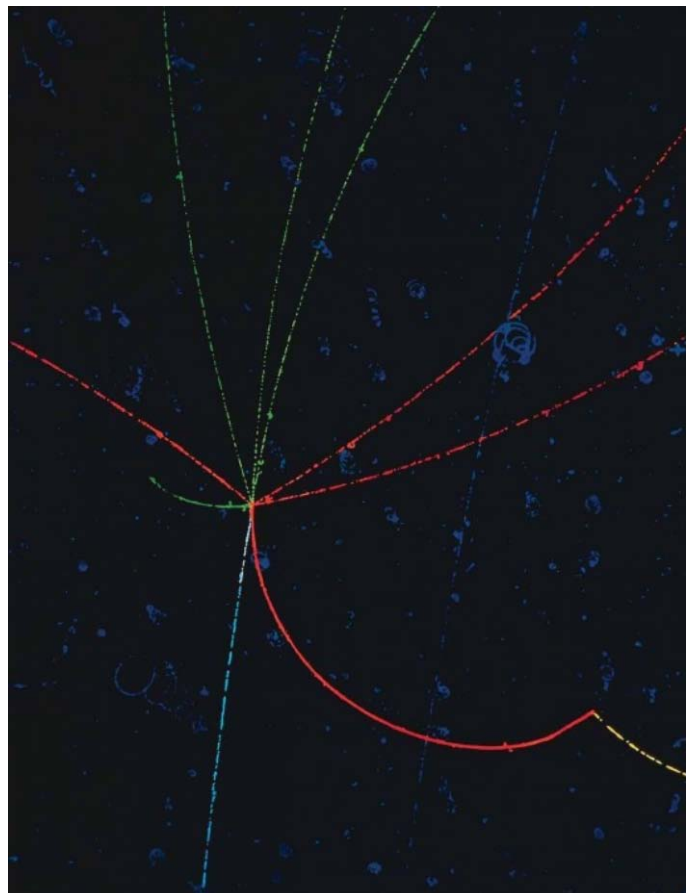
Si tratta di una classica reazione nucleare: un protone viene accelerato e scagliato contro un'identica particella ferma. Dopo l'urto le particelle diventano quattro: tre protoni e un antiprotone (che ha la stessa massa del protone, ma carica opposta).

La figura a fianco è una fotografia presa in camera a bolle in cui si mette in evidenza il fenomeno:

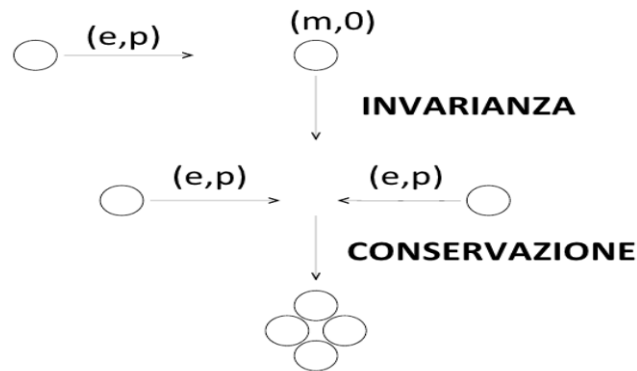
La reazione è pertanto

$$p + p \Rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (22)$$

In questa si ha, come si usa dire, la creazione di una coppia di particelle. Il punto è di stabilire quale debba essere l'energia minima del protone proiettile perché la reazione abbia luogo.



Conviene collocarci nel sistema di riferimento del centro di massa, rispetto al quale l'urto risulta simmetrico.



In questo riferimento la q.d.m. del sistema è nulla (e tale si mantiene anche dopo l'urto). Prima dell'urto, la massa del sistema è definita da

$$M^2 = (e_0 + e_0)^2 - (0)^2 = (2m\gamma_0)^2 \quad (23).$$

Dopo l'urto abbiamo quattro particelle identiche ferme; quindi la massa del sistema è $4m$. Poiché l'energia e la q.d.m. si conservano,

$$2m\gamma_0 = 4m \quad (24)$$

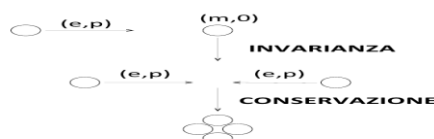
da cui

$$\gamma_0 = 2 \quad (25).$$

Pertanto, $e_0 = 2m$ e l'energia totale prima dell'urto è $E_0 = 4m$.

Vediamo ora l'urto dal sistema del laboratorio.

La situazione prima dell'urto è quella rappresentata in figura:



dove il protone incidente è caratterizzato da una energia e e una q.d.m. p , mentre l'energia del protone bersaglio è m e la q.d.m. nulla.

La massa della coppia è definita da

$$M^2 = (e + m)^2 - p^2 = m^2 (\gamma + 1)^2 - (\gamma mu)^2 \quad (26).$$

Nel passaggio dal sistema di riferimento del laboratorio a quello del centro di massa (e viceversa), la massa della coppia non cambia anche se cambiano l'energia e la q.d.m. delle due particelle: abbiamo detto che è un *invariante*. Pertanto, dovrà essere

$$m^2 (\gamma + 1)^2 - (\gamma mu)^2 = 16m^2 \quad (27)$$

da cui segue, con l'algebra elementare,

$$(\gamma + 1)^2 - (\gamma u)^2 = 16$$

$$(1 - u^2) \gamma^2 + 2\gamma = 15$$

$$1 + 2\gamma = 15$$

$$\gamma = 7 \quad (28)$$

L'energia del protone proiettile è pertanto (al minimo)

$$e = 7m \quad (29).$$

Ne consegue che l'energia cinetica del protone dev'essere (almeno) $6m$. Poiché la massa del protone è

$$m = 938 \text{ MeV}$$

l'energia cinetica dev'essere almeno $e = 5,62 \text{ GeV}$.

Non vi è alcuna misteriosa trasformazione di energia in massa.

Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia