

UN'ATTIVITA' DIDATTICA SULLA MASSA COMPLESSIVA DELL'ARIA

Ledo Stefanini

1. OSSERVAZIONI SULLA MEMORIA DI PASCAL

L'attività che proponiamo è basata su un famoso saggio di Blaise Pascal (*Traitez de l'Equilibre des Liqueurs et de la Pésanteur de la Masse de l'Air*, Cap.9) che venne pubblicato un anno dopo la sua morte (1662).

Il tutto parte da un'osservazione riportata nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638):

SAGR. Ed io mercé di questi discorsi ritrovo la causa di un effetto che lungo tempo m'ha tenuto la mente ingombrata di maraviglia e vota d'intelligenza. Osservai già una cisterna, nella quale, per trarne l'acqua, fu fatta fare una tromba, da chi forse credeva, ma vanamente, di poterne cavar con minor fatica l'istessa o maggior quantità che con le secchie ordinarie; ed ha questa tromba il suo stantuffo e animella su alta, sì che l'acqua si fa salire per attrazione, e non per impulso, come fanno le trombe che hanno l'ordigno da basso. Questa, sin che nella cisterna vi è acqua sino ad una determinata altezza, la tira abbondantemente; ma quando l'acqua abbassa oltre a un determinato segno, la tromba non lavora più. Io credetti, la prima volta che osservai tale accidente, che l'ordigno fusse guasto; e trovato il maestro acciò lo raccomandasse, mi disse che non vi era altrimenti difetto alcuno, fuor che nell'acqua, la quale, essendosi abbassata troppo, non pativa d'esser alzata a tanta altezza; e mi soggiunse, né con trombe, né con altra machina che sollevi l'acqua per attrazione, esser possibile farla montare un capello più di diciotto braccia: e siano le trombe larghe o strette, questa è la misura dell'altezza limitatissima.

La sostanza dell'argomentazione di Pascal appare molto semplice:

1. Osservazione sperimentale (di Galileo): non è possibile, con una pompa aspirante, portare l'acqua (a livello del mare) ad un'altezza superiore a 10,3 m
2. Interpretazione: il sollevamento dell'acqua nella pompa aspirante è prodotto dalla pressione atmosferica. L'altezza massima raggiungibile indica perciò che la pressione atmosferica è pari a quella prodotta da uno strato d'acqua alto 10,3 m.
3. Non ci interessa, di conseguenza, conoscere l'altezza dell'atmosfera, né come è distribuita la sua densità o altri parametri fisici. L'interpretazione ci consente di ignorare tutto questo.
4. Il peso dell'atmosfera è uguale a quello di uno strato uniforme di acqua di spessore 10,3 m che avvolga completamente la superficie della terra.

Poiché sappiamo che:

Raggio della terra = 6373 km

Massa di 1 m³ d'acqua = 10³ kg

il problema si presenta molto semplice da risolvere.

C'è ancora una cosa da conoscere: come calcolare la superficie della terra, assunta come sferica.

La formula è nota fin dalla scuola media: $S = 4M^2$ e discende da Archimede, che nel saggio *Sulla sfera e sul cilindro* dimostrò che la superficie della sfera è quadrupla di quella della sua sezione massima. Con ciò, il problema della determinazione dell'area della superficie della sfera viene ricondotto a quello dell'area del cerchio, cioè si passa da una superficie curva ad una piana. Ora, è a tutti noto che, sempre grazie ad Archimede, l'area del cerchio è proporzionale al quadrato delle sue dimensioni, ma ai tempi di Pascal non si aveva idea del fatto che il fattore di proporzionalità fosse un numero irrazionale che indichiamo con π . Il fattore che utilizziamo nel calcolo (3,14) è un numero razionale che consideriamo un'accettabile approssimazione del vero fattore di proporzionalità. Come fattore di proporzionalità Pascal assume 22/7.

La superficie della terra è quindi

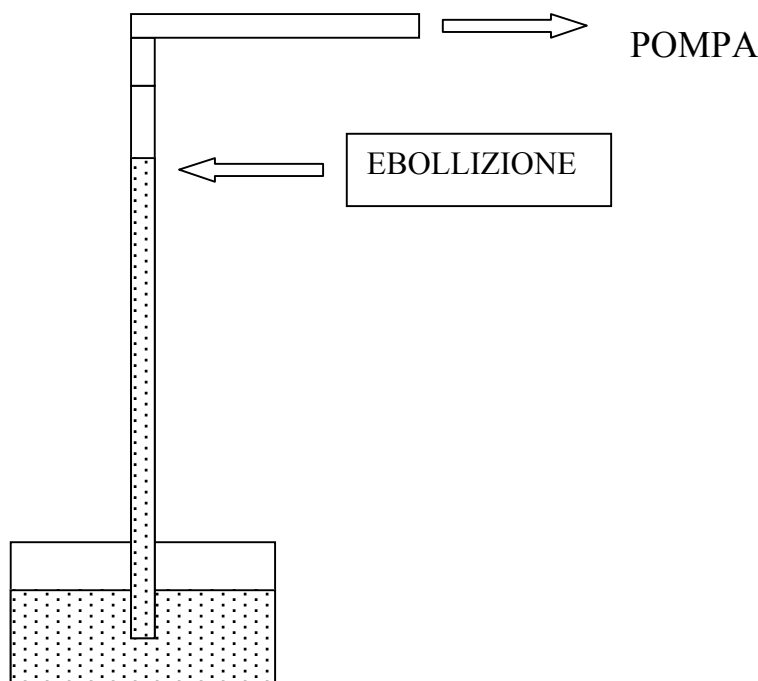
$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \left(\frac{22}{7}\right) \cdot (6371010,416)^2$$

Nell'ambito dell'interpretazione che abbiamo dato del fenomeno delle pompe, l'atmosfera grava su ogni m^2 di terra come uno strato d'acqua alto 10,3 m. Poiché la sua massa è $10,3 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^2}$, la massa complessiva sarà

$$M = 10,3 \cdot 10^3 \cdot 105,2610$$

Se il problema appare banale è perché agli studenti sfuggono alcuni aspetti essenziali della questione, quali:

- l'osservazione sperimentale descritta da Galileo, che scaturisce dall'esperienza diretta degli artigiani del '600: per quanto buona sia la pompa, non è possibile aspirare acqua oltre le 18 braccia fiorentine. Si tratta di un'osservazione tutt'altro che semplice a motivo del fatto che, nel tubo, l'acqua si mette a bollire e ciò rende molto incerta la determinazione del livello.



- l'interpretazione del fenomeno che dobbiamo a Torricelli e a Pascal. Che l'aria sia dotata di peso era già stato ipotizzato da Galileo, che ne fece anche alcune misure. Tuttavia, che la pressione

dell'aria potesse essere tanto grande era un'ipotesi talmente rivoluzionaria che andava verificata mediante numerosi altri esperimenti che, infatti, vennero realizzati da Pascal. Per esempio, il fatto che la pressione diminuisse con l'aumentare della quota sul livello del mare.

- c) le dimensioni della terra. L'idea originale era quella di Eratostene che richiedeva la misura dell'altezza sull'orizzonte di un astro fatta simultaneamente in due luoghi diversi, posti preferibilmente su uno stesso meridiano. Richiedeva anche la conoscenza della distanza di questi due luoghi. Si trattava in sostanza di determinare longitudine e latitudine di due luoghi diversi e la loro distanza: un'impresa molto complessa che ancora nel '700 non aveva portato a risultati del tutto affidabili.
- d) l'interpretazione del fenomeno delle pompe è estremamente semplice e generale. Sono queste caratteristiche che consentono di trascurare i valori locali dei parametri fisici e ragionare sull'intero sistema dell'atmosfera.

2. UNA POSSIBILE TRACCIA DIDATTICA

Si potrebbe sviluppare il percorso secondo la traccia che suggeriamo:

1. Proposta del problema: *Quanti chilogrammi d'aria ci sono intorno alla Terra?*
2. Richiesta di quali dati bisognerebbe conoscere per fare un calcolo del genere. Qualcuno dirà che è necessario conoscere il volume dell'aria e il suo peso specifico. Per quanto riguarda il peso specifico (a livello del mare) è un dato che si conosce: $1,3 \text{ kg/m}^3$. Per il calcolo del volume è necessario conoscere lo spessore dello strato d'aria che circonda la Terra. Sappiamo che ad una quota di 20 km la densità dell'aria è molto piccola, quindi possiamo immaginare che lo strato abbia questo spessore e che la densità media sia la metà di quella a quota zero. Naturalmente occorre conoscere la superficie della Terra e questo richiede di conoscere il raggio terrestre ($6,4 \times 10^3 \text{ km}$).
3. Quale geometria si deve utilizzare. Si tratta di calcolare il volume di uno strato sferico di spessore molto piccolo rispetto al raggio terrestre.

Pertanto il volume è dato dalla superficie della sfera per lo spessore:

$$V = 4\pi R^2 M$$

Inserendo in questa i valori, si ottiene $V = 1,0310^{19} \text{ m}^3$.

4. Data la massa volumica a quota zero, qual è la massa complessiva? Assumendo che la densità media sia la metà di quella che si misura in laboratorio, si ottiene

$$M = \frac{1}{2} \rho_0 V = 6,710^{18} \text{ kg}$$

5. Qual è l'attendibilità del risultato? L'ipotesi fatta sullo spessore dell'atmosfera e sulla sua densità media inducono a pensare che il risultato valga solamente come ordine di grandezza.

L'interpretazione di Torricelli-Pascal della pressione atmosferica consente un notevolissimo miglioramento: la pressione atmosferica al livello del mare è uguale a quella che eserciterebbe uno strato di mercurio di 760 cm di spessore, ovvero uno strato d'acqua di 10,3 m. Questa osservazione ci consente di superare tutti i problemi inerenti lo spessore dell'atmosfera e la sua densità. È importante che gli studenti si rendano conto dell'enorme potere di sintesi che risiede nell'interpretazione dell'esperienza di Torricelli.

Suggeriamo anche, prima di leggere lo scritto di Pascal, di assistere (magari in collaborazione con il docente di filosofia) alla proiezione del magnifico film che Roberto Rossellini girò nel 1971 sul grande filosofo.

Solo a questo punto è didatticamente conveniente avvicinare la (rivoluzionaria per quei tempi) memoria di Pascal.

3. PESO COMPLESSIVO DELLA MASSA DI TUTTA L'ARIA ESISTENTE

(Dal *Traitez de l' Equilibre des Liqueurs et de la Pésanteur de la Masse de l'Air*, di Blaise Pascal, 1663.Cap.9)

Abbiamo visto da tutti questi esperimenti che l'aria sovrastante il livello del mare esercita una pressione pari a quella dell'acqua con un'altezza di 31 piedi e due pollici¹.

Inoltre, che l'aria esercita una minore pressione sui luoghi che si trovano al di sopra del livello del mare, ed ancora, che l'aria non esercita una stessa pressione su ogni punto della terra, ma che addirittura ne esercita una diversa su ogni luogo. Non ci è così possibile determinare una misura costante per la pressione dell'aria in tutti i luoghi del mondo, uno per l'altro.

Possiamo però congetturarne una abbastanza vicina al giusto, considerando, per esempio, tutti i luoghi della terra, in generale, come se subissero una pressione da parte dell'aria sempre uguale in ciascun luogo, uno per l'altro, pari a quella di una colonna d'acqua alta 31 piedi, e si può star certi che con questa ipotesi non si farà un errore superiore a mezzo piede d'acqua.

Ora abbiamo visto che l'aria si trova al di sopra delle montagne alte 500 tese² sul livello del mare, esercita una pressione uguale a quella dell'acqua che abbia un'altezza di 26 piedi e 11 pollici.

$$\frac{31\cancel{piedi}17}{31\cancel{piedi}17 + 26,92} = 4,25$$

Di conseguenza tutta l'aria compresa tra il livello del mare e la cima delle montagne alte 500 tese esercita una pressione pari a quella dell'acqua con un'altezza di 4 piedi e un pollice, che corrisponde circa alla settima parte dell'altezza totale. Si vede chiaramente da ciò come l'aria compresa tra il mare e queste montagne corrisponde circa alla settima parte dell'intera massa dell'aria.

Abbiamo visto, inoltre, sempre da questi esperimenti, che i vapori, che sono densi quando l'aria ne è particolarmente carica, esercitano una pressione pari a quella dell'acqua con un'altezza di un piede e otto pollici, dato che l'aria carica per poter essere controbilanciata innalzerà l'acqua contenuta nelle pompe ad un'altezza superiore di tanto a quella in cui prima riusciva a controbilanciare la pressione dell'aria. Per cui se tutti i vapori che trovano su una determinata

¹ 1 piede francese = 12 pollici = 32,5 cm; 1 pollice = 2,7 cm

² 1 tesa = 6 piedi = 1,95 m

località fossero ridotti ad acqua, come succede quando vengono mutati in pioggia, essi potrebbero produrre solo un'altezza di un piede e otto pollici d'acqua su questa località³.

E se talora si verificano temporali per i quali l'acqua della pioggia caduta raggiunge un'altezza maggiore, ciò avviene perché il vento vi porta vapori delle località vicine.

Da ciò ricaviamo ancora che se tutta la sfera dell'aria fosse spinta e compressa contro la terra da una forza che, dall'alto, la riducesse in basso, nel minor spazio possibile, essa allora come mutata in acqua, verrebbe ad avere un'altezza di 31 piedi soltanto.

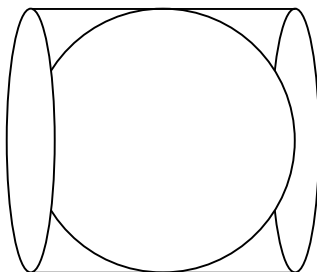
È necessario perciò considerare tutta la massa dell'aria allo stato libero in cui normalmente si trova, come se si trattasse di una massa d'acqua di 31 piedi di altezza, intorno a tutta la terra, in seguito rarefatta, dilatata al massimo e mutata in questo stato, che noi denominiamo aria, nel quale occupa realmente più spazio, ma nel quale conserva esattamente la stessa pressione che avrebbe uno strato d'acqua alto 31 piedi.

Dato poi che non ci sarebbe nulla di più facile che calcolare quante libbre peserebbe l'acqua che circondasse tutta la terra ad un'altezza di 31 piedi, tanto che perfino un bambino che conosca l'addizione e la sottrazione saprebbe calcolarlo, nello stesso modo dunque potremmo ricavare quante libbre pesa tutta l'aria esistente in natura, essendo esattamente la stessa cosa. Se poi si fa il calcolo si vedrà che il suo peso è circa otto milioni di milioni di milioni di libbre.

Mi sono voluto concedere questo piacere e ho eseguito il calcolo nel seguente modo.

Ho supposto che il diametro di un cerchio stia alla sua circonferenza come 7 sta a 22⁴.

Ho supposto che il diametro di una sfera moltiplicato per la circonferenza del circolo massimo dia l'area della superficie sferica⁵.



Sappiamo che la circonferenza della terra è stata divisa in 360 gradi (questa divisione è convenzionale, dato che si sarebbe potuto suddividerla, volendolo, in un numero maggiore o minore di parti, come per i cerchi celesti).

Si è trovato che ciascuno di questi gradi si estende per 50000 tese⁶.

³ Pascal dice che la pressione di vapore è 1piede e 8pollici cioè 1,67 piedi ovvero 54 cm d'acqua. Poiché 10 m d'acqua corrispondono a 10^5 Pa, 54 cm d'acqua corrispondono ad una pressione di 5×10^3 Pa. La tensione di vapor d'acqua a 20°C tabulata è di $2,3 \times 10^3$ Pa.

⁴ 22/7 coincide con π entro l'uno per mille.

⁵ È un enunciato di Euclide.

⁶ 50×10^3 tese=97,5 km. Il valore odierno è 112 km.

Le leghe sono, presso Parigi, di 2500 tese e di conseguenza ci sono 20 leghe comprese in ciascun grado. Altri ne contano 25, ma non intendono più di 2000 tese per ciascuna lega, e la sostanza è la stessa.

Ogni tesa è di 6 piedi.

Un piede cubo d'acqua pesa 72 libbre⁷.

Ciò posto, sarà facile calcolare ciò che desideriamo. Infatti, la terra ha come cerchio massimo, o circonferenza, 360 gradi. Conseguentemente la sua circonferenza è di 7200 leghe:

$$360 \times 20 \text{ leghe} = 7200 \text{ leghe}$$

In virtù della proporzione che intercorre tra la circonferenza e il diametro, il suo diametro sarà pari a 2291 leghe:

$$\frac{7200}{\frac{22}{7}} = 2291$$

Dunque, moltiplicando il diametro della terra per la circonferenza del suo cerchio massimo, si avrà che tutta la sua superficie sferica sarà di 16 495 200 leghe quadrate:

$$7200 \times 2291 = 16,4910 \text{ } ^{62} \text{leghe}$$

Cioè 103 095 000 000 000 tese quadrate;

$$16,4910 \times 6283185 = 10310 \text{ } ^{122} \text{tesetese}$$

Cioè 3 711 420 000 000 000 piedi quadrati:

$$10310 \times 3600 = 37114 \text{ } ^{152} \text{piedipiedi}$$

Poiché un piede cubo d'acqua pesa 72 libbre, se ne ricava che un prisma d'acqua d'un piede quadrato di base e 31 piedi d'altezza pesa 2232 libbre: $72 \times 31 = 2232$ libbre

Dunque, se la terra fosse ricoperta d'acqua fino ad un'altezza di 31 piedi, ci sarebbero tanti prismi d'acqua di 31 piedi d'altezza quanti sono i piedi quadrati della sua superficie. (So bene che non sarebbero dei prismi, ma dei settori di sfera, e trascuro di proposito ciò.)

⁷ $10,2334(1,3)^3$. Una libbra (di Parigi) corrispondeva a 489,5 g. Pertanto, un piede cubo d'acqua pesava, secondo Pascal, 35,2 kg.

Per cui essa sosterebbe tante volte 2232 libbre d'acqua, quanti sono i piedi quadrati di tutta la sua superficie.

Dunque, tutta questa massa d'acqua dovrebbe pesare 8 283 889 440 000 000 000 libbre:

~~3,7162732108~~¹⁵³¹⁸¹⁸~~3,28104,0510~~ *libbre* *kg*

E così la massa intera della sfera dell'aria che si trova nel mondo dovrebbe pesare lo stesso, ossia sempre 8 283 889 440 000 000 000 libbre.

Cioè otto milioni di milioni di milioni, duecento ottantatre mila ottocento ottantanove milioni di milioni, quattrocento quaranta mila milioni di libbre.

Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia